HEC 2010 S1

Sujet S 1 - Exercice

1) Question de cours : Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite réelle décroissante soit convergente.

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$, et M_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) **a)** Montrer que le réel a est valeur propre de M_n si et seulement si le polynôme $P_n(X) = X^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \dots - 1$ admet a pour racine.
   b) Déterminer alors le sous-espace propre associé à a.

3) **a)** Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, le polynôme P_k admet une unique racine dans l'intervalle $]1, +\infty[$; on la note a_k.
   b) Établir la convergence de la suite $(a_k)_{k\geqslant 2}$. Déterminer sa limite.

4) **a)** Montrer que, pour tout p de $\mathbb{N}^*$, le polynôme P_{2p} admet une racine unique dans $\mathbb{R}^{-*}$; on la note b_p.
   b) Établir la décroissance, puis la convergence de la suite $(b_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite ℓ.
   c) Déterminer un équivalent simple de la suite $(b_p - \ell)_{p\in\mathbb{N}^*}$.

5) **a)** Déterminer les valeurs de n pour lesquelles la matrice M_n est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles la matrice M_n est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Sujet S 1 - Exercice sans préparation

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ de loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un n-échantillon i.i.d. de la loi de X.

1) Déterminer une densité de $Y_k = -\max(X_1, X_2, \dots, X_k)$, pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$.
2) En déduire $\mathbb{P}([X_n \geqslant X_1] \cap \dots \cap [X_n \geqslant X_{n-1}])$.

(Q1) Une suite réelle décroissante est convergente si et seulement si elle est minorée.

(Q2) a) Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ une matrice de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $P_n = X^n - (X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1)$.

↑ dans le texte c'est a !!

$$M_n U = \lambda U \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \lambda u_1 \\ u_1 = \lambda u_2 \\ u_2 = \lambda u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} = \lambda u_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{n-1} = \lambda u_n \\ u_{n-2} = \lambda^2 u_n \\ \vdots \\ u_1 = \lambda^{n-1} u_n \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \lambda u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ u_k = \lambda^{n-k} u_n. \\ \text{et} \\ (\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \cdots + 1)\, u_n = \lambda^n u_n \end{cases}$$

$$M_n U = \lambda U \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ u_k = \lambda^{n-k} u_n \\ (\lambda^n - \lambda^{n-1} - \lambda^{n-2} - \cdots - \lambda - 1)\, u_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_n(\lambda)\, u_n = 0 \\ \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ u_k = \lambda^{n-k} u_n \end{cases}$$

1er cas.. $P_n(\lambda) \neq 0$.

$$M_n U = \lambda U \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = 0 \\ \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ u_k = \lambda^{n-k} u_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow U = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}.$$

Alors λ n'est pas valeur propre de M_n.

2ième cas.. $P_n(\lambda) = 0$.

$$M_n U = \lambda U \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ u_k = \lambda^{n-k} u_n \Leftrightarrow$$

Alors 1) λ est valeur propre de M_n

2) $SEP(M_n, \lambda) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est valeur propre de M_n si et seulement si λ est racine du polynôme $P_n = X^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \cdots - X - 1$.

b) D'après ce qui précède si λ est une valeur propre de M_n (dans $M_n(\mathbb{R})$), le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$

Remarque.. les sous-espaces propres de M_n, s'il en existe sont de dimension 1. Alors M_n est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si P_n admet n racines deux à deux distinctes dans $\mathbb{R}$.

Q3 a) Soit $k\in[\![2,+\infty[\![$. Soit $\alpha\in]1,+\infty[$ $\alpha\neq 1$

$$P_k(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha^k-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha^i=0 \Leftrightarrow 0=\alpha^k-\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}(\alpha^k-\alpha^{k+1}-1+\alpha^k).$$

$$P_k(\alpha)=0 \Leftrightarrow 2\alpha^k-\alpha^{k+1}-1=0 \Leftrightarrow \alpha^{k+1}-2\alpha^k+1=0.$$

Les zéros de P_k dans $]1,+\infty[$ sont les zéros de $Q_k=X^{k+1}-2X^k+1$ dans $]1,+\infty[$.

$\forall x\in[1,+\infty[$, $Q'_k(x)=(k+1)x^k-2kx^{k-1}=(k+1)x^{k-1}\left(x-\frac{2k}{k+1}\right)$. $\frac{2k}{k+1}>1$ $(k\geq 2)$.

