HEC 2009 S1

Sujet S 1 - Exercice

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$. On considère la variable aléatoire T définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ par :

$$T = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \,/\, S_n \geqslant 1\}.$$

1) Question de cours : Densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes à densité définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

2) On admet dans cette question que : $\mathbb{P}([S_n < 1]) = \dfrac{1}{n!}$ pour $n \geqslant 2$.

- **a)** Que vaut $\mathbb{P}([T = 1])$?
- **b)** Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'événement $[T = n]$ en fonction des événements $[S_n \geqslant 1]$ et $[S_{n-1} < 1]$.
- **c)** En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la valeur de $\mathbb{P}([T = n])$.
- **d)** Établir l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(T)$; calculer $\mathbb{E}(T)$.

3) **a)** Déterminer une densité de la variable aléatoire S_2.

(*) → **b)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une densité f_{S_n} de la variable aléatoire S_n est donnée par :

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n}{j} (x-j)^{n-1} & \text{si } \ x \in [k-1, k], (1 \leqslant k \leqslant n) \\ 0 & \text{si } \ x \notin [0, n] \end{cases}$$

c) En déduire que $\mathbb{P}([S_n < 1]) = \dfrac{1}{n!}$.

Sujet S 1 - Exercice sans préparation

Soit $(E, <.,.>)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$. Soit f et g deux endomorphismes de E symétriques et ayant des valeurs propres strictement positives.

(**) **1)** Prouver qu'il existe un endomorphisme ϕ de E ayant des valeurs propres positives tel que $f = \phi^2$ (ϕ^2 désigne $\phi \circ \phi$).

2) Montrer que :

$$\operatorname{Ker}(f+g) = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g.$$

(*) On peut se contenter de montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, S_n possède une densité f_n qui vérifie $\forall x \in]-\infty, 0[$, $f_n(x) = 0$ et $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$. C'est suffisant et beaucoup moins difficile que Q 3 b.

(**) Il est préférable de dire "Prouver qu'il existe un endomorphisme symétrique ..."

(Q1) X et Y sont deux variables aléatoires à densités sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes.
f (resp. g) est une densité de X (resp. Y).

* Si $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points :

1) $X+Y$ est une variable aléatoire à densité
2) h en est une densité.

<u>Remarque</u>.. Si x est dans $\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt$ sont de même nature et en cas d'existence elles sont égales.

* Si f est bornée ou si g est bornée :

1) $X+Y$ est une variable aléatoire à densité
2) $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$ en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

(Q2) a) $P(T=1) = P(S_1 \geqslant 1) = P(U_1 \geqslant 1) = 0$ car $U_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

b) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$.

$\{T=n\} = \{S_1<1\} \cap \{S_2<1\} \cap \dots \cap \{S_{n-1}<1\} \cap \{S_n \geqslant 1\}$

Or $\forall k \in [\![1, n-2]\!]$, $\{S_{n-1}<1\} \subset \{S_{n-2}<1\} \subset \dots \subset \{S_1<1\}$

car les variables aléatoires U_i prennent leurs valeurs dans $[0,1]$.

donc $\underline{\underline{\{T=n\} = \{S_{n-1}<1\} \cap \{S_n \geqslant 1\}}}$.

c) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$

$\{S_{n-1}<1\} = \{S_{n-1}<1\} \cap \{S_n<1\} \cup \{S_{n-1}<1\} \cap \{S_n \geqslant 1\}$.

par incompatibilité $P(S_{n-1}<1) = P(\{S_{n-1}<1\} \cap \{S_n<1\}) + P(\{S_{n-1}<1\} \cap \{S_n \geqslant 1\})$.

$P(S_{n-1}<1) = P(S_n<1) + P(\{S_{n-1}<1\} \cap \{S_n \geqslant 1\}) = P(S_n<1) + P(T=n)$.

$\{S_n<1\} \subset \{S_{n-1}<1\}$

Alors $P(T=n) = P(S_{n-1} < 1) - P(S_n < 1) = \dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{n!}$.

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $P(T=n) = \dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{n!}$. Notons que ceci vaut aussi pour $n=1$!

d) $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $n P(T=n) = n\left(\dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{n!}\right) = \dfrac{n(n-1)}{n!} = \dfrac{1}{(n-2)!}$.

