HEC 2009 S7

**Sujet S 7 - Exercice**

1) Question de cours : Diagonalisabilité d'une matrice, d'un endomorphisme.
Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$ (en posant degré$(0) = -\infty$).

2) On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Calculer son rang, en déduire une valeur propre de M et la dimension du sous-espace propre associé. Donner une base de ce sous-espace propre.

3) On pose $P_1 = X^2 - 1$, $P_2 = X^2 - X + 1$ et $P_3 = X^2 + X + 1$. Montrer que $\mathcal{V} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de E.

On note $V_1 = \text{Vect}(P_1)$, $V_2 = \text{Vect}(P_1, P_2)$

4) On considère $f \in \mathscr{L}(E)$ de matrice M dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de E.

Donner la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{V}$. En déduire que $f^3$ est nulle, puis préciser l'ensemble des valeurs propres de $f$.

5) Montrer que $V_1$ et $V_2$ sont des sous-espaces vectoriels stables par $f$.

6) On veut trouver les sous-espaces vectoriels F stables par $f$ c'est à dire tels que $f(F) \subset F$.
   a) Montrer que E et $\{0\}$ sont stables par F.
   b) Soit D une droite vectorielle stable par $f$ et $u \in D$ un vecteur non nul. Montrer que $u$ est un vecteur propre de $f$. En déduire que $D = V_1$.
   c) Soit F un plan stable par $f$ et $v = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$ un élément de F. Montrer que $(v, f(v), f^2(v))$ est une famille liée. En déduire que $\gamma = 0$ puis que $F = V_2$.

**Sujet S 7 - Exercice sans préparation**

Un enfant a dans chacune des deux poches de son blouson, un paquet contenant N bonbons. A chaque fois qu'il veut manger un bonbon, il choisit, de manière indépendante et avec la probabilité $p$, sa poche de gauche pour un prendre un.

1) Lorsqu'il ne trouve plus de bonbons dans la poche qu'il a choisie, quelle est la probabilité pour qu'il en reste $k$ dans l'autre poche ?

2) Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de bonbon dans les deux poches simultanément ?

3) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} 2^k \binom{2N-k}{N}$

**Q1** * $A \in M_n(\mathbb{K})$ A diagonalisable

$\Updownarrow$ A est semblable à une matrice diagonale

$\Updownarrow$ Il existe une base de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A

$\Updownarrow$ $\bigoplus_{\lambda \in Sp A} SEP(A,\lambda) = M_{n,1}(\mathbb{K})$

$\Updownarrow$ $\sum_{\lambda \in Sp A} \dim SEP(A,\lambda) = n$

* $\dim_{\mathbb{K}} E = n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

f diagonalisable

$\Updownarrow$ Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f

$\Updownarrow$ Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale

$\Updownarrow$ $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp f} SEP(f,\lambda)$

$\Updownarrow$ $\dim E = \sum_{\lambda \in Sp f} \dim SEP(f,\lambda)$

**Q2** Pour tout $i \in [\![1,3]\!]$ notons $C_i$ la $i^{\text{ème}}$ colonne de M.

$\text{rg}\, M = \dim \text{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \dim \text{Vect}(C_1, C_2)$ car $C_3 = C_1$.

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha C_1 + \beta C_2 = 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}$.

$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; $\begin{cases} \beta = 0 \\ -\frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{2}\beta = 0 \\ \frac{1}{2}\alpha = 0 \end{cases}$ ; $\alpha = \beta = 0$. Alors $(C_1, C_2)$ est libre. Alors :

$\text{rg}\, M = \dim \text{Vect}(C_1, C_2) = 2$. $\underline{\underline{\text{rg}\, M = 2.}}$

Alors M n'est pas inversible donc $\underline{\underline{\text{0 est valeur propre de M.}}}$

De plus $\dim SEP(M,0) = 3 - \text{rg}\, M = 3 - 2 = 1$. $SEP(M,0)$ est une droite vectorielle.

$M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 = C_3 = M\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; $M\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Alors $SEP(M,0)$ est une droite vectorielle qui contient $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}$.

donc $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(M,0)$.

(Q3) Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3=0_E$.