Q_k est strictement décroissante sur $\left[1,\frac{2k}{k+1}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{2k}{k+1},+\infty\right[$.

$Q_k(1)=0$ donc $\forall x\in\left]1,\frac{2k}{k+1}\right]$, $Q_k(x)<Q_k(1)=0$. Q_k ne s'annule pas sur $\left]1,\frac{2k}{k+1}\right]$.

Q_k est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{2k}{k+1},+\infty\right[$ et $\lim_{x\to+\infty}Q_k(x)=+\infty$.

Alors Q_k réalise une bijection de $\left[\frac{2k}{k+1},+\infty\right[$ sur $\left[Q_k\left(\frac{2k}{k+1}\right),+\infty\right[$.

Or $Q_k\left(\frac{2k}{k+1}\right)<Q_k(1)=0$. Donc $0\in\left[Q_k\left(\frac{2k}{k+1}\right),+\infty\right[$.

Alors $\exists!\, a_k\in\left[\frac{2k}{k+1},+\infty\right[$, $Q_k(a_k)=0$.

$2>\frac{2k}{k+1}$ et $Q_k(2)=2^{k+1}-2\times 2^k+1=1>0=Q_k(a_k)$ donc $a_k<2$.

Finalement Q_k possède un zéro et un seul appartenant à $]1,+\infty[$.

Ce zéro a_k appartient à $\left[\frac{2k}{k+1},2\right[$ (et même à $\left]\frac{2k}{k+1},2\right[$).

Alors P_k admet une unique racine dans l'intervalle $]1,+\infty[$ que nous notons a_k. De plus $a_k\in\left[\frac{2k}{k+1},2\right[$.

b) $\forall k\in[\![2,+\infty[\![$, $\frac{2k}{k+1}\leq a_k<2$ et $\lim_{k\to+\infty}\frac{2k}{k+1}=2$ donc

par encadrement $\lim_{k\to+\infty}a_k=2$.

Exercice. Montrer que $(a_k)_{k\geq 2}$ est croissante. Retrouver sa convergence et sa limite.

Q4 a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}^{-*}$.

$$P_{2p}(x)=0 \Leftrightarrow x^{2p}-\sum_{k=0}^{2p-1} x^k=0 \underset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} x^{2p}-\frac{1-x^{2p}}{1-x}=0 \Leftrightarrow (1-x)x^{2p}-1+x^{2p}=0$$

$$P_{2p}(x)=0 \Leftrightarrow x^{2p+1}-2x^{2p}+1=0 \Leftrightarrow Q_{2p}(x)=0.$$

Les zéros de P_{2p} dans $]-\infty,0[$ sont les zéros de Q_{2p} dans $]-\infty,0[$.

$$\forall x\in]-\infty,0[,\ Q'_{2p}(x)=(2p+1)x^{2p}-4px^{2p-1}=\underbrace{x^{2p-1}}_{<0}\underbrace{[(2p+1)x-4p]}_{<0}>0.$$

Q_{2p} est strictement croissante et continue sur $]-\infty,0[$. De plus $\lim_{x\mapsto-\infty} Q_{2p}(x)=-\infty$ et $\lim_{x\mapsto 0^-} Q_{2p}(x)=1$.

Alors Q_{2p} réalise une bijection de $]-\infty,0[$ et sur $]-\infty,1[$.

$0\in]-\infty,1[$. Ainsi $\exists!\, b_p\in]-\infty,0[,\ Q_{2p}(b_p)=0$.

Alors $\exists!\, b_p\in]-\infty,0[,\ P_{2p}(b_p)=0$.

P_{2p} admet une racine et une seule dans $\mathbb{R}^{-*}$ et ceci pour tout $p\in\mathbb{N}^*$.

b) Soit $p\in\mathbb{N}^*$.

$$Q_{2p}(b_{p+1})=Q_{2p}(b_{p+1})-\underbrace{Q_{2p+2}(b_{p+1})}_{=0}=b_{p+1}^{2p+1}-2b_{p+1}^{2p}+1-b_{p+1}^{2p+3}+2b_{p+1}^{2p+2}-1.$$

$$Q_{2p}(b_{p+1})=b_{p+1}^{2p}(b_{p+1}-2)-b_{p+1}^{2p+2}(b_{p+1}-2)=b_{p+1}^{2p}(1-b_{p+1}^2)(b_{p+1}-2).$$

$$Q_{2p}(b_{p+1})=b_{p+1}^{2p}(1-b_{p+1})(1+b_{p+1})(b_{p+1}-2).$$

Rappelons que Q_{2p} est strictement croissante sur $]-\infty,0[$.

