HEC 2009 S 3

1) Question de cours : Donner la définition et les principales propriétés d'une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On admettra que si f est convexe sur I et $(x, y, z) \in \mathrm{I}^3$, alors

$$f\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z\right) \leqslant \frac{1}{3}f(x)+\frac{1}{3}f(y)+\frac{1}{3}f(z).$$

2) Soient a, b et c trois réels strictement positifs, montrer que :

$$(abc)^{\frac{1}{3}} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$$

En déduire que :

$$(abc)^{\frac{1}{3}} \geqslant \frac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$$

en posant $(a', b', c') = (1/a, 1/b, 1/c)$,

---

3) Soient a_0, b_0 et c_0 trois réels strictement positifs. On définit par récurrence les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ et $(c_n)_{n\geqslant 0}$ par les relations suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n+c_n}{3} \\ b_{n+1} = (a_n b_n c_n)^{\frac{1}{3}} \\ c_{n+1} = \dfrac{3}{\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{c_n}} \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les réels a_n, b_n et c_n sont bien définis et $0 < c_n \leqslant b_n \leqslant a_n$.

b) Montrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(c_n)_{n\geqslant 0}$ sont monotones et que les trois suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ et $(c_n)_{n\geqslant 0}$ sont convergentes. On note λ, μ et ν leurs limites respectives.

c) Montrer que $\lambda = \mu = \nu$. $n \geqslant 1$

d) On cherche maintenant à montrer que la suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est toujours monotone.

i) Soient x, y et z trois réels, tels que $0 < x < y < z$. On note :

$$\begin{cases} s = x+y+z \\ d = xy+xz+yz \\ p = xyz \end{cases}$$

Montrer que $ps^3 - d^3$ est du signe de $xz - y^2$.
(on pourra remarquer que $ps^3 - d^3 = -(yz-x^2)(zx-y^2)(xy-z^2)$).

ii) En appliquant le résultat précédent à a_1, b_1 et c_1, montrer que $b_3 - b_2$ est du signe de $b_2 - b_1$. Conclure.

Sujet S 3 - Exercice sans préparation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ une famille de n variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω, indépendantes et de même loi.
On définit la variable aléatoire :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i.$$

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'espérance $\mathbb{E}(e^{x\mathrm{S}_n})$ existe et $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}([\mathrm{S}_n \geqslant a]) \leqslant e^{-ax}\,\mathbb{E}(e^{x\mathrm{S}_n})$.

2) Appliquer ce résultat au cas où chaque X_i suit la loi définie par :

$$\mathbb{P}([\mathrm{X}_i = 1]) = p,\ \ \mathbb{P}([\mathrm{X}_i = -1]) = 1-p.$$

Q1 I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est une application de I dans $\mathbb{R}$.

- f convexe sur I

$\Updownarrow$ $\forall (x,y)\in I^2, \forall \lambda\in[0,1], f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

$\Updownarrow$ $\forall a\in I, x\mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I-\{a\}$

- On suppose que f est dérivable sur I

f convexe sur I

$\Updownarrow$ f' est croissante sur I

$\Updownarrow$

$\forall (a,x)\in I^2, f(x)\geq (x-a)f'(a)+f(a)$.

- On suppose que f est deux fois dérivable sur I

f convexe sur I

$\Updownarrow$ $\forall x\in I, f''(x)\geq 0$

Q2 * Posons $g=-\ln$. g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, g''(x)=\dfrac{1}{x^2}\geq 0$.

g est donc convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $\forall (a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3, g\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)\leq \dfrac{g(a)+g(b)+g(c)}{3}$.

$\forall (a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3, \ln\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)\geq \dfrac{\ln a+\ln b+\ln c}{3}=\ln\sqrt[3]{abc}$.

voir à la fin une preuve qui n'utilise pas $g\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\leq\frac{g(a)+g(b)+g(c)}{3}$

donc $\forall (a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3, \quad \dfrac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$.

