HEC 2009 S 8

Sujet S 8 - Exercice

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1) Question de cours : Rappeler la définition de la convergence en probabilité. Démontrer qu'une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, suivant des lois de Poisson de paramètres θ_n, tels que $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = 0$, converge en probabilité vers 0.

2) On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2}(x+1)^2 & \text{si} \quad -1 < x \leqslant 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Démontrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) On note f la fonction dérivée de F et, pour tout nombre réel θ, f_θ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\theta(x) = f(x-\theta) \quad .$$

Vérifier que f_θ est une densité de probabilité.

c) Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, admettant f_θ pour densité. Montrer que X possède une espérance et une variance et les calculer.

3) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, de même loi, admettant pour densité f_θ.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $U_n = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $V_n = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Exprimer, à l'aide de F, θ et n, les fonctions de répartition de U_n et V_n.

b) Justifier, pour tout $\epsilon \in]0,1[$, l'inégalité :

$$\mathbb{P}([-1+\theta \leqslant U_n < -1+\theta+2\epsilon] \cap [1+\theta-2\epsilon < V_n \leqslant 1+\theta]) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{U_n+V_n}{2} - \theta\right| < \epsilon\right]\right).$$

c) En déduire que $\dfrac{U_n+V_n}{2}$ est un estimateur convergent de θ.

d) Est-il sans biais ?

Sujet S 8 - Exercice sans préparation

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle déterminée par $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}$.

1) Etudier la monotonie et la limite éventuelle de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n^2 = 2n + x_0^2 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2}$.

3) En déduire un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.
On pourra admettre que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

Q1 • Soit $(X_n)_{n\geq n_0}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

La suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité si l'une des quatre assertions équivalentes suivantes est vérifiée.

$$\text{i) } \forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \lim_{n\to+\infty} P(|X_n-X|\geq \varepsilon)=0$$

$$\text{ii) } \forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \lim_{n\to+\infty} P(|X_n-X|> \varepsilon)=0$$

$$\text{iii) } \forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \lim_{n\to+\infty} P(|X_n-X|< \varepsilon)=1$$

$$\text{iv) } \forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \lim_{n\to+\infty} P(|X_n-X|\leq \varepsilon)=1$$

• Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(|Y_n-0|\leq\varepsilon)\overset{Y_n(\Omega)=\mathbb{N}}{=}P(Y_n\leq\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\text{Ent}(\varepsilon)}P(Y_n=k)=\sum_{k=0}^{\text{Ent}(\varepsilon)}\frac{\theta_n^k}{k!}e^{-\theta_n}$.

$\lim_{n\to+\infty} e^{-\theta_n}=1$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\theta_n^k}{k!}=\begin{cases}1 & \text{si } k=0\\ 0 & \text{si } k>0\end{cases}$

donc $\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n-0|\leq\varepsilon)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{\text{Ent}(\varepsilon)}\frac{\theta_n^k}{k!}e^{-\theta_n}=1$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

<u>$(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.</u>

Q2 Notons que $\frac{1}{2}(-1+1)^2=0$, $1-\frac{1}{2}(0-1)^2=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(0+1)^2$ et $1-\frac{1}{2}(1-1)^2=1$.

Alors on peut écrire que $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\,]-\infty,-1]\\ \frac{1}{2}(x+1)^2 & \text{si } x\in[-1,0]\\ 1-\frac{1}{2}(x-1)^2 & \text{si } x\in[0,1]\\ 1 & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}$

$u:x\mapsto 0$, $v:x\mapsto\frac{1}{2}(x+1)^2$, $w:x\mapsto 1-\frac{1}{2}(x-1)^2$ et $\ell:x\mapsto 1$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus $\forall x\in\mathbb{R}$, $u'(x)=\ell'(x)=0$, $v'(x)=x+1$ et $w'(x)=-(x-1)$.

En particulier $u'(-1)=0$, $v'(-1)=0$, $v'(0)=1$, $w'(0)=1$, $w'(1)=0$, $\ell'(1)=0$.

Ainsi F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty,-1]$, $[-1,0]$, $[0,1]$ et $[1,+\infty[$.

Alors 1) F est continue sur $\mathbb{R}$

2) F' est dérivable et de dérivée continue sur $\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$

3) F est dérivable à droite et à gauche en $-1,0,1$.