$Q_{2p}(b_p)=0$. $Q_{2p}(-1)=-1-2+1=-2<0$. Donc $b_p>-1$ car $Q_{2p}(b_p)>Q_{2p}(-1)$.

Donc $b_p>-1$ ... et ceci pour tout p dans $\mathbb{N}^*$ donc $b_{p+1}>-1$.

$b_{p+1}^{2p}>0$, $1-b_{p+1}>0$, $1+b_{p+1}>0$, $b_{p+1}-2<0$. Alors $Q_{2p}(b_{p+1})<0=Q_{2p}(b_p)$. Ainsi $b_{p+1}<b_p$.

La suite $(b_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Nous avons vu que $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $b_p > -1$. Donc $(b_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est minorée. Alors $(b_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Soit ℓ la limite de la suite $(b_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$. $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $b_p > -1$ donc $\ell \geq -1$.

Supposons $\ell > -1$. $(b_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers ℓ donc

$\forall p\in\mathbb{N}^*$, $\ell \leq b_p < 0$. Donc $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $|b_p| \leq |\ell|$. $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $|b_p^{2p}| = |b_p|^{2p} \leq |\ell|^{2p}$

$-1 < \ell \leq 0$ donc $|\ell| < 1$. Ainsi $\lim\limits_{p\to+\infty} |\ell|^{2p} = 0$. Par encadrement $\lim\limits_{p\to+\infty} b_p^{2p} = 0$.

Or $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $b_{2p}^{2p+1} - 2b_{2p}^{2p} + 1 = 0$.

En passant à la limite il vient : $\ell\times 0 - 2\times 0 + 1 = 0$; $1 = 0$!

Ainsi on ne peut pas avoir $\ell > -1$. Donc $\ell \leq -1$. Comme $\ell \geq -1$: $\ell = -1$.

$(b_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers -1.

c) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. $b_p^{2p}(2-b_p) = 2b_p^{2p} - b_p^{2p+1} = 1$. $b_p^{2p} = \dfrac{1}{2-b_p}$.

$b_p^{2p} > 0$ et $2 - b_p > 0$. Donc $\ln b_p^{2p} = \ln\dfrac{1}{2-b_p} = -\ln(2-b_p)$.

Donc $2p\ln|b_p| = -\ln(2-b_p) \underset{p\to+\infty}{\sim} -\ln 3$ car $\lim\limits_{p\to+\infty}[-\ln(2-b_p)] = -\ln 3 \neq 0$.

Donc $\ln|b_p| \underset{p\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln 3}{2p}$. Or $\lim\limits_{p\to+\infty} |b_p| = 1$.

Alors $|b_p| - 1 \underset{p\to+\infty}{\sim} \ln|b_p| \underset{p\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln 3}{2p}$.

Donc $b_p - \ell = b_p + 1 \underset{b_p<0}{=} -(|b_p| - 1) \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln 3}{2p}$.

$b_p - \ell = b_p - (-1) \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln 3}{2p}$.

Q5) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappelons que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les sous-espaces propres de M_n sont des droites vectorielles. De plus $Sp_{\mathbb{R}} M_n = \{a \in \mathbb{R} \mid P_n(a) = 0\}$.

Dans ces conditions M_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si P_n admet n racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

1er cas.. $n = 1$. $M_1 \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ donc M_1 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

2ème cas.. $n = 2$ $\quad P_2 = X^2 - X - 1$. P_2 admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$ qui sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

donc M_2 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3ème cas.. $n \geq 3$ $\quad P_n(1) = 1 - n > 0$. 1 n'est pas racine de P. Soit $a \in \mathbb{R} - \{1\}$.

$$P_n(a) = 0 \iff a^n - \sum_{k=0}^{n-1} a^k = 0 \iff a^n - \frac{1-a^n}{1-a} = 0 \iff a^{n+1} - 2a^n + 1 = 0$$

déjà vu

$P_n(a) = 0 \iff \varphi_n(a) = 0$.