La série de terme général $\dfrac{1}{(n-2)!}$ converge donc la série de terme général $n P(T=n)$ converge. Comme elle est à termes positifs elle est absolument convergente. Alors T possède une espérance.

$$E(T) = \sum_{n=2}^{+\infty} n P(T=n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e \qquad \underline{E(T) = e}.$$

$\uparrow P(T=1)=0$

Q3 a) • U_1 et U_2 sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes

• Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f est une densité de U_1 et de U_2 et f est bornée.

Alors 1) $S_2 = U_1 + U_2$ est une variable aléatoire à densité.

2) $h_2 : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x-t)\, dt$ en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $h_2(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x-t)\, dt = \int_0^1 f(x-t)\, dt \underset{u=x-t}{=} -\int_x^{x-1} f(u)\, du = \int_{x-1}^{x} f(u)\, du$.

1) $x \in]-\infty, 0[$. f est nulle sur $[x-1, x]$. $h_2(x) = 0$

2) $x \in]2, +\infty[$. f est nulle sur $[x-1, x]$. $h_2(x) = 0$

3) $x \in [0, 1]$. f est nulle sur $[x-1, 0[$ et vaut 1 sur $[0, x]$

$$h_2(x) = \int_0^x 1\, du = x.$$

4) $x \in]1, 2]$. f est nulle sur $]1, x]$ et vaut 1 sur $[x-1, 1]$.

$$h_2(x) = \int_{x-1}^{1} 1\, du = 1 - (x-1) = 2 - x.$$

La fonction h_2 définie par $\forall x\in\mathbb{R},\ h_2(x)=\begin{cases} x \text{ si } x\in[0,1]\\ 2-x \text{ si } x\in]1,2] \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$ est une densité de S_2

▼ <u>Remarque</u>.. $\forall x\in\mathbb{R},\ h_2(x)=\begin{cases} x \text{ si } x\in[0,1]\\ 2-x \text{ si } x\in[1,2] \\ 0 \text{ si } x\notin[0,2]\end{cases}$. Notons que h_2 est continue sur $\mathbb{R}$. ▲

b) Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi_n(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\sum_{j=0}^{\ell-1}(-1)^j\binom{n}{j}(x-j)^{n-1} \text{ si } x\in[\ell-1,\ell] \quad (1\leq \ell\leq n)\\ 0 \quad \text{si } x\notin[0,n]\end{cases}$

▼ <u>Remarque</u>. Supposons $n\in[\![2,+\infty[\![$. Notons que la définition de φ_n est cohérente. Soit $\ell\in[\![1,n-1]\!]$. $\varphi_n(\ell)$ a "deux" valeurs : celle de l'intervalle $[\ell-1,\ell]$ qui est $\dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\sum_{j=0}^{\ell-1}(-1)^j\binom{n}{j}(\ell-j)^{n-1}$ et celle de l'intervalle $[\ell,\ell+1]$ qui est $\dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\sum_{j=0}^{\ell}(-1)^j\binom{n}{j}(\ell-j)^{n-1}$. Or le dernier terme de la seconde somme vaut 0 donc les "deux" valeurs de $\varphi_n(\ell)$ sont les mêmes. ▲

Nous allons montrer par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, S_n est une variable aléatoire à densité admettant φ_n pour densité.

* $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi_1(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(1-1)!}\displaystyle\sum_{j=0}^{0}(-1)^j\binom{1}{j}(x-j)^{1-1} \text{ si } x\in[0,1]\\ 0 \quad \text{si } x\notin[0,1]\end{cases}$

$\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi_1(x)=\begin{cases} 1 \text{ si } x\in[0,1]\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$. Plus de doute $S_1=U_1$ est une variable aléatoire à densité et φ_1 en est une densité. La propriété est vraie pour $n=1$.

<u>Exercice</u>.. Notons qu'elle est vraie pour $n=2$ (aisé avec §3 a) !).

* Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$S_{n+1} = S_n + U_{n+1}$

- S_n est une variable aléatoire à densité de densité φ_n.
- U_{n+1} est une variable aléatoire à densité de densité f et f est bornée.
- $U_1, U_2, \dots, U_n, U_{n+1}$ sont indépendantes donc $U_1 + \dots + U_n$ et U_{n+1} sont indépendantes

Ainsi S_n et U_{n+1} sont indépendantes.

<u>dans ces conditions</u> | 1) S_{n+1} est une variable aléatoire à densité.
$h_{n+1} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} (t)\,(x-t)dt$ en est une densité définie

sur $\mathbb{R}$.

Il ne reste plus qu'à calculer h_{n+1}...