4) $F'_g(-1)=u'(-1)=0$, $F'_d(-1)=v'(-1)=0$, $F'_g(0)=v'(0)=1$, $F'_d(0)=w'(0)=1$,

$F'_g(1)=w'(1)=0$ et $F'_d(1)=\ell'(1)=0$.

$F'_g(-1)=F'_d(-1)=0$, $F'_g(0)=F'_d(0)=1$, $F'_g(1)=F'_d(1)=0$.

Alors F est dérivable en -1, 0 et 1. De plus $F'(-1)=0$, $F'(0)=1$ et $F'(1)=0$.

$\forall x\in]-\infty,-1[$, $F'(x)=u'(x)=0$; mieux $\forall x\in]-\infty,0]$, $F'(x)=0$.

$\forall x\in]-1,0[$, $F'(x)=v'(x)=x+1$; mieux $\forall x\in[-1,0]$, $F'(x)=x+1=1-|x|$

$\forall x\in]0,1[$, $F'(x)=w'(x)=-(x-1)$; mieux $\forall x\in[0,1]$, $F'(x)=-(x-1)=1-|x|$

$\forall x\in]1,+\infty[$, $F'(x)=\ell'(x)=0$; mieux $\forall x\in[1,+\infty[$, $F'(x)=0$

Finalement $\forall x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=\begin{cases}1-|x| & \text{si } x\in[-1,1]\\ 0 & \text{si } x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\end{cases}$.

$x\mapsto 1-|x|$ et $x\mapsto 0$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc F' est continue sur $]-\infty,-1]$, $[-1,1]$ et $[1,+\infty[$. Ce qui suffit pour dire que F' est continue sur $\mathbb{R}$.

Ceci achève de montrer que <u>F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.</u>

<u>b)</u> $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=F'(x)=\begin{cases}1-|x| & \text{si } x\in[-1,1]\\ 0 & \end{cases}$. Soit θ un élément de $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f_\theta(x)=f(x-\theta)$.

* $\forall x\in[-1,1]$, $f(x)=1-|x|\geqslant 0$ et $\forall x\in\mathbb{R}-[-1,1]$, $f(x)=0\geqslant 0$!

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$ donc $\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ f_\theta(x) = f(x-\theta) \geqslant 0}$.

* f et $x \mapsto x-\theta$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Par composition f_θ est continue sur $\mathbb{R}$.

* $\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ existent et valent 0.

$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ existe et vaut $2\int_0^1 f(t)\,dt$ car f est continue et paire sur $[-1,1]$... et même sur $\mathbb{R}$.

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \int_0^1 2(1-|t|)\,dt = 2\int_0^1 dt - \int_0^1 2t\,dt = 2 - [t^2]_0^1 = 2-1 = 1.$$

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut 1.

Soit $A \in \mathbb{R}$. $\int_0^A f_\theta(t)\,dt = \int_0^A f(t-\theta)\,dt \underset{u=t-\theta}{=} \int_{-\theta}^{A-\theta} f(u)\,du$.

$$\int_0^A f_\theta(t)\,dt = \int_{-\theta}^{A-\theta} f(u)\,du \quad \text{et} \quad \int_A^0 f_\theta(t)\,dt = \int_{A-\theta}^{-\theta} f(u)\,du.$$

$\lim_{A\to+\infty} (A-\theta) = +\infty$, $\lim_{A\to-\infty} (A-\theta) = -\infty$, $\int_{-\theta}^{+\infty} f(u)\,du$ et $\int_{-\infty}^{-\theta} f(u)\,du$ convergent.

Alors $\int_0^{+\infty} f_\theta(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^0 f_\theta(t)\,dt$ convergent et valent $\int_{-\theta}^{+\infty} f(u)\,du$ et $\int_{-\infty}^{-\theta} f(u)\,du$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(t)\,dt$ converge et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du$ donc 1.

Ceci achève de montrer que $\underline{f_\theta \text{ est une densité de probabilité pour tout réel } \theta}$

Notons que $\underline{f \text{ est aussi une densité de probabilité}}$.

c) Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant f_θ pour densité.