Soit $(a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$. Alors $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$ donc $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{1}{a}\frac{1}{b}\frac{1}{c}}>0$

donc $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\geq\dfrac{1}{\sqrt[3]{abc}}>0$. Alors $\sqrt[3]{abc}\geq\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$

$$\forall (a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3,\quad \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\leq\sqrt[3]{abc}\leq\frac{a+b+c}{3}$$

Exercice -- Généraliser.

Q3 a) Montrons par récurrence que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, a_n, b_n, c_n sont définis et strictement positifs.

- c'est clair pour $n=0$.
- Supposons que la propriété est vraie pour n dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

a_n, b_n, c_n sont définis et strictement positifs.

Alors $\dfrac{3}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}}$, $\sqrt[3]{a_n b_n c_n}$ et $\dfrac{a_n+b_n+c_n}{3}$ sont définis et strictement positifs.

Ainsi a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} sont définis et strictement positifs. Ceci achève la récurrence.

<u>Pour tout n dans $\mathbb{N}$, a_n, b_n et c_n sont définis et strictement positifs.</u>

Alors d'après Q2 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \dfrac{3}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}} \leq \sqrt[3]{a_n b_n c_n} \leq \dfrac{a_n+b_n+c_n}{3}$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq c_{n+1} \leq b_{n+1} \leq a_{n+1}$ ou $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < c_n < b_n < a_n$.

<u>Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, les réels a_n, b_n et c_n sont bien définis et $0 < c_n \leq b_n \leq a_n$.</u>

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(a_n+b_n+c_n) - a_n = \frac{1}{3}\underbrace{(b_n-a_n)}_{\leq 0} + \frac{1}{3}\underbrace{(c_n-a_n)}_{\leq 0} \leq 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} \leq a_n$. <u>$(a_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante</u> et minorée par 0 ; elle est donc convergente.

Alors <u>$(a_n)_{n\geq 0}$ converge.</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $c_{n+1} - c_n = \dfrac{3}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}} - c_n = c_n \left[\dfrac{\frac{3}{c_n}}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}} - 1 \right]$.

$0 < c_n < b_n < a_n$ donc $0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{b_n} < \frac{1}{c_n}$.

Alors $0 < \frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n} \leq \frac{3}{c_n}$; $\dfrac{\frac{3}{c_n}}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}} \geq 1$ et $c_n > 0$.

Alors $c_{n+1} - c_n = c_n \left[\dfrac{\frac{3}{c_n}}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}} - 1 \right] \geq 0$; $c_{n+1} \geq c_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_{n+1} \geq c_n$. <u>$(c_n)_{n\geq 1}$ est croissante.</u>

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_n \leq a_n \leq a_1$ donc $(c_n)_{n\geq 1}$ est majorée par a_1.

↑ $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Ainsi $(c_n)_{n\geq 1}$ converge. Alors <u>$(c_n)_{n\geq 0}$ converge.</u>

$\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+b_n+c_n)$. Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $b_n=3a_{n+1}-a_n-c_n$.

Alors la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ converge comme combinaison linéaire de trois suites convergentes.

c) En passant à la limite dans les relations de récurrence il vient :

$\lambda=\frac{1}{3}(\lambda+\mu+\nu)$, $\mu=\sqrt[3]{\lambda\mu\nu}$ et $\nu=\dfrac{3}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}}$ car $\lambda\geq\mu\geq\nu>0$

($\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0<c_1\leq c_n\leq b_n\leq a_n$ donc $0<c_1\leq\nu\leq\mu\leq\lambda$ donc $\lambda\geq\mu\geq\nu>0$).

Ainsi $2\lambda=\mu+\nu$, $\mu^3=\lambda\mu\nu$, $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\nu}$.

$2\lambda=\mu+\nu$, $\mu^2=\lambda\nu$ et $\nu=\dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$.

$\mu^2=\lambda\nu=\frac{\mu+\nu}{2}\nu$; $2\mu^2=\mu\nu+\nu^2$; $0=2\mu^2-\mu\nu-\nu^2=(\mu-\nu)(2\mu+\nu)$.

