HEC 2009 S 6

Sujet S 6 - Exercice

1) Question de cours : Définition de la convergence absolue d'une série numérique. Lien entre convergence et convergence absolue.

2) **a)** Justifier pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}}{\sqrt{\pi t}(1+e^{-2t})^p}\,dt$.

On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{I}_{k,p} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}}{\sqrt{\pi t}(1+e^{-2t})^p}\,dt$$

b) Calculer $\mathrm{I}_{k,0}$ en fonction de k (on pourra utiliser le changement de variable $u = \sqrt{2kt}$, après l'avoir justifié).

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{I}_{n,1}$

3) **a)** Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer la somme $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}}$ en fonction de $\mathrm{I}_{2n+3,1}$ et $\mathrm{I}_{1,1}$.

b) En déduire que la série de terme général $u_j = \dfrac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}}$ est convergente. Exprimer sa somme S en fonction de $\mathrm{I}_{1,1}$.

4) Montrer que : $0 < \mathrm{S} < 1$.

* **Sujet S 6 - Exercice sans préparation**

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Soit $n \geqslant 1$ et $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n)$ un n-échantillon indépendant, identiquement distribué de la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On suppose λ inconnu et on cherche à l'estimer par un intervalle de confiance.

On pose :

$$\overline{\mathrm{X}}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_i \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{\mathrm{X}}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

A l'aide de T_n, déterminer, pour n grand, un intervalle de confiance de λ au risque α donné.

* QS déjà vue à l'oral ESCP 2007

Question qui figure également dans le sujet 10 de l'oral HEC 2010.

HEC 2009 S6 Correction de l'exercice

Q1 Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de réels.

* la série de terme général u_n est absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ converge.
* si la série de terme général u_n est absolument convergente elle est convergente.
* si la série de terme général u_n est absolument convergente : $\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$.

Q2 a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in \mathbb{N}$. $f_{k,p} : t \mapsto \dfrac{e^{-kt}}{\sqrt{\pi t}(1+e^{-2t})^p}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

* 1) $f_{k,p}(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \dfrac{1}{2^p} \dfrac{1}{t^{1/2}}$

2) $\forall t \in]0,1]$, $f_{k,p}(t) \geq 0$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2^p} \frac{1}{t^{1/2}} dt$ converge puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^{1/2}}$ converge $(1/2 < 1)$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_0^1 f_{k,p}(t)dt$ converge.

---

* $t^2 f_{k,p}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^2 \dfrac{e^{-kt}}{\sqrt{\pi t}} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \dfrac{t^{3/2}}{e^{kt}} = \dfrac{1}{k^{3/2}\sqrt{\pi}} \times \dfrac{(kt)^{3/2}}{e^{kt}}$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{(kt)^{3/2}}{e^{kt}} = 0$ par croissance

comparée. Alors 1) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \left[t^2 f_{k,p}(t)\right] = 0$ donc $f_{k,p}(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

2) $\forall t \in [1,+\infty[$, $f_{k,p}(t) \geq 0$ et $\frac{1}{t^2} \geq 0$

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge $(2>1)$

les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_{k,t}(t)dt$ converge.

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{k,t}(t)\,dt$ converge. Ainsi :

Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout p dans $\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}}{\sqrt{\pi t}(1+e^{-2t})^p} dt$ converge.

b) Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $A \in \mathbb{R}_+^*$. $t \mapsto \sqrt{2\ell t}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ ce qui justifie le changement de variable $u=\sqrt{2\ell t}$ dans ce qui suit.

$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-\ell t}}{\sqrt{\pi t}}\,dt \underset{\uparrow}{=} \int_{\sqrt{2\ell\varepsilon}}^{\sqrt{2\ell A}} e^{-u^2/2}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{2\ell}}{u}\,\frac{u}{\ell}\,du = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\ell}}\int_{\sqrt{2\ell\varepsilon}}^{\sqrt{2\ell A}} e^{-u^2/2}\,du.\ (*)$$

$$\begin{cases} u=\sqrt{2\ell t} \\ t=u^2/2\ell \\ dt=(u/\ell)\,du \end{cases}$$

Le cours de probabilité indique que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du$ converge et vaut 1.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$. Par parité $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du$ converge et vaut $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

Alors $\lim_{\varepsilon\to 0} \sqrt{2\ell\varepsilon}=0$, $\lim_{A\to+\infty}\sqrt{2\ell A}=+\infty$, $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\ell t}}{\sqrt{\pi t}}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du$ convergent.