Soit F_X sa fonction de répartition.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_\theta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f_\theta(t)\,dt + \int_{0}^{x} f_\theta(t)\,dt \overset{\text{chtau dans}}{=} \int_{-\infty}^{-\theta} f(u)\,du + \int_{-\theta}^{x-\theta} f(u)\,du$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x-\theta} f(u)\,du$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x+\theta)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X-\theta \leq x) = P(X \leq x+\theta) = F_X(x+\theta) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$ et f est une densité de probabilité donc $X-\theta$ est une variable aléatoire à densité de densité f.

Posons $T = X-\theta$. T est une variable aléatoire de densité f. $X = T+\theta$.

Alors $E(X)$ (resp. $V(X)$) existe si et seulement si $E(T)$ (resp. $V(T)$) existe.

En cas d'existence $E(X) = E(T)+\theta$ (resp. $V(X)=V(T)$).

$\int_{-\infty}^{-1} t f(t)\,dt$ et $\int_{1}^{+\infty} t f(t)\,dt$ existent et valent 0.

$\int_{-1}^{1} t f(t)\,dt$ existe et vaut 0 car $t \mapsto t f(t)$ est continue et impaire sur $[-1,1]$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ existe et vaut 0. $E(T)$ existe et vaut 0.

Alors <u>$E(X)$ existe et vaut θ.</u>

$\int_{-\infty}^{-1} t^2 f(t)\,dt$ et $\int_{1}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ existent et valent 0.

$\int_{-1}^{1} t^2 f(t)\,dt$ existe et vaut $2\int_{0}^{1} t^2 f(t)\,dt$ car $t \mapsto t^2 f(t)$ est continue et paire sur $[-1,1]$. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ existe et vaut $2\int_{0}^{1} t^2 f(t)\,dt$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = 2\int_{0}^{1} t^2(1-|t|)\,dt = 2\int_{0}^{1} (t^2-t^3)\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}.$$

Alors $E(T^2)$ existe et vaut $1/6$. Donc $V(T)$ existe et vaut également $1/6$ car $E(T)=0$.

Donc $V(X)$ existe et vaut $\frac{1}{6}$.

Q3 a) Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = X_n - \theta$, $\hat{U}_n = \mathrm{Inf}(T_1, T_2, \dots, T_n)$ et $\hat{V}_n = \mathrm{Sup}(T_1, T_2, \dots, T_n)$

1°/ Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, T_n est une variable aléatoire à densité de densité f et de fonction de répartition F.

2°/ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \mathrm{Inf}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \mathrm{Inf}(T_1+\theta, T_2+\theta, \dots, T_n+\theta)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \mathrm{Inf}(T_1, T_2, \dots, T_n) + \theta = \hat{U}_n + \theta$.

De même $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \hat{V}_n + \theta$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\hat{U}_n = \mathrm{Inf}(T_1, \dots, T_n)$.

$P(U_n \leq x) = 1 - P(U_n > x) = 1 - P(\hat{U}_n > x-\theta) \overset{\downarrow}{=} 1 - P(\{T_1 > x-\theta\} \cap \dots \cap \{T_n > x-\theta\})$.

Par indépendance il vient :

$P(U_n \leq x) = 1 - P(T_1 > x-\theta) \dots P(T_n > x-\theta) = 1 - (1 - P(T_1 \leq x-\theta)) \dots (1 - P(T_n \leq x-\theta))$

$P(U_n \leq x) = 1 - (1 - F(x-\theta))^n$.

$P(V_n \leq x) = P(\hat{V}_n \leq x-\theta) = P(\{T_1 \leq x-\theta\} \cap \dots \cap \{T_n \leq x-\theta\}) \overset{\text{indépendance}}{=} P(T_1 \leq x-\theta) \dots P(T_n \leq x-\theta)$

$\uparrow \hat{V}_n = \mathrm{Sup}(T_1, \dots, T_n)$.

$P(V_n \leq x) = (F(x-\theta))^n$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ notons F_{U_n} et F_{V_n} les fonctions de répartition de U_n et V_n.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{U_n}(x) = 1 - (1 - F(x-\theta))^n$ et $F_{V_n}(x) = (F(x-\theta))^n$.

R.

b) Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Soit $\omega \in \{-1+\theta \leq U_n < -1+\theta+2\varepsilon\} \cap \{1+\theta-2\varepsilon < V_n \leq 1+\theta\}$.