Soit $x \in \mathbb{R}$. $h_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi_n(x-t)dt = \int_0^1 \varphi_n(x-t)dt \underset{u=x-t}{=} \int_x^{x-1} \varphi_n(u)(-du) = \int_{x-1}^{x} \varphi_n(u)du.$

<u>1er cas</u>.. $x \in]-\infty, 0[$. Alors φ_n est nulle sur $[x-1, x]$ donc $h_{n+1}(x) = 0 = \varphi_{n+1}(x)$.

<u>2ème cas</u>.. $x \in]n+1, +\infty[$. Alors φ_n est nulle sur $[x-1, x]$ car $x-1 > n$. Ainsi $h_{n+1}(x) = 0 = \varphi_{n+1}(x)$.

<u>3ème cas</u>.. $x \in [0, n+1]$. Alors il existe un entier k appartenant à $[\![1, n+1]\!]$ tel que

$x \in [k-1, k]$.

<u>i) $k=1$</u>. $x \in [0,1]$. Alors $h_{n+1}(x) = \int_{x-1}^{x} \varphi_n(u)du \overset{\varphi_n \text{ est nulle sur }]-\infty,0[}{=} \int_0^x \varphi_n(u)du.$

Or si $u \in [0,x]$, $u \in [0,1]$ donc $\varphi_n(u) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{1-1}(-1)^j\binom{n}{j}(u-j)^{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}u^{n-1}$

donc $h_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(u)du = \int_0^x \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}du = \left[\frac{u^n}{n!}\right]_0^x = \frac{x^n}{n!}$.

Mais comme $x \in [0,1]$, $\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1-1)!}\sum_{j=0}^{1-1}(-1)^j\binom{n+1}{j}(x-j)^{(n+1)-1} = \frac{1}{n!}x^n$. $h_{n+1}(x) = \varphi_{n+1}(x)$.

ii) $k \in [\![2, n]\!]$. $x \in [k-1, k]$ donc $x-1 \in [k-2, k-1]$.

Alors $h_{n+1}(x) = \int_{x-1}^{x} \varphi_n(u)\,du = \int_{x-1}^{k-1} \varphi_n(u)\,du + \int_{k-1}^{x} \varphi_n(u)\,du$.

$$h_{n+1}(x) = \int_{x-1}^{k-1} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \binom{n}{j} (u-j)^{n-1}\,du + \int_{k-1}^{x} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n}{j} (u-j)^{n-1}\,du.$$

$$h_{n+1}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \binom{n}{j} \left[\frac{(u-j)^n}{n}\right]_{x-1}^{k-1} + \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n}{j} \left[\frac{(u-j)^n}{n}\right]_{k-1}^{x}$$

$$\text{Alors } h_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \binom{n}{j} (k-1-j)^n - \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \binom{n}{j} (x-1-j)^n + \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n}{j} (x-j)^n \underline{\underline{-}}$$

$$\frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n}{j} (k-1-j)^n.$$

Remarque que le dernier terme de la dernière somme est nulle ; elle est donc égale à la première somme. Ainsi ces deux sommes "s'éliminent". En faisant un petit changement d'indice dans la deuxième somme il vient :

$$h_{n+1}(x) = \frac{-1}{n!} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-1} \binom{n}{j-1} (x-j)^n + \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n}{j} (x-j)^n.$$

Premier terme de la seconde somme

$$h_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \left[\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}\right] (x-j)^n + \frac{1}{n!} (-1)^0 \binom{n}{0} (x-0)^n.$$

$$h_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \binom{n+1}{j} (x-j)^n + \frac{1}{n!} x^n = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n+1}{j} (x-j)^n = \varphi_{n+1}(x).$$

$x \in [k-1, k]$

iii) $k = n+1$ $x \in [n, n+1]$ et $x-1 \in [n-1, n]$. φ_n est nulle sur $]n, x]$.

Ainsi $h_{n+1}(x) = \int_{x-1}^{x} \varphi_n(u)\,du = \int_{x-1}^{n} \varphi_n(u)\,du \underline{\underline{=}} \int_{x-1}^{n} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} (u-j)^{n-1}\,du.$

$$h_{n+1}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} \left[\frac{(u-j)^n}{n}\right]_{x-1}^{n} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} \left[(n-j)^n - (x-1-j)^n\right]$$

$h_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^n - \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} (x-1-j)^n$. Effectuons les changements d'indice $j \leftarrow n-j$ dans la première somme et $j \leftarrow j-1$ dans la seconde en remarquant que $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$

$$h_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}j^n - \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{n}{j-1}(x-j)^n.$$

Rappelons que $\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n+1}{j}(x-j)^n$ car $x\in[n,n+1]$.

