HEC 2009 S4

Sujet S 4 - Exercice

Si $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$, on pose $M(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$.

On note F le sous-ensemble de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ constitué des matrices $M(a)$ quand a parcourt $\mathbb{R}^4$.

On note $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n.

a) Question de cours : Rappeler la définition du sous-espace vectoriel engendré par une famille $(x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs de E. Dans quel cas la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est-elle une base de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$?

b) Soient E_1 de base $(x_1, \dots, x_p)$ et E_2 de base $(y_1, \dots, y_q)$ deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ est libre. Qu'en déduit-on sur $p + q$?

2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et en donner la dimension.

3) Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Pour $i \in [[1,4]]$, on pose $M_i = M(e_i)$. Montrer que $\forall i \in [[1,4]]$, la matrice $M_i + J$ est inversible et que la famille $(M_i + J)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ est libre.

4) Soit $a \in \mathbb{R}^4$. Montrer que si pour tout réel θ non nul, la matrice $M(a) + \theta J$ est non inversible, alors $a = (0, 0, 0, 0)$.

5) Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ qui ne contient aucune matrice inversible et tel que $J \in G$.

a) Déterminer $G \cap F$ et en déduire que la dimension de G est inférieure ou égale à 12.

b) Existe-t-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ de dimension 12 ne contenant aucune matrice inversible et contenant J ?

Sujet S 4 - Exercice sans préparation

Pour n entier naturel non nul, soit X_n une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0, 1[$.

1) Montrer que pour $a > 0$ fixé, $\mathbb{P}([X_n \leqslant a])$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2) Montrer que si $b > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > b\right]\right) \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} \min(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})$$

Qu'en déduit-on pour $\mathbb{P}([|X_n - np| \leqslant nb])$ quand n tend vers $+\infty$?

(Q1) a) $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_1, x_2, \dots, x_p)$.

Si $u \in E$: $u \in \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p) \Longleftrightarrow \exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p,\ u = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k$.

$(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est une base de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p)$ si et seulement si cette famille est libre.

b) Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ et soit $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q) \in \mathbb{K}^q$ tels que :

$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k + \sum_{k=1}^{q} \beta_k y_k = 0_E$. Alors $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k = - \sum_{k=1}^{q} \beta_k y_k$.

Or $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k \in E_1$, $- \sum_{k=1}^{q} \beta_k y_k \in E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

donc $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k = 0_E$ et $- \sum_{k=1}^{q} \beta_k y_k = 0_E$. Les familles $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_q)$ étant libres on a : $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_q = 0$.

ceci achève de montrer que $(x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_q)$ est libre.

$(x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_q)$ est une famille libre de cardinal $p+q$ de E.

Alors $p+q \leq \dim E$. Donc $\underline{p+q \leq n}$.

(Q2) * $F \subset \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

* $0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})} = M(0_{\mathbb{R}^4}) \in F$ donc F n'est pas vide.

* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient M et N deux éléments de F.

$\exists a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$, $M = M(a)$ et $\exists b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$, $N = M(b)$.

$$\lambda M + N = \lambda M(a) + M(b) = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda M + N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda a_1 + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda a_2 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda a_3 + b_3 \\ \lambda a_1 + b_1 & \lambda a_2 + b_2 & \lambda a_3 + b_3 & \lambda a_4 + b_4 \end{pmatrix}.$$

Posons $c = (\lambda a_1 + b_1, \lambda a_2 + b_2, \lambda a_3 + b_3, \lambda a_4 + b_4)$. $c \in \mathbb{R}^4$ et $\lambda M + N = M(c)$.

donc $\lambda M + N \in F$. ceci achève de montrer que $\underline{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$

Soit $M \in M_4(\mathbb{R})$

$M \in F \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^4,\ M = M(a) \Leftrightarrow \exists (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4,\ M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$

$$M \in F \Leftrightarrow \exists (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4, \quad M = a_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M \in F \Leftrightarrow \exists (a_1, a_2, a_3, a_4),\ M = a_1 M_1 + a_2 M_2 + a_3 M_3 + a_4 M_4.$

$\underline{F = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3, M_4).}$ (M_1, M_2, M_3, M_4) et une famille génératrice de F.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 + \alpha_4 M_4 = 0_{M_4(\mathbb{R})}$

Alors $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = 0_{M_4(\mathbb{R})}$. donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Ainsi (M_1, M_2, M_3, M_4) et une famille libre de F.

