HEC 2009 S2

**Sujet S 2 - Exercice**

**1)** Question de cours : Existence des moments d'une variable aléatoire discrète.

**2)** Soit $f$ la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$f(x)=\frac{3x^2-2x-2(1-x)^2\ln(1-x)}{12x^2}$$

**a)** Étudier les variations de $f$.

**b)** Montrer que, lorsque $x$ tend vers $0^+$, $f(x)\sim\dfrac{x}{18}$.

Soit $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$, strictement positives, indépendantes et de même loi.

On pose : $U=X_1+X_2$, $T=X_1-X_2$, $Y_1=\dfrac{X_1}{U}$, $Y_2=\dfrac{X_2}{U}$.

**3) a)** Montrer que $Y_1$ et $Y_2$ suivent la même loi et admettent des moments de tous ordres. Calculer $\mathbb{E}(Y_1)$ et $\mathbb{E}(Y_2)$.

**b)** En déduire que $\dfrac{T}{U}$ admet des moments de tous ordres. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{T}{U}\right)$.

**c)** Montrer que $\mathbf{Cov}(Y_1,Y_2)=-\mathbb{V}(Y_1)$. En déduire une formule reliant $\mathbb{V}\left(\dfrac{T}{U}\right)$ et $\mathbb{V}(Y_1)$.

**4)** On suppose que $X_1$ et $X_2$ suivent la loi géométrique de paramètre $p$ ($p\in]0,1[$). On pose $q=1-p$. On admet le résultat suivant : $\mathbb{V}(Y_1)=f(q)$.

À l'aide des résultats précédents, établir l'encadrement suivant :

$$0<\mathbb{V}\left(\frac{T}{U}\right)<\frac{1}{3}$$

**Sujet S 2 - Exercice sans préparation**

1- Montrer que pour $z>0$, l'intégrale

$$J(z)=\int_z^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

est convergente.

2- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J(z)$ est équivalent en $+\infty$ à $\dfrac{e^{-z}}{z}$.

**Sujet S 3 - Exercice**

**Q1** * Soit $X$ une variable aléatoire discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Soit $r \in \mathbb{N}$.

$X(\Omega)$ a pour cardinal $n$ et $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ & $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

$X$ possède un moment d'ordre $r$ qui vaut $\sum_{k=1}^{n} x_k^r P(X = x_k)$.

* Soit $X$ une variable aléatoire infinie sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Soit $r \in \mathbb{N}$.

$X(\Omega) = \{x_k ; k \in [\![n_0, +\infty[\![\}$ et $k \mapsto x_k$ est une bijection de $[\![n_0, +\infty[\![$ sur $X(\Omega)$.

$X$ possède un moment d'ordre $r$ si la série de terme général $x_k^r P(X = x_k)$ est absolument convergente... ou convergente !

En cas d'existence le moment d'ordre $r$ de $X$ est $\sum_{k=n_0}^{+\infty} x_k^r P(X = x_k)$.

**Q2** $f$ est dérivable sur $]0,1[$. Soit $x \in ]0,1[$.

$$f'(x) = \frac{1}{12}\,\frac{1}{x^4}\left[x^2\left(6x - 2 + 4(1-x)\ln(1-x) - 2(1-x)^2\frac{-1}{1-x}\right) - 2x\left(3x^2 - 2x - 2(1-x)^2\ln(1-x)\right)\right].$$

$$f'(x) = \frac{1}{12}\,\frac{1}{x^4}\left[6x^3 - 2x^2 + 4x^2(1-x)\ln(1-x) + 2x^2(1-x) - 6x^3 + 4x^2 + 4x(1-x)^2\ln(1-x)\right].$$

$$f'(x) = \frac{1}{12}\,\frac{1}{x^3}\left[-2x^2 + 4x + 4(1-x)\ln(1-x)\right] = \frac{1}{6}\,\frac{1}{x^3}\left[-x^2 + 2x + 2(1-x)\ln(1-x)\right].$$

Posons $\forall x \in ]0,1[$, $u(x) = -x^2 + 2x + 2(1-x)\ln(1-x)$. $f'$ est du signe de $u$.