Alors $\begin{cases} -1+\theta \leq U_n(\omega) < -1+\theta+2\varepsilon \\ 1+\theta-2\varepsilon < V_n(\omega) \leq 1+\theta \end{cases}$

Ainsi $-1+\theta+1+\theta-2\varepsilon < U_n(\omega)+V_n(\omega) < -1+\theta+2\varepsilon+1+\theta$

Donc $\theta-\varepsilon < \left(\frac{U_n+V_n}{2}\right)(\omega) < \theta+\varepsilon$

ce qui donne : $\left|\frac{U_n+V_n}{2}(\omega)-\theta\right| < \varepsilon$ donc $\omega \in \left\{\left|\frac{U_n+V_n}{2}-\theta\right|<\varepsilon\right\}$.

donc l'événement $\{-1+\theta \leq U_n < -1+\theta+2\varepsilon\} \cap \{1+\theta-2\varepsilon < V_n \leq 1+\theta\}$ est contenu dans l'événement $\left\{\left|\frac{U_n+V_n}{2}-\theta\right|<\varepsilon\right\}$. Par croissance de P on a :

$$\underbrace{P(\{-1+\theta \leq U_n < -1+\theta+2\varepsilon\} \cap \{1+\theta-2\varepsilon < V_n \leq 1+\theta\})}_{\alpha_n(\varepsilon)} \leq P\left(\left|\frac{U_n+V_n}{2}-\theta\right|<\varepsilon\right) \leq 1 \quad (1)$$

Le but est de prouver que $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{U_n+V_n}{2}-\theta\right|<\varepsilon\right)=1$. Pour cela il suffit de montrer que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n(\varepsilon)=1$.

$\alpha_n(\varepsilon) = 1 - P\left(\overline{\{-1+\theta \leq U_n < -1+\theta+2\varepsilon\}} \cup \overline{\{1+\theta-2\varepsilon < V_n \leq 1+\theta\}}\right)$.

Rappelons que $\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2$, $P(A\cup B) \leq P(A)+P(B)$.

Alors $\alpha_n(\varepsilon) \geq 1 - P\left(\overline{-1+\theta \leq U_n < -1+\theta+2\varepsilon}\right) - P\left(\overline{1+\theta-2\varepsilon < V_n \leq 1+\theta}\right)$.

$\alpha_n(\varepsilon) \geq 1 - [1-P(-1+\theta \leq U_n < -1+\theta+2\varepsilon)] - [1-P(1+\theta-2\varepsilon < V_n \leq 1+\theta)]$.

$\alpha_n(\varepsilon) \geq -1 + P(-1+\theta \leq U_n < -1+\theta+2\varepsilon) + P(1+\theta-2\varepsilon < V_n \leq 1+\theta)$.

$\alpha_n(\varepsilon) \geq -1 + F_{U_n}(-1+\theta+2\varepsilon) - F_{U_n}(-1+\theta) + F_{V_n}(1+\theta) - F_{V_n}(1+\theta-2\varepsilon)$.

$$d_n(\varepsilon) \geq -1 + \left[1-(1-F(-1+\theta+(\varepsilon-\theta))^n\right] - \left[1-(1-F(-1+\theta-\theta))^n\right]$$
$$+ (F(1+\theta-\theta))^n - (F(1+\theta-2\varepsilon-\theta))^n.$$

$$d_n(\varepsilon) \geq -1+1-(1-F(-1+2\varepsilon))^n - 1 + (1-\underbrace{F(-1)}_{=0})^n + (\underbrace{F(1)}_{=1})^n - (F(1-2\varepsilon))^n$$

$$d_n(\varepsilon) \geq -1+1-(1-F(-1+2\varepsilon))^n - 1+1+1-(F(1-2\varepsilon))^n.$$

$$d_n(\varepsilon) \geq 1-(1-F(-1+2\varepsilon))^n - (F(1-2\varepsilon))^n.$$

Mieux : $\underline{1-(1-F(-1+2\varepsilon))^n - (F(1-2\varepsilon))^n \leq d_n(\varepsilon) \leq 1.}$ (2)

1° $\varepsilon \in]0,1[$. $-1+2\varepsilon \in]-1,1[$ et $1-2\varepsilon \in]-1,1[$.

Soit $x \in]-1,1[$.

1er cas.. $x \in]-1,0]$. $F(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \in]0,\frac{1}{2}]$ et $1-F(x) \in [\frac{1}{2},1[$

Alors $|F(x)|<1$ et $|1-F(x)|<1$

2ème cas.. $x \in [0,1[$. $F(x) = 1-\frac{1}{2}(x-1)^2$.