Alors $\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}x^n + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\left[\binom{n}{j}+\binom{n}{j-1}\right](x-j)^n$.

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}x^n + \underbrace{\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(x-j)^n} - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{n}{j-1}(x-j)^n.$$

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(x-j)^n - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{n}{j-1}(x-j)^n.$$

Alors $h_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}j^n + \varphi_{n+1}(x) - \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(x-j)^n$.

Posons $\varphi = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(X-j)^n$ et $T = \varphi(0) - \varphi$.

$$\varphi(0) = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(-j)^n \underset{(-1)^j=(-1)^{-j}}{=} \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}j^n = \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}j^n.$$

Ainsi $h_{n+1}(x) = \varphi_{n+1}(x) + \varphi(0) - \varphi(x) = \varphi_{n+1}(x) + T(x)$.

Nous allons montrer que T est le polynôme nul. Le coefficient constant de φ est $\varphi(0)$. Donc le coefficient constant de T est nul. Notons t_i le coefficient de X^i dans T et ceci pour tout $i\in[\![0,n]\!]$. $t_0=0$. Soit $i\in[\![1,n]\!]$.

$$T = \varphi(0) - \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(X-j)^n.$$

Alors $t_n = -\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\times 1 = -\frac{1}{n!}(1-1)^n = 0$. $t_n=0$.

$$\forall i\in[\![1,n-1]\!],\quad t_i = -\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{n}{i}(-j)^{n-i} = -\frac{1}{n!}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}j^{n-i}.$$

$$\forall i\in[\![1,n-1]\!],\ t_i=0 \iff \forall i\in[\![1,n-1]\!],\ \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}j^{n-i}=0$$

$$\forall i\in[\![1,n-1]\!],\ t_i=0 \underset{i\leftarrow n-i}{\iff} \forall i\in[\![1,n-1]\!],\ \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}j^{i}=0.$$

notons que $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} j^i = 0$

Version 1 Version "savante". Le nombre de surjections d'un ensemble de i éléments dans un ensemble de n éléments est $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^i$. Prenons i dans $[\![1, n-1]\!]$. Le nombre de surjections d'un ensemble de i éléments dans un ensemble de n éléments est 0 car $i < n$. Ainsi $0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^i = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{-j} j^i \underset{(-1)^{-j} = (-1)^j}{=} (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j j^i$.

Alors $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j j^i = 0$, ceci pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$.

Version 2.. A la main ! Nous allons montrer par récurrence sur i que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \ \forall n' \in [\![i+1, +\infty[\![, \ \sum_{j=0}^{n'} (-1)^j \binom{n'}{j} j^i = 0$$ ce qui redonnera le résultat.

- $i = 1$. Soit $n' \in [\![i+1, +\infty[\![$. $n' \in [\![2, +\infty[\![$.

$$\sum_{j=0}^{n'} (-1)^j \binom{n'}{j} j^i = \sum_{j=1}^{n'} (-1)^j \binom{n'}{j} j = \sum_{j=1}^{n'} (-1)^j \underbrace{\frac{n'}{j} \binom{n'-1}{j-1}}_{\binom{n'}{j}} j = n' \sum_{j=1}^{n'} (-1)^j \binom{n'-1}{j-1}.$$

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n'}{j} j^i \underset{j \leftarrow j+1}{=} n' \sum_{j=0}^{n'-1} (-1)^{j+1} \binom{n'-1}{j} = -n' \sum_{j=0}^{n'-1} (-1)^j \binom{n'-1}{j} = -n' (-1+1)^{n'-1} \underset{n' \geq 2}{=} 0.$$

La propriété est donc vraie pour $i = 1$.

- Supposons la propriété vraie pour un élément i de $\mathbb{N}^*$ et montrons-la pour $i+1$.

Par hypothèse $\forall n' \in [\![i+1, +\infty[\![$, $\sum_{j=0}^{n'} (-1)^j \binom{n'}{j} j^i = 0$. On veut montrer que $\forall n' \in [\![i+2, +\infty[\![$, $\sum_{j=0}^{n'} (-1)^j \binom{n'}{j} j^{i+1} = 0$. Soit $n' \in [\![i+2, +\infty[\![$.

$$\sum_{j=0}^{n'} (-1)^j \binom{n'}{j} j^{i+1} = \sum_{j=1}^{n'} (-1)^j j \binom{n'}{j} j^i = \sum_{j=1}^{n'} (-1)^j n' \binom{n'-1}{j-1} j^i.$$

$\binom{n'}{j} = \frac{n'}{j} \binom{n'-1}{j-1}$ si $j \in [\![1, n']\!]$.