$u$ est dérivable sur $]0,1[$. $\forall x \in ]0,1[$, $u'(x) = -2x + 2 - 2\ln(1-x) + 2(1-x)\frac{-1}{1-x}$.

$\forall x \in ]0,1[$, $u'(x) = -2x - 2\ln(1-x) = -2\,(x + \ln(1-x))$.

Or $\forall x \in ]0,1[$, $\ln(1-x) \leqslant -x$ (inégalité classique). Alors $\forall x \in ]0,1[$, $u'(x) \geqslant 0$.

$u$ est croissante sur $]0,1[$ et $\lim_{x \mapsto 0} u(x) = 0$. Alors $\forall x \in ]0,1[$, $u(x) \geqslant 0$.

Alors $f'$ est positive sur $]0,1[$. <u>$f$ est croissante sur $]0,1[$.</u>

<u>Remarque</u>.. En fait $\forall x \in ]0,1[$, $\ln(1-x) < -x$. Ainsi $u'$ est strictement positive sur $]0,1[$. $u$ est strictement croissante sur $]0,1[$ et

$\lim_{x \mapsto 0} u(x) = 0$. Alors $\forall x \in ]0,1[$, $u(x) > 0$. Donc $\forall x \in ]0,1[$, $f'(x) > 0$.

<u>$f$ est strictement croissante sur $]0,1[$.</u>

**b)** $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$2(1-x)^2 \underset{x\to 0}{=} 2 - 4x + 2x^2 + o(x^2)$.

Par produit et troncature : $2(1-x)^2 \ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -2x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + 2x^3 - 2x^3 + o(x^3)$

$2(1-x)^2 \ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -2x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.

Alors $3x^2 - 2x - 2(1-x)^2\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.

Donc $3x^2 - 2x - 2(1-x)^2 \ln(1-x) \underset{0}{\sim} \frac{2}{3}x^3$.

$f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\frac{2}{3}x^3}{12x^2} = \dfrac{x}{18}$. $\underline{\underline{f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{18}}}$.

**Q3** a) • $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{x_i ; i \in I\}$. $I$ est fini ou dénombrable, $i \to x_i$ est une bijection de $I$ sur $X_1(\Omega) = X_2(\Omega)$ et $\forall i \in I$, $x_i \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $y \in Y_1(\Omega) = Y_2(\Omega)$. $(\{X_1 = x_i\})_{i\in I}$ est un système complet d'événements donc :

$P(Y_1 = y) = \sum_{i\in I} P\left(\left\{\frac{X_1}{X_1+X_2} = y\right\} \cap \{X_1 = x_i\}\right) = \sum_{i\in I} P\left(\left\{\frac{x_i}{x_i+X_2} = y\right\} \cap \{X_1 = x_i\}\right)$

$P(Y_1 = y) = \sum_{i\in I} P\left(\left\{X_2 = \frac{1-y}{y}x_i\right\} \cap \{X_1 = x_i\}\right) = \sum_{i\in I} P\left(X_2 = \frac{1-y}{y}x_i\right) P(X_1 = x_i)$

↑ $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes.

De même $P(Y_2 = y) = \sum_{i\in I} P\left(X_1 = \frac{1-y}{y}x_i\right) P(X_2 = x_i)$.

Or $X_1$ et $X_2$ ont même loi donc $\forall i\in I$, $P\left(X_2 = \frac{1-y}{y}x_i\right)P(X_1 = x_i) = P\left(X_1 = \frac{1-y}{y}x_i\right)P(X_2 = x_i)$.

Donc $P(Y_1 = y) = P(Y_2 = y)$ et ceci pour tout $y$ dans $Y_1(\Omega) = Y_2(\Omega)$.

$\underline{\underline{Y_1 \text{ et } Y_2 \text{ ont même loi.}}}$

• D'après le cours $Y_1$ et $Y_2$ sont des variables aléatoires discrètes.

Si $Y_1(\Omega) = Y_2(\Omega)$ est fini alors $Y_1$ et $Y_2$ possèdent des moments de tous ordres.