$\frac{1}{2}(x-1)^2 \in [\frac{1}{2},1[$, $F(x) \in]0,\frac{1}{2}]$; $1-F(x) \in [\frac{1}{2},1[$

Ici encore $|F(x)|<1$ et $|1-F(x)|<1$.

donc $\underline{\forall x \in]-1,1[,\ |F(x)|<1 \text{ et } |1-F(x)|<1.}$

Alors $|1-F(-1+2\varepsilon)|<1$ et $|F(1-2\varepsilon)|<1$. car $-1+2\varepsilon \in]-1,1[$ et $1-2\varepsilon \in]-1,1[$.

donc $\lim_{n\to+\infty}(1-F(-1+2\varepsilon))^n = \lim_{n\to+\infty}(F(1-2\varepsilon))^n = 0.$

L'encadrement (2) donne alors $\lim_{n\to+\infty} d_n(\varepsilon) = 1$

L'encadrement (1) donne : $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{U_n+V_n}{2}-\theta\right|<\varepsilon\right) = 1$ et ceci pour tout ε dans $]0,1[$.

2° $\varepsilon \in [1,+\infty[$. $-1+2\varepsilon \in [1,+\infty[$; $F(-1+2\varepsilon)=1$;

$1-F(-1+2\varepsilon)=0$.

. $1-2\varepsilon \in]-\infty,-1]$; $F(1-2\varepsilon)=0$;

Alors $1-0^n-0^n \leq d_n(\varepsilon) \leq 1$; $d_n(\varepsilon)=1$.

(1) donne alors $P\left(\left|\frac{U_n+V_n}{2}-\theta\right|<\varepsilon\right)=1$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{U_n+V_n}{2}-\theta\right|<\varepsilon\right)=1$

Finalement $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{U_n+V_n}{2}-\theta\right|<\varepsilon\right)=1$.

<u>$\left(\frac{U_n+V_n}{2}\right)_{n\geq 1}$ est un estimateur convergent de θ car cette suite converge en probabilité vers la variable certaine égale à θ.</u>

d) Rappelons que nous avons posé : $\forall n \in \mathbb{N}, T_n = X_n-\theta$, $\widehat{U}_n = \mathrm{Inf}(T_1,T_2,\dots,T_n)$ et $\widehat{V}_n = \mathrm{Sup}(T_1,T_2,\dots,T_n)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{U_n+V_n}{2} = \frac{\widehat{U}_n+\theta+\widehat{V}_n+\theta}{2} = \theta + \frac{1}{2}(\widehat{U}_n+\widehat{V}_n)$.

<u>A retenir.</u>

▼ <u>**Lemme**</u>.. si $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ sont n réels : <u>$\min(a_1,a_2,\dots,a_n) = -\max(-a_1,-a_2,\dots,-a_n)$</u>.

<u>Preuve</u>.. Posons $\alpha = \max(-a_1,-a_2,\dots,-a_n)$.

$\exists\, k_0 \in [\![1,n]\!]$, $\alpha = -a_{k_0}$.

de plus $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $-a_k \leq \alpha = -a_{k_0}$. Ainsi $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $a_k \geq a_{k_0}$.

Alors $\min(a_1,a_2,\dots,a_n) = a_{k_0} = -\alpha = -\max(-a_1,-a_2,\dots,-a_n)$ ▲

Le lemme montre alors que $\widehat{U}_n = \mathrm{Inf}(T_1,T_2,\dots,T_n) = -\mathrm{Sup}(-T_1,-T_2,\dots,-T_n)$.

Montrons maintenant que : 1/ $\mathrm{Sup}(-T_1,-T_2,\dots,-T_n)$ a même loi que $\mathrm{Sup}(T_1,T_2,\dots,T_n)$

2/ $\hat{V}_n$ a une espérance.

• Soit $k\in[\![1,n]\!]$, T_k est une variable aléatoire de densité f où f est définie par $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1-|x| & \text{si } x\in[-1,1]\\ 0 & \text{si } x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[\end{cases}$.

Rappelons que $f=F'$ et donc que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Alors $-T_k$ est une variable aléatoire à densité de densité $g: x\mapsto f(-x)$.