$\alpha(X^2-1)+\beta(X^2-X+1)+\gamma(X^2+X+1)=0_E$

$(\alpha+\beta+\gamma)X^2+(\gamma-\beta)X-\alpha+\beta+\gamma=0_E$

Alors $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\-\alpha+\beta+\gamma=0\\\gamma-\beta=0\end{cases}$ ; $\begin{cases}\beta=\gamma\\\alpha+2\beta=0\\-\alpha+2\beta=0\end{cases}$ ; $\begin{cases}\beta=\gamma\\4\beta=0\\\alpha=2\beta\end{cases}$ ; $\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$.

Ainsi $(P_1,P_2,P_3)$ est une famille libre de cardinal 3 d'éléments de E et

E est de dimension 3.

Donc $(P_1,P_2,P_3)$ est une base de E.

(Q4) $M\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ car $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\in SEP(M,0)$ donc $f(P_1)=0_E$.

$M.\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1/4&-1/2&-1/4\\1/2&0&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ ; $f(P_2)=P_1$.

$M\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1/4&-1/2&-1/4\\1/2&0&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ ; $f(P_3)=P_2$.

La matrice $M'$ de $f$ dans $\gamma$ est : $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(*) On pouvait aussi remarquer que $Sp f=Sp M'=\{0\}$ ($M'$ triangulaire ...)

$M'^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

$M'^3=M'M'^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0_{M_3(\mathbb{R})}$. Alors $f^3=0_{\mathcal{L}(E)}$.

$X^3$ est un polynôme annulateur de $f$ et 0 est la seule racine de $X^3$.

Alors $Sp f\subset\{0\}$. Or $Sp f=Sp M$ et $0\in Sp M$ donc $0\in Sp f$.

(*) Ainsi $Sp f=\{0\}$. $SEP(M,0)=Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ donc $SEP(f,0)=Vect(1-X^2)=Vect(X^2-1)=Vect(P_1)$

Ainsi $SEP(f,0)=Vect(P_1)=V_1$.

**Q5** $f(V_1)=f(\mathrm{Vect}(P_1))=\mathrm{Vect}(f(P_1))=\mathrm{Vect}(0_E)=\{0_E\}\subset V_1$ ; $f(V_1)\subset V_1$.

$f(V_2)=f(\mathrm{Vect}(P_1,P_2))=\mathrm{Vect}(f(P_1),f(P_2))=\mathrm{Vect}(0_E,P_1)=\mathrm{Vect}(P_1)\subset\mathrm{Vect}(P_1,P_2)=V_2$ ;

donc $f(V_2)\subset V_2$.

<u>$V_1$ et $V_2$ sont stables par $f$.</u>

**Q6** <u>a)</u> • $f(E)\subset E$ donc $E$ est stable par $f$.

• $f(\{0_E\})=\{0_E\}$ donc $\{0_E\}$ est stable par $f$.

<u>b)</u> $D=\mathrm{Vect}(u)$ et $f(D)\subset D$. Alors $f(u)\in D=\mathrm{Vect}(u)$.

$\exists\lambda\in\mathbb{R}$, $f(u)=\lambda u$ et $u\neq 0_E$ donc $\lambda$ est une valeur propre de $f$ et <u>$u$ est un vecteur propre associé.</u>

Or $\mathrm{Sp} f=\{0\}$ et $SEP(f,0)=V_1$. Alors $\lambda=0$ et $u\in V_1$.

donc $D=\mathrm{Vect}(u)\subset V_1$. Comme $\dim D=1$ et $\dim V_1=1$ : <u>$D=V_1$.</u>

<u>Remarque</u>.. ce qui précède montre que <u>$V_1$ est l'unique droite vectorielle stable par $f$.</u>

<u>c)</u> $f(F)\subset F$ et $v\in F$. Alors $(v,f(v),f^2(v))$ est une famille d'éléments de $F$ de cardinal 3. Or $\dim F=2$ alors nécessairement <u>$(v,f(v),f^2(v))$ est liée.</u>

$v=\alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3$. $f(v)=\alpha.0_E+\beta P_1+\gamma P_2=\beta P_1+\gamma P_2$. $f^2(v)=\beta.0_E+\gamma P_1=\gamma P_1$.