Supposons $Y_1(\Omega)=Y_2(\Omega)$ dénombrable. $Y_1(\Omega)=Y_2(\Omega)=\{z_k\ ;\ k\in[\![n_0,+\infty[\![\}$ où $k\mapsto z_k$ est une bijection de $[\![n_0,+\infty[\![$ sur $Y_1(\Omega)=Y_2(\Omega)$. Soit $r\in\mathbb{N}$.

Soit $k\in[\![n_0,+\infty[\![$. $\exists(i,i')\in I_\ell^2$ $z_k=\dfrac{x_i}{x_i+x_{i'}}$. Alors $0<z_k<1$ car $x_i>0$ et $x_{i'}>0$.

Alors $\forall k\in[\![n_0,+\infty[\![$, $0\leq z_k^r\,P(Y_1=z_k)\leq P(Y_1=z_k)$ et la série de terme général $P(Y_1=z_k)$ converge. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $z_k^r\,P(Y_1=z_k)$ converge. Elle converge absolument car elle est à termes positifs. Donc $Y_1$ possède un moment d'ordre $r$ et ceci pour tout $r$ dans $\mathbb{N}$. $Y_2$ également...

$Y_1$ et $Y_2$ possèdent des moments de tous ordres.

$Y_1$ et $Y_2$ ont même loi et possède une espérance donc $E(Y_1)=E(Y_2)$.

De plus $Y_1+Y_2=\dfrac{X_1}{X_1+X_2}+\dfrac{X_2}{X_1+X_2}=1$. Alors $1=E(Y_1+Y_2)=E(Y_1)+E(Y_2)=2E(Y_1)$.

Donc $E(Y_1)=E(Y_2)=\dfrac{1}{2}$.

b) $\dfrac{I}{U}=\dfrac{X_1-X_2}{X_1+X_2}=Y_1-Y_2$. $Y_1$ et $Y_2$ sont deux variables aléatoires discrètes qui prennent leurs valeurs dans $]0,1[$ donc $\dfrac{I}{U}$ est une variable aléatoire discrète qui prend ses valeurs dans $]-1,1[$.

Si $\frac{I}{U}(\Omega)$ est fini. $\dfrac{I}{U}$ possède des moments de tous ordres.

Supposons $\frac{I}{U}(\Omega)$ dénombrable. Posons $L=\dfrac{I}{U}$ et $L(\Omega)=\{\ell_k\ ;\ k\in[\![n_0,+\infty[\![\}$

Soit $r\in\mathbb{N}$.

$\forall k\in[\![n_0,+\infty[\![$, $0\leq|\ell_k^r\,P(L=\ell_k)|=|\ell_k|^r\,P(L=\ell_k)\underset{L(\Omega)\subset]-1,1[}{\leq}P(L=\ell_k)$.

La convergence de la série de terme général $P(L=\ell_k)$ et les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent la convergence de la série de terme général $|\ell_k^r P(L=\ell_k)|$.

La série de terme général $\ell_k^r P(L=\ell_k)$ est absolument convergente donc

L possède un moment d'ordre r et ceci pour tout r dans $\mathbb{N}$.

$\frac{T}{U}$ possède des moments de tous ordres.

$E\left(\frac{T}{U}\right) = E(Y_1 - Y_2) = E(Y_1) - E(Y_2) = 0$. $\underline{\underline{E\left(\frac{T}{U}\right) = 0}}$.

c) $Y_1$ et $Y_2$ possèdent un moment d'ordre 2 donc $cov(Y_1, Y_2)$ existe.

$Y_1 + Y_2 = 1$.

Donc $0 = V(1) = V(Y_1) + V(Y_2) + 2cov(Y_1, Y_2) \overset{Y_1 \text{ et } Y_2 \text{ de même loi}}{=} 2V(Y_1) + 2cov(Y_1, Y_2)$.

Alors $2cov(Y_1, Y_2) + 2V(Y_1) = 0$ ; $\underline{\underline{cov(Y_1, Y_2) = -V(Y_1)}}$.