Or f est paire sur $\mathbb{R}$ donc $g=f$. Ainsi $-T_k$ a même loi que T_k.

Notons encore que $-T_1,-T_2,\dots,-T_n$ sont indépendantes car $T_1,T_2,\dots,T_n$ sont indépendantes et ajoutons que $-T_1,-T_2,\dots,-T_n$ ont même loi que T_1.

Alors $\underline{\mathrm{Sup}(-T_1,-T_2,\dots,-T_n) \text{ a même loi que } \hat{U}_n=\sup(T_1,T_2,\dots,T_n)}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ F_{\hat{U}_n}(x)=P(\hat{U}_n\leq x)=P(U_n-\theta\leq x)=P(U_n\leq\theta+x)=F_{U_n}(\theta+x)=(F(\theta+x-\theta))^n=(F(x))^n$

↑ fonction de répartition de $\hat{U}_n$

Or F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc F^n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ainsi $F_{\hat{U}_n}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Alors $\hat{U}_n$ est une variable aléatoire à densité de densité $(F_{\hat{U}_n})'$.

Posons $g_n=(F_{\hat{U}_n})'$. g_n est continue sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de $x\mapsto x g_n(x)$.

$\forall x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[,\ x g_n(x)=x(F_{\hat{U}_n})'(x)=x(F^n)'(x)=x\times n\times F'(x)(F(x))^{n-1}$.

$\forall x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[,\ x g_n(x)=n x f(x)(F(x))^{n-1}=0$ ← f est nulle sur $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$.

Alors $\int_{-\infty}^{-1} t g_n(t)\,dt$ et $\int_{1}^{+\infty} t g_n(t)\,dt$ convergent et valent 0.

Comme $x\mapsto x g_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\int_{-1}^{1} t g_n(t)\,dt$ existe.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t g_n(t)\,dt$ converge. Alors $\hat{U}_n$ possède une espérance.

Dans ces conditions $\mathrm{Sup}(-T_1,-T_2,\dots,-T_n)$ possède une espérance égale à $E(\hat{U}_n)$.

Rappelons que $\mathrm{Inf}(T_1, T_2, \dots, T_n) = -\,\mathrm{Sup}(-T_1, -T_2, \dots, -T_n)$.

Alors $\hat{V}_n = \mathrm{Inf}(T_1, T_2, \dots, T_n)$ possède une espérance qui vaut $-E(\hat{U}_n)$

Alors $E(\hat{U}_n + \hat{V}_n)$ existe et vaut $E(\hat{U}_n) + E(\hat{V}_n)$ donc 0.

Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{U_n + V_n}{2} = \theta + \frac{1}{2}(\hat{U}_n + \hat{V}_n)$.

Ainsi $E\left(\dfrac{U_n + V_n}{2}\right)$ existe et vaut $\theta + \frac{1}{2} \times 0$ donc θ.

$\dfrac{U_n + V_n}{2}$ est un estimateur sans biais de θ ... et convergent.

Question 8 HEC 2009-8

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle déterminée par $x_0>0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x_n = x_{n-1}+\dfrac{1}{x_{n-1}}$.

Q1. Étudier la monotonie et la limite éventuelle de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x_n^2 = 2n + x_0^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x_k^2}$.

Q3. En déduire un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$. On pourra admettre que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)$.

Q1 Une récurrence simple montre que pour tout n dans $\mathbb{N}$, x_n existe et $x_n>0$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x_n - x_{n-1} = \dfrac{1}{x_{n-1}} > 0$. $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante.

Supposons que $(x_n)_{n\geqslant0}$ est majorée. Alors $(x_n)_{n\geqslant0}$ converge. Notons ℓ sa limite.

$\forall n\in\mathbb{N},\ x_n\geqslant x_0$ car $(x_n)_{n\geqslant0}$ est croissante. En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient $\ell\geqslant x_0$.

Donc $\ell>0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x_n = x_{n-1}+\dfrac{1}{x_{n-1}}$. En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient

alors $\ell = \ell+\dfrac{1}{\ell}$; $\dfrac{1}{\ell}=0$!!