En faisant tendre ε vers 0 puis A vers $+\infty$ dans $(*)$ il vient :

$$I_{\ell,0}=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\ell t}}{\sqrt{\pi t}}\,dt=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\ell}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\ell}}\times\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\frac{1}{\sqrt{\ell}}.$$

$$\forall \ell\in\mathbb{N}^*,\quad I_{\ell,0}=\frac{1}{\sqrt{\ell}}.$$

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall t\in]0,+\infty[,\ 0\leq \frac{1}{1+e^{-2t}} \leq 1$ et $\frac{e^{-nt}}{\sqrt{\pi t}} \geq 0$

Alors $\forall t\in]0,+\infty[,\quad 0\leq \frac{e^{-nt}}{\sqrt{\pi t}\,(1+e^{-2t})} \leq \frac{e^{-nt}}{\sqrt{\pi t}}$.

$\forall t\in]0,+\infty[,\quad 0\leq f_{n,1}(t)\leq f_{n,0}(t)$. En intégrant il vient :

$0\leq I_{n,1}\leq I_{n,0}=\frac{1}{\sqrt{n}}$ et ceci pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ donc

par encadrement il vient : $\lim_{n\to+\infty} I_{n,1}=0$.

Q3 a) Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$I_{2n+3,1}+I_{2n+1,1}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,\frac{1}{1+e^{-2t}}\underbrace{\left(e^{-(2n+3)t}+e^{-(2n+1)t}\right)}_{=e^{-(2n+1)t}(e^{-2t}+1)}dt.$$

$$I_{2n+3,1}+I_{2n+1,1}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-(2n+1)t}dt=I_{2n+1,0}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ I_{2n+3,1}+I_{2n+1,1}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}}=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\left[I_{2j+3,1}+I_{2j+1,1}\right]=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j I_{2j+3,1}+\sum_{j=0}^{n}(-1)^j I_{2j+1,1}$$

$j\leftarrow j+1$

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}}=\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1}I_{2j+1,1}+\sum_{j=0}^{n}(-1)^j I_{2j+1,1}=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j I_{2j+1,1}-\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^j I_{2j+1,1}$$

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}}=I_{1,1}-(-1)^{n+1}I_{2n+3,1}.$$

Q2c)

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \left|(-1)^{n+1}I_{2n+3,1}\right|=\left|I_{2n+3,1}\right|=I_{2n+3,1}\text{ et }\lim_{n\to+\infty}I_{2n+3,1}=0$$

Alors $\lim_{n\to+\infty}\left((-1)^{n+1}I_{2n+3,1}\right)=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}}=I_{1,1}$.

Ainsi
1) la série de terme général $u_j=\frac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}}$ converge.
2) $\sum_{j=0}^{+\infty}u_j=I_{1,1}$.

Q4 $\forall t\in]0,+\infty[,\ 0<\frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}(1+e^{-2t})}=f_{1,1}(t)<\frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}=f_{1,0}(t)$.

Alors $0<I_{1,1}<I_{1,0}=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$. Donc $0<\sum_{j=0}^{+\infty}u_j<1$ ou $0<S<1$.

R.

Question 6 HEC 2009-6

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $n \geqslant 1$ et $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon indépendant, identiquement distribué de la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On suppose λ inconnu et on cherche à l'estimer par un intervalle de confiance.

On pose : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i$ et $T_n = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$.

A l'aide de T_n, déterminer, pour n grand, un intervalle de confiance de λ au risque α donné.

Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Les variables aléatoires X_k sont indépendantes, ont même loi, ont une espérance commune égale à λ et une variance commune égale à λ $(\lambda > 0)$.