Comme $2\mu+\nu>0$: $\mu=\nu$. Alors $2\lambda=\mu+\nu=2\mu$; $\lambda=\mu$.

Finalement $\lambda=\mu=\nu$.

d) i) Remarque.. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

$(a+b+c)^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3b^2c+6abc+$
$3ac^2+3bc^2+c^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc$.

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc$.

$ps^3=xyz(x+y+z)^3=xyz(x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3y^2x+3y^2z+3z^2x+3z^2y+6xyz$

$ps^3=x^4yz+xy^4z+xyz^4+3x^3y^2z+3x^3z^2y+3y^3x^2z+3y^3z^2x+3z^3x^2y+3z^3y^2x+6x^2y^2z^2$.

$d^3=(xy+yz+zx)^3=x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3+3x^2y^2yz+3x^2y^2zx+3y^2z^2xy+3y^2z^2zx+3z^2x^2xy+$

$3z^2x^2yz+6xyyzzx$.

$d^3=x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3+3x^2y^3z+3x^3y^2z+3xy^3z^2+3xy^2z^3+3x^3yz^2+3x^2yz^3+6x^2y^2z^2$.

Alors $ps^3-d^3=x^4yz+xy^4z+xyz^4-x^3y^3-y^3z^3-z^3x^3$.

$ps^3-d^3=(x^2-yz)(x^2yz-x(y^3+z^3)+y^2z^2)=(x^2-yz)(y^2-xz)(-xy+z^2)$

Ainsi $p\sigma^3 - d^3 = (x^2-yz)(y^2-xz)(z^2-xy)$.

$$p\sigma^3 - d^3 = -(yz-x^2)(xz-y^2)(xy-z^2).$$

ii) Appliquons plutôt le résultat à a_n, b_n, c_n en ayant fixé n dans $\mathbb{N}^*$

$a_n+b_n+c_n = 3a_{n+1}$. $a_n b_n c_n = b_{n+1}^3$.

$$c_{n+1} = \frac{3}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}} = \frac{3a_n b_n c_n}{a_n b_n + b_n c_n + c_n a_n} \; ; \; a_n b_n + b_n c_n + c_n a_n = \frac{3 b_{n+1}^3}{c_{n+1}}$$

Mais d'après i) : $\underbrace{b_{n+1}^3 (3a_{n+1})^3 - \left(\frac{3b_{n+1}^3}{c_{n+1}}\right)^3}_{\alpha_n} = \underbrace{-(b_n a_n - c_n^2)(a_n c_n - b_n^2)(b_n c_n - a_n^2)}_{\beta_n}$.

$x \leftarrow c_n$
$y \leftarrow b_n$
$z \leftarrow a_n$

$$\alpha_n = \frac{27}{c_{n+1}^3}\left[(a_{n+1} b_{n+1} c_{n+1})^3 - b_{n+1}^9\right] = \frac{27}{c_{n+1}^3}\left[(b_{n+2}^3)^3 - b_{n+1}^9\right]$$

$\alpha_n = \frac{27}{c_{n+1}^3}(b_{n+2}^9 - b_{n+1}^9)$. α_n est du signe de $b_{n+2}^9 - b_{n+1}^9$ donc du signe de

$b_{n+2} - b_{n+1}$ car $x \mapsto x^9$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\beta_n = \underbrace{\frac{1}{b_n}}_{>0} \underbrace{(a_n b_n c_n - b_n^3)}_{= b_{n+1}^3 - b_n^3} \underbrace{(b_n a_n - c_n^2)}_{\geq 0} \underbrace{(a_n^2 - b_n c_n)}_{\geq 0} \leftarrow \text{car } 0 < c_n \leq b_n \leq a_n.$$

Distinguons deux cas.

1er cas $\beta_n \neq 0$. Alors $b_n a_n - c_n^2$ et $a_n^2 - b_n c_n$ sont strictement positifs donc

β_n est du signe de $b_{n+1}^3 - b_n^3$ donc du signe de $b_{n+1} - b_n$.

comme $\alpha_n = \beta_n$: $b_{n+2} - b_{n+1}$ est du signe de $b_{n+1} - b_n$.