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Étant croissante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

Q2 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $x_n^2 = x_n^2 - x_0^2 + x_0^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k^2 - x_{k-1}^2) + x_0^2 = \sum_{k=1}^{n}\left[\left(x_{k-1}+\frac{1}{x_{k-1}}\right)^2 - x_{k-1}^2\right] + x_0^2$

$x_n^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[x_{k-1}^2 + 2 + \frac{1}{x_{k-1}^2} - x_{k-1}^2\right] + x_0^2 = \sum_{k=1}^{n} 2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_{k-1}^2} + x_0^2 = 2n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_{k-1}^2} + x_0^2$

Donc $x_n^2 = 2n + x_0^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x_k^2}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Q3 Version 1.. On utilise $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x_n^2 - 2n = x_0^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x_k^2}\geqslant 0$. Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x_n^2\geqslant 2n$.

Soit $n\in[\![1,+\infty[\![$. $\dfrac{x_n^2}{2n}\geqslant 1$.

De plus $\dfrac{x_n^2}{2n} = 1 + \dfrac{x_0^2}{2n} + \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x_k^2} = 1 + \frac{x_0^2}{2n} + \frac{1}{2n}\,\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{x_k^2}$.

Ce $\forall k\in [\![1,n-1]\!]$, $\frac{1}{x_k^2}\le\frac{1}{2k}$.

Donc $1\le \frac{x_n^2}{2n} = 1+\frac{x_0^2}{2n}+\frac{1}{2n}\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{x_k^2}\le 1+\frac{x_0^2}{2n}+\frac{1}{2n}\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k}$

$0\le\frac{x_n^2}{2n}-1\le \frac{x_0^2}{2n}+\frac{1}{2n}\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k}\le\frac{x_0^2}{2n}+\frac{1}{2n}\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

$\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4}\frac{\ln n}{n}$. Alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\frac{\ln n}{n}\right)=0$.

donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_0^2}{2n}+\frac{1}{2n}\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=0$

Alors par encadrement $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n^2}{2n}=1$. Donc $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{x_n^2}{2n}}=1$.

$\lim_{n\to+\infty}\frac{|x_n|}{\sqrt{2n}}=1$. $\lim\frac{x_n}{\sqrt{2n}}=1$ ($\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n>0$). Ainsi $x_n\sim\sqrt{2n}$

<u>**Version 2.**</u> On n'utilise pas $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n$.

$\lim_{k\to+\infty}x_k=+\infty$. Alors $\exists p\in\mathbb{N}^*$, $\forall k\in[\![p,+\infty[\![$, $x_k\ge 1$.

$\forall k\in[\![p,+\infty[\![$, $x_k^2\ge x_k\ge 1$. $\forall k\in[\![p,+\infty[\![$, $\frac{1}{x_k^2}\le\frac{1}{x_k}=x_{k+1}-x_k$.

Soit $n\in[\![p+1,+\infty[\![$.

$x_n^2=2n+x_0^2+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x_k^2}=2n+x_0^2+\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{x_k^2}+\sum_{k=p}^{n-1}\frac{1}{x_k^2}\le 2n+x_0^2+\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{x_k^2}+\sum_{k=p}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)$.

$x_n^2\le 2n+x_0^2+\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{x_k^2}+x_n-x_p$. Posons $\alpha_p=x_0^2+\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{x_k^2}-x_p$.

$x_n^2\le 2n+x_n+\alpha_p$. De plus $x_n^2=2n+x_0^2+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x_k^2}\ge 2n$.

Alors $2n\le x_n^2\le 2n+x_n+\alpha_p$ et $x_n^2>0$

Ainsi $\frac{2n}{x_n^2}\le 1\le\frac{2n}{x_n^2}+\frac{1}{x_n}+\frac{\alpha_p}{x_n^2}$; $1-\frac{1}{x_n}-\frac{\alpha_p}{x_n^2}\le\frac{2n}{x_n^2}\le 1$.

$$\forall n \in [\![p+1, +\infty[\![, \ 1 - \frac{1}{x_n} - \frac{\alpha_p}{x_n^2} \leq \frac{\ell_n}{x_n^2} \leq 1.$$

On $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x_n} - \frac{\alpha_p}{x_n^2}\right) = 1$.

Par encadrement on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ell_n}{x_n^2} = 1$.

Alors $1 = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{\ell_n}{x_n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{\ell_n}}{|x_n|} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{\ell_n}}{x_n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq 0$.

On retrouve ainsi : $\underset{n \to +\infty}{x_n \sim \sqrt{\ell_n}}$.