$(\alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3,\ \beta P_1+\gamma P_2,\ \gamma P_1)$ est liée donc il existe trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que $(a,b,c)\neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $a(\alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3)+b(\beta P_1+\gamma P_2)+c\gamma P_1=0_E$.

$(a\alpha+b\beta+c\gamma)P_1+(a\beta+b\gamma)P_2+a\gamma P_3=0_E$ et $(P_1,P_2,P_3)$ est libre.

donc $\begin{cases}\alpha a+\beta b+\gamma c=0\\ a\beta+\gamma b=0\\ a\gamma=0\end{cases}$. Supposons $\gamma\neq 0$. Alors $\begin{cases}a=0\\ \gamma b=0\\ \beta b+\gamma c=0\end{cases}$.

$\begin{cases}a=0\\ b=0\\ \gamma c=0\end{cases}$. $a=b=c=0$. Ceci est impossible donc <u>$\gamma=0$.</u>

Alors $v = \alpha e_1 + \beta e_2$ ; $v \in \text{Vect}(e_1, e_2)$ ; $v \in V_2$.

Ainsi $\forall v \in F$, $v \in V_2$. Alors 1°) $F \subset V_2$ donc $\underline{\underline{F = V_2}}$.
2°) $\dim F = 2 = \dim V_2$

Si $F$ est un plan stable par $f$, $F = V_2$. Or $V_2$ est un plan stable par $f$.

donc <u>$V_2$ est l'unique plan de $E$ stable par $f$.</u>

d) Notons qu'un sous-espace vectoriel de $E$ est soit $\{0_E\}$, soit $E$, soit une droite vectorielle, soit un plan vectoriel. Ce qui précède montre que :

<u>les sous-espaces vectoriels de $E$ stables par $f$ sont $\{0_E\}$, $V_1$, $V_2$ et $E$.</u>

R.



## Question 7 HEC 2009-7

Un enfant a dans chacune des deux poches de son blouson, un paquet contenant $N$ bonbons. A chaque fois qu'il veut manger un bonbon, il choisit, de manière indépendante et avec la probabilité $p$, sa poche de gauche pour un prendre un.

Q1. Lorsqu'il ne trouve plus de bonbons dans la poche qu'il a choisie, quelle est la probabilité pour qu'il en reste $k$ dans l'autre poche ?

Q2. Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de bonbon dans les deux poches simultanément ?

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} 2^k \binom{2N-k}{N}$.

*Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.*

Q1 On note $p_k$ la probabilité cherchée et $A_k$ l'événement correspondant.

Si $k \notin [\![0,N]\!]$, $p_k = 0$. Supposons $k \in [\![0,N]\!]$.

$A_k$ se réalise ssi ou l'enfant fait $N+1$ tirages dans la poche droite, $N-k$ dans la gauche, le dernier tirage se faisant dans la droite.

ou l'enfant fait $N+1$ tirage dans la poche gauche, $N-k$ dans la droite, le dernier tirage se faisant dans la gauche.

Notons $D_i$ (resp. $G_i$) l'événement le $i$ème tirage se fait dans la poche droite (resp. gauche) et $X_i$ la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'enfant tire dans la poche droite au cours des $i$ premiers tirages. $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(i, \frac{1}{2})$

$p_k = P(A_k) = P(\{X_{2N-k} = N\} \cap D_{2N+1-k}) + P(\{X_{2N-k} = N-k\} \cap G_{2N+1-k})$.

$p_k = P(X_{2N-k} = N)\, P_{(X_{2N-k}=N)}(D_{2N+1-k}) + P(X_{2N-k} = N-k)\, P_{(X_{2N-k}=N-k)}(G_{2N+1-k})$.

$p_k = \binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k} \times \frac{1}{2} + \binom{2N-k}{N-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}\frac{1}{2} = \binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}$.

$\binom{2N-k}{N-k} = \binom{2N-k}{N}$

$p_k = \binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}$.

Q2 La probabilité pour que les deux poches soient vides est $p_0 = \binom{2N}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N}$.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{N} p_k = 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} 2^k \binom{2N-k}{N} = 2^{2N}$

R