HEC 2009 S5

Sujet S 5 - Exercice

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p ($p \in]0,1[$).

On pose $q = 1 - p$, $U = X_1 + X_2$ et $T = X_1 - X_2$.

1) Question de cours : Définition et propriétés de la loi géométrique.
2) Déterminer la loi de U.
3) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
   a) Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant l'événement $[U = n]$.
   b) Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X_1 / U = n)$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_1)$.
4) Déterminer la loi de T.
5) **a)** Calculer **Cov**(U, T).
   b) Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

Sujet S 5 - Exercice sans préparation

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ ayant comme matrice u dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1) On pose $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,-1,1,1)$, $v_3 = (1,0,1,0)$. Calculer $f(v_i)$ pour tout $i \in [[1, 3]]$.
2) Montrer que M est diagonalisable et déterminer une matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à une base de vecteurs propres de M contenant le plus possible de 0, les autres termes étant $+1$ ou -1.
3) Déterminer M^2, puis M^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4) Déterminer à l'aide de P, la matrice des projecteurs de $\mathbb{R}^4$ sur chacun des sous-espaces propres de M.

(Q1) $p \in]0,1[$. X suit la loi géométrique de paramètre p si

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = pq^{k-1}$ où $q = 1-p$.
$E(X)$ existe et vaut $\frac{1}{p}$. $V(X)$ existe et vaut $\frac{q}{p^2}$.

(Q2) $U(\Omega) = [\![2,+\infty[\![$. Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. $(\{X_1 = k\})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne :

$$P(U=n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{X_1=k\} \cap \{U=n\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{X_1=k\} \cap \{X_1+X_2=n\}).$$

$$P(U=n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{X_1=k\} \cap \{X_2=n-k\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1=k)\,P(X_2=n-k).$$

X_1 et X_2 sont indépendantes.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_1=k) = pq^{k-1}$ et $P(X_2=n-k) = \begin{cases} pq^{n-k-1} & \text{si } n-k \geq 1 \text{ ou si } k \leq n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors $P(U=n) = \sum_{k=1}^{n-1} pq^{k-1}pq^{n-k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} p^2q^{n-2} = (n-1)p^2q^{n-2}$.

$U(\Omega) = [\![2,+\infty[\![$ et $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $P(U=n) = (n-1)p^2q^{n-2}$.

U suit la loi de Pascal de paramètre 2 et p

(Q3) a) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P_{\{U=n\}}(X_1=k) = \dfrac{P(\{X_1=k\} \cap \{U=n\})}{P(U=n)} = \dfrac{P(\{X_1=k\} \cap \{U=n\})}{(n-1)p^2q^{n-2}}$.

Nous avons vu dans Q2 que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(\{X_1=k\} \cap \{U=n\}) = \begin{cases} p^2q^{n-2} & \text{si } k \leq n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P_{\{U=n\}}(X_1=k) = \begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{si } k \leq n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors pour tout n dans $[\![2,+\infty[\![$, la loi conditionnelle de X_1 sachant que $\{U=n\}$ est la loi uniforme sur $[\![1, n-1]\!]$.

b] Alors d'après a] pour tout n dans $[\![2,+\infty[\![$, $E(X_1 \mid U=n)$ existe et vaut $\frac{1+(n-1)}{2}$.

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ E(X_1\mid U=n)=\frac{n}{2}.$

Notons que $|X_1|=X_1$. Alors $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $E(|X_1|\mid U=n)=E(X_1\mid U=n)=\frac{n}{2}$

1°) $(\{U=n\})_{n\geqslant 2}$ est un système complet d'événements.

2°) $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $P(U=n)\neq 0$

3°) Pour tout n dans $[\![2,+\infty[\![$, $E(|X_1|\mid U=n)$ existe.

4°) $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $E(|X_1|\mid U=n)\,P(U=n)=\frac{n}{2}(n-1)p^2q^{n-2}=\frac{p^2}{2}n(n-1)q^{n-2}$.

$|q|<1$ donc la série de terme général $n(n-1)q^{n-2}$ converge. De plus

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2}=\frac{2}{(1-q)^3}=\frac{2}{p^3}.$$

Alors la série de terme général $E(|X_1|\mid U=n)\,P(U=n)$ converge.