R.

$$\sum_{j=0}^{n'}(-1)^j\binom{n'}{j}j^{i+1}=n'\sum_{j=1}^{n'-1}(-1)^j\left[\binom{n'}{j}-\binom{n'-1}{j}\right]j^i+n'(-1)^{n'}n'^i \quad \text{car } \binom{n'-1}{j-1}=\binom{n'}{j}-\binom{n'-1}{j} \text{ pour } j\in[\![1,n'-1]\!]$$

$$\sum_{j=0}^{n'}(-1)^j\binom{n'}{j}j^{i+1}=n'\sum_{j=1}^{n'-1}(-1)^j\binom{n'}{j}j^i-n'\sum_{j=1}^{n'-1}(-1)^j\binom{n'-1}{j}j^i+n'(-1)^{n'}n'^i.$$

$$\sum_{j=0}^{n'}(-1)^j\binom{n'}{j}j^{i+1}=n'\sum_{j=0}^{n'}(-1)^j\binom{n'}{j}j^i-n'\sum_{j=0}^{n'-1}(-1)^j\binom{n'-1}{j}j^i.$$

le terme "$j=0$" sauté.

[on regroupe la première somme et le dernier terme

$n'\geq i+2$ donc $n'\geq i+1$ et $n'-1\geq i+1$. En appliquant la propriété à l'ordre i pour n' et $n'-1$ on a : $\sum_{j=0}^{n'}(-1)^j\binom{n'}{j}j^i=\sum_{j=0}^{n'-1}(-1)^j\binom{n'-1}{j}j^i=0$.

Ainsi $\sum_{j=0}^{n'}(-1)^j\binom{n'}{j}j^{i+1}=0$. Ceci achève la récurrence.

Ainsi $\forall i\in\mathbb{N}^*$, $\forall n'\in[\![i+1,+\infty[\![$, $\sum_{j=0}^{n'}(-1)^j\binom{n'}{j}j^i=0$. donc $\forall i\in[\![1,n-1]\!]$, $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}j^i=0$

Reprenons alors notre route. Nous avons montré que $t_0=t_n=0$. De plus : $\forall i\in[\![1,n-1]\!]$, $t_i=0$ d'après tout ce qui précède alors $T=0_{\mathbb{R}[X]}$.

Donc $h_{n+1}(x)=\varphi_{n+1}(x)+T(x)=\varphi_{n+1}(x)$.

Ce qui achève de montrer que si $x\in[n,n+1]$, $h_{n+1}(x)=\varphi_{n+1}(x)$.

cela achève aussi de montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $h_{n+1}(x)=\varphi_{n+1}(x)$.

Alors $h_{n+1}=\varphi_{n+1}$. Ceci achève la récurrence commencée p. 3 !!

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, S_n est une variable aléatoire à densité et φ_n en est une densité.

Donc pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, S_n est une variable aléatoire à densité et la fonction f_{S_n} définie par $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_{S_n}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{n}{j}(x-j)^{n-1} & \text{si } x\in[k-1,k]\ (1\leq k\leq n)\\ 0 & \text{si } x\notin[0,n]\end{cases}$ en est une densité.

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $P(S_n<1)=\int_{-\infty}^{1} f_{S_n}(x)\,dx=\int_0^1 f_{S_n}(x)\,dx=\int_0^1 \frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{0}(-1)^j\binom{n}{j}(x-j)^{n-1}\,dx$.

$P(S_n<1)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 x^{n-1}\,dx=\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1=\frac{1}{n!}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(S_n<1)=\frac{1}{n!}$.

<u>Remarques</u> 1.. On avait juste besoin de f_{S_n} sur $]-\infty,1]$. Donc on aurait pu se contenter de montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, S_n est une variable aléatoire à densité qui possède une densité f_{S_n} qui vérifie $\forall x\in]-\infty,0[,\ f_{S_n}(x)=0$ et $\forall x\in[0,1],\ f_{S_n}(x)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$. C'est très simple à faire ... par récurrence.

2.. Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $U'_n=1-U_n$ et $S'_n=\sum_{k=1}^{n}U'_k$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S'_n=\sum_{k=1}^{n}(1-U_k)=n-S_n$.
$(U'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est encore une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Ainsi soit $n\in\mathbb{N}^*$ S'_n a même loi que S_n. Or $S'_n=n-S_n$.