2e cas. $\beta_n = 0$. Ainsi $\alpha_n = 0$ donc $b_{n+2} = b_{n+1}$.

Alors $b_{n+2} - b_{n+1} = 0$. On peut encore dire que

$b_{n+2} - b_{n+1}$ est du signe de $b_{n+1} - b_n$.

Donc pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $b_{n+2} - b_{n+1}$ est du signe de $b_{n+1} - b_n$.

Alors $(b_{n+1} - b_n)_{n \geq 1}$ est de signe constant.

Ainsi $(b_n)_{n \geq 1}$ est toujours monotone.

Remarque.. $(b_n)_{n \geq 0}$ n'est pas toujours monotone. Pour $a_0 = 1$, $b_0 = 5$ et $c_0 = 1$

On a $b_1 \simeq 1{,}71$ et $b_2 = 1{,}76$ donc $b_0 > b_1$ et $b_1 < b_2$.

Retour sur Q2 $\quad g = -\ln$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) \geq g'(1)(x-1) + g(1)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $-\ln x \geq -(x-1) + 0$; $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x \leq x - 1$.

Posons $S = \dfrac{a+b+c}{3}$. $\quad \ln \dfrac{a}{S} \leq \dfrac{a}{S} - 1$, $\ln \dfrac{b}{S} \leq \dfrac{b}{S} - 1$, $\ln \dfrac{c}{S} \leq \dfrac{c}{S} - 1$.

Alors $\ln \dfrac{a}{S} + \ln \dfrac{b}{S} + \ln \dfrac{c}{S} \leq \dfrac{a+b+c}{S} - 3 = \dfrac{3S}{S} - 3 = 0$

Donc $\ln\left(\dfrac{abc}{S^3}\right) \leq 0$; $\dfrac{abc}{S^3} \leq 1$ et $S^3 > 0$. $\quad abc \leq S^3$.

Alors $\sqrt[3]{abc} \leq \sqrt[3]{S^3} = S$. $\quad \sqrt[3]{abc} \leq \dfrac{a+b+c}{3}$.

Question 3 **HEC 2009-3**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ une famille de n variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω, indépendantes et de même loi .

On définit la variable aléatoire : $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Q1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'espérance $E(e^{xS_n})$ existe et $\forall a \in \mathbb{R}$, $P([S_n \geqslant a]) \leqslant e^{-ax} E(e^{xS_n})$.

Q2. Appliquer ce résultat au cas où chaque X_i suit la loi définie par : $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = -1) = 1 - p$.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons que $E(e^{xS_n})$ existe. Soit $a \in \mathbb{R}$.

$[S_n \geqslant a] = [xS_n \geqslant ax] = [e^{xS_n} \geqslant e^{ax}]$.

e^{xS_n} possède une espérance, prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $e^{ax} \in \mathbb{R}_+^*$

l'inégalité de Markov donne : $P(S_n \geqslant a) = P(e^{xS_n} \geqslant e^{ax}) \leqslant \dfrac{E(e^{xS_n})}{e^{ax}}$.

$\underline{P(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-ax} E(e^{xS_n})}$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. e^{xS_n} est une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs donc $E(e^{xS_n})$ existe.

$E(e^{xS_n}) = E(e^{xX_1} e^{xX_2} \dots e^{xX_n}) \underset{\text{indépendance}}{=} E(e^{xX_1}) E(e^{xX_2}) \dots E(e^{xX_n})$.

$E(e^{xX_i}) = e^{-x}(1-p) + e^{x} p$ (théorème du transfert). $E(e^{xS_n}) = ((1-p)e^{-x} + pe^{x})^n$

Soit $a \in \mathbb{R}$. $\underline{P(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-ax} \left((1-p)e^{-x} + pe^{x}\right)^n}$.

R