Les zéros de P_n dans $\mathbb{R}$ sont les zéros de φ_n dans $\mathbb{R} - \{1\}$.

Nous avons déjà vu que φ_n admet un zéro et un seul dans $]1, +\infty[$: a_n

$\forall x \in [0,1[$, $\varphi_n'(x) = (n+1)x^n - 2nx^{n-1} = (n+1)x^{n-1}\left[x - \frac{2n}{n+1}\right]$ et $\frac{2n}{n+1} > 1$

Alors $\varphi_n'(0) = 0$ et $\forall x \in]0,1[$, $\varphi_n'(x) < 0$.

φ_n est strictement décroissante sur $[0,1[$ et continue sur $[0,1[$

φ_n réalise une bijection de $[0,1[$ sur $]\lim_{x \to 1^-} \varphi_n(x), \varphi_n(0)] =]0,1]$.

donc φ_n ne s'annule pas sur $[0,1[$.

si n est pair, φ_n admet un zéro et un seul dans $]-\infty, 0[$: $b_{\frac{n}{2}}$.

Supposons n impair. $\forall x \in]-\infty, 0]$, $\varphi_n'(x) = (n+1)x^{n-1}\left[x - \frac{2n}{n+1}\right]$

Alors $\varphi_n'(0) = 0$ et $\forall x \in]-\infty, 0[$, $\varphi_n'(x) < 0$ $\quad$ ($n-1$ est pair...)

Alors φ_n est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et $\varphi_n(0) = 1$. $\forall x \in]-\infty, 0]$, $\varphi_n(x) \geq \varphi_n(0) = 1$

donc φ_n ne s'annule pas sur $]-\infty, 0[$ si n est impair.

Résumons. Si n est pair φ_n admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}-\{1\}$ et si n est impair φ_n admet une racine et une seule dans $\mathbb{R}-\{1\}$.

Alors P_n admet au plus deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

comme $n \geq 3$: M_n n'est pas diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

Finalement M_n est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $n = 1$ ou $n = 2$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Comme dans Q 2 on note que :

1) $\forall a \in \mathbb{C}$, $a \in Sp_{\mathbb{C}} M_n \Longleftrightarrow P_n(a) = 1$

2) $\forall a \in Sp_{\mathbb{C}} M_n$, $\dim SEP_{\mathbb{C}}(M_n, a) = 1$

Alors M_n est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ si et seulement si P_n admet n racines deux à deux distinctes dans $\mathbb{C}$.

si $n = 1$ ou 2 M_n est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ donc M_n est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

Supposons que $n \geq 3$.

On note comme dans ce qui précède que les zéros de P_n dans $\mathbb{C}$ sont les zéros de $\varphi_n = X^{n+1} - 2X^n + 1$ dans $\mathbb{C} - \{1\}$.

$\varphi'_n = (n+1)X^n - 2n X^{n-1} = (n+1) X^{n-1}\left(X - \frac{2n}{n+1}\right)$. Les zéros de φ'_n dans $\mathbb{C}$ sont 0 et $\frac{2n}{n+1}$.

$\varphi_n(0) = 1 \neq 0$ Nous avons déjà vu que φ_n est strictement décroissante sur $[1, \frac{2n}{n+1}]$ et $\varphi_n(1) = 0$ donc $\varphi_n(1) = 0$ donc $\varphi_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$.

Alors $\varphi_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) \neq 0$.

Les racines de φ'_n ne sont pas racine de φ_n donc les racines de φ_n sont simples.

Alors $Q_n \in \mathbb{C}[X]$, $\deg Q_n = n+1$ et les racines de Q_n sont simples.

Donc Q_n admet $n+1$ racines dans $\mathbb{C}$ deux à deux distinctes et $Q_n(1)=0$.

Ainsi Q_n admet n racines dans $\mathbb{C}-\{1\}$ deux à deux distinctes.

Alors P_n admet n racines dans $\mathbb{C}$ deux à deux distinctes. Donc M_n est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

<u>M_n est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.</u>

Question 1 **HEC 2010** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi uniforme sur le segment $[0,1]$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon i.i.d. de la loi de X.