D'après le théorème des espérances conditionnelles ceci achève de montrer que :

$E(X_1)$ existe et vaut : $\sum_{n=2}^{+\infty}E(X_1\mid U=n)P(U=n)$

Donc $E(X_1)=\sum_{n=2}^{+\infty}E(X_1\mid U=n)P(U=n)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{p^2}{2}n(n-1)q^{n-2}=\frac{p^2}{2}\times\frac{2}{p^3}=\frac{1}{p}$.

Ainsi $E(X_1)$ existe et vaut $\frac{1}{p}$. Inouï !

Q4 $T(\Omega)=\mathbb{Z}$. Soit $n\in\mathbb{Z}$. $(\{X_1=k\})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.

La formule des probabilités totales donne :

$$P(T=n)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(\{T=n\}\cap\{X_1=k\})=\sum_{k=1}^{+\infty}P(\{X_1-X_2=n\}\cap\{X_1=k\}).$$

$$P(T=n)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(\{X_1=k\}\cap\{X_2=k-n\})=\sum_{k=1}^{+\infty}P(X_1=k)P(X_2=k-n).$$

X_1 et X_2 sont indépendantes

$\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $P(X_1=\ell)=pq^{\ell-1}$ et $P(X_2=\ell-n)=\begin{cases} pq^{\ell-n-1} & \text{si } \ell-n\geq 1 \text{ ou } \ell\geq n+1 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

$$P(T=n)=\sum_{\ell=\max(1,n+1)}^{+\infty} pq^{\ell-1}pq^{\ell-n-1}=p^2q^{-n-2}\sum_{\ell=\max(1,n+1)}^{+\infty}(q^2)^{\ell}.$$

$$P(T=n)\underset{i=\ell-\max(1,n+1)}{=}p^2q^{-n-2}\sum_{i=0}^{+\infty}(q^2)^{i+\max(1,n+1)}=p^2q^{-n-2}(q^2)^{\max(1,n+1)}\frac{1}{1-q^2}.$$

$$P(T=n)\underset{1-q^2=(1-q)(1+q)=p(1+q)}{=}p^2q^{2\max(1,n+1)-n-2}\frac{1}{p(1+q)}=\frac{p\,q^{2\max(1,n+1)-n-2}}{1+q}$$

<u>1^ecas</u>.. $n\geq 0$. $\max(1,n+1)=n+1$. $P(T=n)=\dfrac{p\,q^{2(n+1)-n-2}}{1+q}=\dfrac{pq^n}{1+q}=\dfrac{pq^{|n|}}{1+q}$.

<u>2^{ième} cas</u>.. $n<0$. $\max(1,n+1)=1$. $P(T=n)=\dfrac{pq^{2-(n-2)}}{1+q}=\dfrac{pq^{-n}}{1+q}=\dfrac{pq^{|n|}}{1+q}$.

Finalement $\forall n\in\mathbb{Z}$, $P(T=n)=\dfrac{pq^{|n|}}{1+q}$.

Q5 a) X_1 et X_2 possèdent un moment d'ordre 2 donc X_1+X_2 et X_1-X_2 possèdent un moment d'ordre 2.

Alors U et T possèdent un moment d'ordre 2 et ainsi $\mathrm{cov}(U,T)$ existe.

de plus $\mathrm{cov}(U,T)=\mathrm{cov}(X_1+X_2,X_1-X_2)\underset{\text{bilinéarité de la covariance}}{=}\mathrm{cov}(X_1,X_1)-\underbrace{\mathrm{cov}(X_1,X_2)}_{=0}+\underbrace{\mathrm{cov}(X_2,X_1)}_{=0}-\mathrm{cov}(X_2,X_2)$

$\mathrm{cov}(U,T)=V(X_1)-V(X_2)=0$ ($X_1\hookrightarrow\mathcal{G}(p)$ et $X_2\hookrightarrow\mathcal{G}(p)$).

X_1 et X_2 sont indépendantes

$\mathrm{cov}(U,T)=0$.

b) $P(\{U=3\}\cap\{T=0\})=P(\{X_1+X_2=3\}\cap\{X_1=X_2\})=P(\{X_1=\frac{3}{2}\}\cap\{X_2=\frac{3}{2}\})=0$.