Alors le théorème de la limite centrée montre que la suite de terme général

$S_n^* = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi

normale centrée réduite et dont nous noterons Φ la fonction de répartition.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(S_n^* \leqslant x) = \Phi(x)$.

$S_n^* = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$. $E(S_n) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n\lambda$.

$V(S_n) = V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = n\lambda$

$\uparrow$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes

Alors $S_n^* = \dfrac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} = \dfrac{n\overline{X}_n - n\lambda}{\sqrt{n}\sqrt{\lambda}} = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} = T_n$!

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(T_n \leqslant x) = \Phi(x)$.

Dans la suite nous supposerons n suffisamment grand pour que l'on puisse assimiler la fonction de répartition de T_n à Φ !!

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $P(|T_n| \leqslant \varepsilon) = P(-\varepsilon \leqslant T_n \leqslant \varepsilon) = \Phi(\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon) = \Phi(\varepsilon) - (1 - \Phi(\varepsilon)) = 2\Phi(\varepsilon) - 1$.

Φ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ et $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.

Alors $\forall y \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$, $\exists!\, x \in]0, +\infty[$, $\Phi(x) = y$.

$\alpha \in]0,1[$. Donc $1-\frac{\alpha}{2} \in]\frac{1}{2},1[$. Alors $\exists!\, t_\alpha \in]0,+\infty[$, $\Phi(t_\alpha) = 1-\frac{\alpha}{2}$.

Donc $2\Phi(t_\alpha)-1 = 2(1-\frac{\alpha}{2})-1 = 1-\alpha$.

Par conséquent $\underline{P(|T_n| \leq t_\alpha) = 1-\alpha}$.

$P(|T_n| \leq t_\alpha) = P(-t_\alpha \leq T_n \leq t_\alpha) = P(-t_\alpha \leq \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq t_\alpha)$.

$P(|T_n| \leq t_\alpha) = P(-\frac{t_\alpha\sqrt{\lambda}}{\sqrt{n}} \leq \overline{X}_n-\lambda \leq \frac{t_\alpha\sqrt{\lambda}}{\sqrt{n}}) = P(\lambda-\frac{t_\alpha\sqrt{\lambda}}{\sqrt{n}} \leq \overline{X}_n \leq \lambda+\frac{t_\alpha\sqrt{\lambda}}{\sqrt{n}})$.

$P(|T_n| \leq t_\alpha) = P\left((\sqrt{\lambda}-\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}})^2-\frac{t_\alpha^2}{4n} \leq \overline{X}_n \leq (\sqrt{\lambda}+\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}})^2-\frac{t_\alpha^2}{4n}\right)$ ... forme canonique du trinôme.

$P(|T_n| \leq t_\alpha) = P(\{(\sqrt{\lambda}-\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}})^2 \leq \overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}\} \cap \{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n} \leq (\sqrt{\lambda}+\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}})^2\})$.

$P(|T_n| \leq t_\alpha) = P(\{-\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}} \leq \sqrt{\lambda}-\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}}\} \cap \{\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}} \leq \sqrt{\lambda}+\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\})$.

$P(|T_n| \leq t_\alpha) = P(\{\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}-\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}} \underset{1}{\leq} \sqrt{\lambda}\} \cap \{\sqrt{\lambda} \underset{2}{\leq} \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}+\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}}\} \cap \{\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}}-\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} \underset{3}{\leq} \sqrt{\lambda}\})$

$P(|T_n| \leq \alpha) = P(|\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}-\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}}| \overset{1 \text{ et } 3}{\leq} \sqrt{\lambda} \overset{2}{\leq} \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}+\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}})$

$P(|T_n| \leq \alpha) = P\left((\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}-\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}})^2 \leq \lambda \leq (\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}+\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}})^2\right)$ et $P(|T_n| \leq \alpha) = 1-\alpha$.

Alors $\left[(\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}-\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}})^2, (\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}+\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}})^2\right]$ est un intervalle

de confiance de λ au risque α ou à la confiance $1-\alpha$.