Q1. Déterminer une densité de $Y_k = -\operatorname{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_k)$, pour tout k dans $[\![1, n-1]\!]$.

Q2. En déduire $P(\{X_n \geqslant X_1\} \cap \cdots \cap (\{X_n \geqslant X_{n-1}\})$.

Q1 Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Y_k prend ses valeurs dans $[-1, 0]$. Notons F_{Y_k} la fonction de répartition de Y_k. $\forall x \in]-\infty, -1[$, $F_{Y_k}(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[$, $F_{Y_k}(x) = 1$.

Soit $x \in [-1, 0[$. $F_{Y_k}(x) = P(-\max(X_1, \ldots, X_k) \leq x) = P(\max(X_1, \ldots, X_k) \geq -x)$

$F_{Y_k}(x) = 1 - P(\max(X_1, \ldots, X_k) < -x) = 1 - P(\{X_1 < -x\} \cap \ldots \cap \{X_k < -x\})$.

Or $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sont indépendantes donc $F_{Y_k}(x) = 1 - P(X_1 < -x) \cdots P(X_k < -x)$.

Notons que $-x \in]0, 1]$ donc $P(X_i < -x) = P(X_i \leq -x) = -x$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.

$F_{Y_k}(x) = 1 - (-x)^k$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Y_k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -1[\\ 1 - (-x)^k & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 1 & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases} \quad \text{ou } (*) \quad \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -1] \\ 1 - (-x)^k & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

Il est aisé de montrer avec $(*)$ que F_{Y_k} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$. Ainsi Y_k est une variable aléatoire à densité

$\forall x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, $F'_{Y_k}(x) = 0$ et $\forall x \in]-1, 0[$, $F'_{Y_k}(x) = k(-x)^{k-1}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{Y_k}(x) = \begin{cases} k(-x)^{k-1} & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f_{Y_k} est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_{Y_k} sur $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. f_{Y_k} est une densité de Y_k.

Q2 Notons α la probabilité demandée. $\alpha = P(X_n \geqslant \max(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}))$

$\alpha = P(X_n \geqslant -Y_{n-1}) = P(X_n + Y_{n-1} \geqslant 0)$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f est une densité de X_n.

1) X_n et Y_{n-1} sont deux variables aléatoires à densité. f est une densité de X_n et $f_{Y_{n-1}}$ une densité de Y_{n-1}.

2) $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes donc X_n et $Y_{n-1} = -\max(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$ sont indépendantes

3) f est bornée.

Alors $X_n + Y_{n-1}$ est une variable aléatoire à densité et $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, f_{Y_{n-1}}(x-t)\, dt$ en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

$\alpha = P(X_n + Y_{n-1} \geq 0) = \int_0^{+\infty} h(t)\, dt$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$h(x) = \int_0^1 1\, f_{Y_{n-1}}(x-t)\, dt \underset{u = x-t}{=} \int_{x-1}^{x} f_{Y_{n-1}}(u)\, du$$

Si $x > 1$: $[x-1, x] \subset]0, +\infty[$ donc $h(x) = \int_{x-1}^{x} f_{Y_{n-1}}(u)\, du = \int_{x-1}^{x} 0\, du = 0$.

Si $0 \leq x \leq 1$: $h(x) = \int_{x-1}^{x} f_{Y_{n-1}}(u)\, du \underset{x-1 \in [-1,0]}{=} \int_{x-1}^{0} f_{Y_{n-1}}(u)\, du \underset{x-1 \in [-1,0]}{=} \int_{x-1}^{0} (n-1)(-t)^{n-2}\, dt$.

$$h(x) = (n-1)\left[-\frac{(-t)^{n-1}}{n-1}\right]_{x-1}^{0} = (1-x)^{n-1}.$$

Alors $\alpha = \int_0^{+\infty} h(t)\, dt = \int_0^1 (1-t)^{n-1}\, dt = \left[-\frac{(1-t)^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n}$.

$P(\{X_n \geq X_1\} \cap \{X_n \geq X_2\} \cap \dots \cap \{X_n \geq X_{n-1}\}) = \frac{1}{n}$; normal non ?

Exercice.. Montrer que $\forall x \in]-\infty, 0[$, $h(x) = (1-x)^{n-1} - (-x)^{n-1}$.