$X_1(\Omega)=X_2(\Omega)=\mathbb{N}^*$

$P(U=3)=2p^2q\neq 0$ et $P(T=0)=\frac{p}{1+q}\neq 0$; $P(U=3)P(T=0)\neq 0$.

donc $P(\{U=3\}\cap\{T=0\})\neq P(U=3)P(T=0)$.

Alors <u>U et T ne sont pas indépendantes</u> et pourtant $\mathrm{cov}(U,T)=0$...

R.

Question 5 HEC 2009-5

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ ayant comme matrice u dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Q1. On pose $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,-1,1,1)$, $v_3 = (1,0,1,0)$. Calculer $f(v_i)$ pour tout $i \in [\![1,3]\!]$.

Q2. Montrer que M est diagonalisable et déterminer une matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à une base de vecteurs propres de M contenant le plus possible de 0, les autres termes étant $+1$ ou -1.

Q3. Déterminer M^2, puis M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Q4. Déterminer à l'aide de P, la matrice des projecteurs de $\mathbb{R}^4$ sur chacun des sous-espaces propres de M.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1. $f(v_1) = 2v_1$, $f(v_2) = 2v_2$, $f(v_3) = 2v_3$.

Q2. M est symétrique à coefficients réels donc **M est diagonalisable**.

D'après Q1 $2 \in Sp\, M$ et $\dim SE(M,2) \geqslant 3$ (v_1, v_2, v_3 est clairement libre).

Alors il existe un réel α tel que M soit semblable à $\mathrm{Diag}(2,2,2,\alpha)$.

$4 = \mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Diag}(2,2,2,\alpha)) = 6 + \alpha$; $\alpha = -2$.

Donc $\dim SE(M,2) \geqslant 3$, $\dim SE(M,-2) \geqslant 1$.

Nécessairement M ne peut avoir d'autres valeurs propres que -2 et 2.

De plus $\dim SE(M,-2) = 1$ et $\dim SE(M,2)$.

$M_{4,1}(\mathbb{R}) = SE(M,-2) \oplus SE(M,2)$ et $SE(M,-2)$ et $SE(M,2)$ sont orthogonaux. Alors $SE(M,-2) = (SE(M,2))^{\perp}$.

$B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille d'éléments de $SE(M,2)$ qui est libre.

B_1 est une base de $SE(M,2)$ car $\dim SE(M,2) = 3$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{R})$. $X \in SE(M,-2) \Leftrightarrow X$ orthogonal à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$X \in SE(M,-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z + t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -x \\ 0 = x + x - x + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -x \\ t = -x \end{cases}$$

$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $SE(M,-2)$.

Alors $\mathcal{B} = "\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2"$ est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M respectivement associés aux valeurs propres $2, 2, 2$ et -2.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$, P est inversible et $P^{-1}MP = \mathrm{Diag}(2,2,2,-2)$.

(Q3) * $M^2 = 4I_4$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^{2n} = 4^n I_4$ et $M^{2n+1} = 4^n M$.

(Q4) Posons $v_4 = (1,-1,-1,-1)$. Notons $\hat{\mathcal{B}}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\hat{\mathcal{B}}$ la base (v_1, v_2, v_3, v_4) de $\mathbb{R}^4$ (base, ok?). P est la matrice de passage de $\hat{\mathcal{B}}_0$ à $\hat{\mathcal{B}}$.

Soit p_1 (resp. p_2) la projection orthogonale sur $SEP(M,2)$ (resp. $SEP(M,-2)$).

$$M_{\hat{\mathcal{B}}}(p_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_{\hat{\mathcal{B}}}(p_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

** Alors $M_{\mathcal{B}}(p_1) = P\,\mathrm{Diag}(1,1,1,0)\,P^{-1}$ et $M_{\mathcal{B}}(p_2) = P\,\mathrm{Diag}(0,0,0,1)\,P^{-1}$.

* Peut s'obtenir directement aussi avec $M^2 = P(\mathrm{Diag}(2,2,2,-2))^2 P^{-1}$.

** $$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad M_{\hat{\mathcal{B}}}(p_1) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \quad M_{\hat{\mathcal{B}}}(p_2) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$