$V\left(\frac{T}{U}\right) = V(Y_1 - Y_2) = V(Y_1) + V(-Y_2) + 2cov(Y_1, -Y_2) = V(Y_1) + V(Y_2) - 2cov(Y_1, Y_2)$.

$V\left(\frac{T}{U}\right) = 2V(Y_1) - 2(-V(Y_1))$. $\underline{\underline{V\left(\frac{T}{U}\right) = 4V(Y_1)}}$.

Q4 Nous avons vu que $\underline{f \text{ est continue et strictement croissante sur } ]0,1[}$.

De plus $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{18}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{18} = 0$ / $\underline{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0}$.

$\lim\limits_{x \to 1} ((1-x)^2 \ln(1-x)) = 0$ par croissance comparée donc $\underline{\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{3-2-2\times 0}{12} = \frac{1}{12}}$.

Les trois points précédents montrent que $\forall x \in ]0,1[,\ 0 < f(x) < \frac{1}{12}$.

$p \in ]0,1[$ donc $q = 1 - p \in ]0,1[$. Alors $0 < V(Y_1) < \frac{1}{12}$ car $V(Y_1) = f(q)$.

Donc $\underline{\underline{0 < V\left(\frac{T}{U}\right) < \frac{1}{3}}}$ car $V\left(\frac{T}{U}\right) = 4V(Y_1)$.

R.



**Question 2** **HEC 2009-2**

Q1. Montrer que pour $z > 0$, l'intégrale $J(z) = \displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Q2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J(z)$ est équivalent en $+\infty$ $\dfrac{e^{-z}}{z}$.

---

**Q1** $f : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$\forall t \in [1,+\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{t} \leqslant e^{-t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge car $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge.

les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge. Alors pour tout élément $z$ de $]0,+\infty[$, $\displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge.

**Q2** Soit $z \in ]0,+\infty[$. Soit $A \in ]z,+\infty[$. Posons $\forall t \in ]0,+\infty[$, $u(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v(t) = -e^{-t}$.

$u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$ et, $\forall t \in ]0,+\infty[$, $u'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$ et $v'(t) = e^{-t}$. Ceci justifie l'intégration par parties qui suit.

$$\int_z^A \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \left[\frac{1}{t}(-e^{-t})\right]_z^A - \int_z^A \left(-\frac{1}{t^2}\right)(-e^{-t})\,dt = -\frac{1}{A}e^{-A} + \frac{1}{z}e^{-z} - \int_z^A \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt.$$

$\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{e^{-A}}{A} = 0$ et $\displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge. Alors 1) $\displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$ converge

2) $\displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \frac{1}{z}e^{-z} - \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt.$

$\dfrac{z}{e^{-z}} J(z) = 1 - \dfrac{z}{e^{-z}} \displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt.$ Montrons que $\displaystyle\lim_{z \to +\infty} \left( \frac{z}{e^{-z}} \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \right) = 0.$

$\forall B \in ]z,+\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{z}{e^{-z}} \displaystyle\int_z^B \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \leqslant \frac{z}{e^{-z}} \frac{1}{z^2} \int_z^B e^{-t}\,dt = \frac{1}{z} e^{z} \left[-e^{-t}\right]_z^B = \frac{1}{z} e^{z}(e^{-z} - e^{-B}) \leqslant \frac{1}{z} e^{z} e^{-z} = \frac{1}{z}.$

En faisant tendre $B$ vers $+\infty$ il vient $0 \leqslant \dfrac{z}{e^{-z}} \displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{z}$ et ceci pour tout $z$ dans $]0,+\infty[$.

Comme $\displaystyle\lim_{z \to +\infty} \frac{1}{z} = 0$ il vient par encadrement : $\displaystyle\lim_{z \to +\infty} \left( \frac{z}{e^{-z}} \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \right) = 0.$

Alors $\displaystyle\lim_{z \to +\infty} \frac{z}{e^{-z}} J(z) = 1$. Donc $\displaystyle\lim_{z \to +\infty} \frac{J(z)}{\frac{e^{-z}}{z}} = 1$. $\quad J(z) \underset{z \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^{-z}}{z}.$