Finalement $\underline{\underline{(M_1, M_2, M_3, M_4) \text{ et une base de } F.}}$ $\underline{\underline{\dim F = 4.}}$

Q3 * Un peu plus pour le même prix ! Soit $a=(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{R}^4$.

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Posons $N(a)=M(a)+J$.

$$N(a)X=0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&a_1\\0&1&0&a_2\\0&0&1&a_3\\a_1&a_2&a_3&a_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+a_1t=0\\y+a_2t=0\\z+a_3t=0\\a_1x+a_2y+a_3z+a_4t=0\end{cases}$$

$$N(a)X=0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-a_1t\\y=-a_2t\\z=-a_3t\\(-a_1^2-a_2^2-a_3^2+a_4)t=0\end{cases}$$

<u>1er cas</u>.. $-a_1^2-a_2^2-a_3^2+a_4\neq 0$.

Alors $N(a)X=0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\Leftrightarrow\begin{cases}t=0\\x=0\\y=0\\z=0\end{cases}\Leftrightarrow X=0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$. $N(a)$ est inversible.

<u>2ième cas</u>.. $-a_1^2-a_2^2-a_3^2+a_4=0$.

$$N(a)X=0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-a_1t\\y=-a_2t\\z=-a_3t\end{cases}.$$

Alors $\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\\1\end{pmatrix}\neq 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ et $N(a)\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\\1\end{pmatrix}=0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$; $N(a)$ n'est pas inversible.

Ainsi <u>$\forall a=(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{R}^4$: $M(a)+J$ inversible $\Leftrightarrow a_1^2+a_2^2+a_3^2=a_4$.</u>

$1^2+0^2+0^2\neq 0$, $0^2+1^2+0^2\neq 0$, $0^2+0^2+1^2\neq 0$, $0^2+0^2+0^2\neq 1$.

Ainsi les matrices $M(e_1)+J$, $M(e_2)+J$, $M(e_3)+J$ et $M(e_4)+J$ sont inversibles.

<u>Pour tout i dans $[\![1,4]\!]$, $M_i+J=M(e_i)+J$ est inversible.</u>

Soit $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\in\mathbb{R}^4$ tel que $\sum_{i=1}^{4}\alpha_i(M_i+J)=0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$.

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}.$$

La quatrième colonne de la matrice de gauche est $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$.

Alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

ceci achève de montrer que la famille $(M_i + J)_{1 \leq i \leq 4}$ est libre.

Q4 Soit $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$. Supposons que pour tout réel non nul θ la matrice $M(a) + \theta J$ est non inversible. Montrons que $a = 0_{\mathbb{R}^4}$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$. $M(a) + \theta J$ est non inversible donc $\frac{1}{\theta} M(a) + J$ est non inversible.

Alors $M(\frac{1}{\theta} a) + J$ est non inversible.

D'après ce que nous avons vu dans Q3 : $(\frac{1}{\theta} a_1)^2 + (\frac{1}{\theta} a_2)^2 + (\frac{1}{\theta} a_3)^2 = a_4$.

Finalement $\forall \theta \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{\theta^2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = a_4$.

En faisant tendre θ vers $+\infty$ il vient $a_4 = 0$.

Alors $\forall \theta \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{\theta^2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 0$. Donc $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$. Ainsi $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Finalement $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. $a = 0_{\mathbb{R}^4}$.

Si pour θ dans $\mathbb{R}^*$, $M(a) + \theta J$ est non inversible : $a = (0, 0, 0, 0)$.

Q5 a) Soit $M \in G \cap F$. $\exists a \in \mathbb{R}^4$, $M = M(a)$.

$M \in G$ et $J \in G$ donc $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $M + \theta J \in G$.

Alors pour tout θ dans $\mathbb{R}^*$ $M(a) + \theta J \in G$.

Pour tout θ dans $\mathbb{R}^*$, $M(a) + \theta J$ n'est pas inversible

D'après Q4 : $a = (0, 0, 0, 0)$. Alors $M = M(0_{\mathbb{R}^4}) = 0_{M_4(\mathbb{R})}$.

Ainsi $G \cap F = \{0_{M_4(\mathbb{R})}\}$.

Alors d'après Q1 $\dim G + \dim F \leq \dim M_4(\mathbb{R}) = 16$; $\dim G \leq 16 - \dim F = 16 - 4 = 12$.

$\dim G \leq 12$.

b) Soit G l'ensemble des matrices de $M_4(\mathbb{R})$ de quatrième colonne nulle.
Soit $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq 4\\ 1\leq j\leq 4}}$ la base canonique de $M_4(\mathbb{R})$.