Donc f_{S_n} et $x\mapsto f_{S_n}(n-x)$ sont deux densités de S_n. Or comme nous l'avons aperçu f_{S_n} est continue sur $[0,n]$. Alors $x\mapsto f_{S_n}(n-x)$ est continue sur $[0,n]$.

Donc f_{S_n} et $x\mapsto f_{S_n}(n-x)$ sont deux densités continues sur $[0,n]$ de S_n.

Alors $\forall x\in[0,n],\ f_{S_n}(x)=f_{S_n}(n-x)$.

En particulier $\forall x\in[n-1,n],\ f_{S_n}(x)=f_{S_n}(n-x)\underset{n-x\in[0,1]}{=}\frac{1}{(n-1)!}(n-x)^{n-1}$.

Cette remarque constitue sans doute une piste intéressante pour rendre plus simple le point iii) de la récurrence ...

R..

Question 1 HEC 2009-1

Soit $(E, <.,.>)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$. Soit f et g deux endomorphismes de E symétriques et ayant des valeurs propres strictement positives.

Q1. Prouver qu'il existe un endomorphisme ϕ de E ayant sdes valeurs propres positives tel que $f = \phi^2$ (ϕ^2 désigne $\phi \circ \phi$).

Q2. Montrer que $\operatorname{Ker}(f+g) = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$.

On traitera le cas général où les valeurs propres de f et de g sont des réels positifs ou nuls. On ajoutera ϕ symétrique !

Q1 f est un endomorphisme symétrique de E donc f est diagonalisable. Ainsi il existe une base orthonormée $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$.

$\mathrm{Sp} f=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$. Alors $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\alpha_k \geqslant 0$. Soit ϕ l'endomorphisme de E défini par $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\phi(e_k)=\sqrt{\alpha_k}\,e_k$. $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\phi^2(e_k)=(\sqrt{\alpha_k})^2 e_k=\alpha_k e_k=f(e_k)$.

Ainsi ϕ^2 et f sont deux endomorphismes de E qui coïncident sur la base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$.

Alors $\phi^2=f$. La matrice de ϕ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est une matrice diagonale donc symétrique. Alors ϕ est symétrique.

$\mathrm{Sp}\,\phi=\mathrm{Sp}\,M_{\mathcal{B}}(\phi)=\mathrm{Sp}\,\mathrm{Diag}(\sqrt{\alpha_1},\sqrt{\alpha_2},\dots,\sqrt{\alpha_n})$. Ainsi les valeurs propres de ϕ sont positives.

<u>Il existe un endomorphisme symétrique ϕ de E ayant des valeurs propres positives tel que $\phi^2=f$.</u>

<u>Remarque</u>.. De même il existe un endomorphisme symétrique ψ de E ayant des valeurs propres positives tel que $\psi^2=g$.

Q2 Soit $x\in E$.

- Supposons que $x\in \operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Ker} g$. $f(x)=g(x)=0_E$. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=0_E$. $x\in\operatorname{Ker}(f+g)$.
- Réciproquement supposons que $x\in\operatorname{Ker}(f+g)$. $f(x)+g(x)=0_E$. $f(x)=-g(x)$.

$$\|\phi(x)\|^2=\langle\phi(x),\phi(x)\rangle \underset{\uparrow\ \phi \text{ est symétrique}}{=} \langle x,\phi^2(x)\rangle=\langle x,f(x)\rangle=-\langle x,g(x)\rangle=-\langle x,\psi^2(x)\rangle \underset{\uparrow\ \psi \text{ est symétrique}}{=} -\langle\psi(x),\psi(x)\rangle=-\|\psi(x)\|^2$$

$0\leqslant\|\phi(x)\|^2=-\|\psi(x)\|^2\leqslant 0$. $\|\phi(x)\|^2=\|\psi(x)\|^2=0$. $\|\phi(x)\|=\|\psi(x)\|=0$. $\phi(x)=\psi(x)=0_E$.

Alors $f(x) = \varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x)) = \varphi(0_E) = 0_E$ et $g(x) = \psi^2(x) = \psi(\psi(x)) = \psi(0_E) = 0_E$.

donc $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$.

Finalement $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$. et ceci pour tout x dans E.

donc $\underline{\underline{\operatorname{Ker}(f \cap g) = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g}}$.

Exercice montrer l'unicité de ϕ (ϕ symétrique à valeurs propres positives tel que $\phi^2 = f \dots$).