G est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq 4\\ 1\leq j\leq 3}}$.

Alors G est un sous-espace vectoriel de $M_4(\mathbb{R})$ et $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq 4\\ 1\leq j\leq 3}}$ en est une famille génératrice. Or cette famille est libre comme sous-famille de la base $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq 4\\ 1\leq j\leq 4}}$. Donc $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq 4\\ 1\leq j\leq 3}}$ est une base de G.

Alors <u>G est un sous-espace vectoriel de $M_4(\mathbb{R})$ de dimension 12.</u>

$J=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ donc <u>$J\in G$</u>

<u>Les matrices de G ne sont pas inversibles</u> car leur quatrième colonne est nulle.

Donc <u>il existe un sous-espace vectoriel de $M_4(\mathbb{R})$ de dimension 12 ne contenant aucune matrice inversible et contenant J.</u>

R.

Question 4 **HEC 2009-4**

Pour n entier naturel non nul, soit X_n une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0,1[$.

Q1. Montrer que pour $a > 0$ fixé, $P([X_n \leqslant a])$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Q2. Montrer que si $b > 0$,

$$P\left(\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > b\right]\right) \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} \operatorname{Min}(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})$$

Qu'en déduit-on pour $P([|X_n - np| \leqslant nb])$ quand n tend vers $+\infty$?

Q1 Posons $n_0 = \text{Ent}(a)$. Soit $n \in [\![\max(1, n_0), +\infty[\![$.

$$P(X_n \leqslant a) = \sum_{k=0}^{n_0} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Soit $k \in [\![1, n_0]\!]$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \underset{n \mapsto +\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}$. Ceci vaut encore pour $k=0$ car $\binom{n}{0} = 1$ et $\dfrac{n^0}{0!} = 1$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Alors $\forall k \in [\![0, n_0]\!]$, $\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \underset{n \mapsto +\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!} p^k q^{n-k} = \dfrac{p^k}{q^k k!} (n^k q^n)$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (n^k q^n) = 0$ par croissance comparée car $|q| = q < 1$.

Alors pour tout k dans $[\![0, n_0]\!]$, $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left[\binom{n}{k} p^k q^{n-k}\right] = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} P(X_n \leqslant a) = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left[\sum_{k=0}^{n_0} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\right] = 0$.

Pour tout réel a strictement positif : $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} P(X_n \leqslant a) = 0$.

Q2 $b \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

<u>1^{er} Cas</u>.. $b\sqrt{n} \leqslant \sqrt{p(1-p)}$. $\text{Min}(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}) = b\sqrt{n}$.

Alors $\underset{\underset{b\sqrt{n}>0}{\uparrow}}{1 \leqslant} \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{b\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} b\sqrt{n} = \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} \text{Min}(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})$.

Or $P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\geq b\right)\leq 1$. Donc $P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\geq b\right)\leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2n}\min\left(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\right)$

2ème cas.. $b\sqrt{n}>\sqrt{p(1-p)}$. Alors $\min\left(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\right)=\sqrt{p(1-p)}$

$E(X_n)$ (resp. $V(X_n)$) existe et vaut np (resp. $np(1-p)$).

Alors $E\left(\frac{X_n}{n}\right)$ existe et vaut p. $V\left(\frac{X_n}{n}\right)$ existe et vaut $\frac{1}{n^2}np(1-p)$ ou $\frac{p(1-p)}{n}$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors :

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\geq b\right)=P\left(\left|\frac{X_n}{n}-E\left(\frac{X_n}{n}\right)\right|\geq b\right)\leq \frac{V\left(\frac{X_n}{n}\right)}{b^2}=\frac{p(1-p)}{b^2n}=\frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2n}\times\sqrt{p(1-p)}.$$

donc $P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\geq b\right)\leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2n}\min\left(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\right)$

Ainsi pour tout réel b strictement positif $P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\geq b\right)\leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2n}\min\left(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\right)$.

Soit $b\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\geq b\right)\leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2n}\min\left(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\right)$.

$\lim_{n\to+\infty} b\sqrt{n}=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty}\min\left(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\right)=\sqrt{p(1-p)}$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2n}=0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2n}\min\left(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\right)\right)=0$. Par encadrement il vient $\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\geq b\right)=0$.

Par conséquent $\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<b\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\geq b\right)\right)=1-0=1$.

donc $\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|X_n-np\right|<b\right)=1$.