Sujet S 12 - Exercice

1) Question de cours : Coefficient de corrélation linéaire ; définition et propriétés.
Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$, des réels non nuls donnés.

2) Soit f la fonction définie sur $(\mathbb{R}^*)^n$ par $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$, et soit D l'ensemble des solutions dans $(\mathbb{R}^*)^n$ de l'équation : $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 1$.
   a) Montrer que la restriction f_1 de f à D admet un unique point critique que l'on déterminera.
   b) Etablir qu'en ce point critique, la fonction f_1 admet un minimum global.

3) Soit $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$, n variables aléatoires discrètes indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et soit θ un paramètre réel non nul inconnu. On suppose que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{E}(Z_j) = \theta . a_j$ et $\mathbb{V}(Z_j) = 1$, où $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent respectivement l'espérance et la variance.

   On pose : $X_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_j Z_j$, où $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ désigne un n-uplet de réels non nuls quelconques.
   a) Déterminer la relation que doivent satisfaire $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ pour que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^*$, on ait : $\mathbb{E}(X_n) = \theta$.
   On suppose dans la suite que cette condition est vérifiée.
   b) Calculer en fonction de $a_1, a_2, \dots, a_n$, les valeurs $\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_n^*$ de $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, pour lesquelles $\mathbb{V}(X_n)$ est minimale.

4) On pose : $X_n^* = \sum_{j=1}^{n} \beta_j^* Z_j$. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, des réels non nuls tels que $Y_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Z_j$ soit un estimateur sans biais de θ. On note ρ le coefficient de corrélation linéaire de X_n^* et Y_n.
   a) Montrer que $\rho > 0$.
   b) Si $\rho = 1$, que peut-on en déduire sur les variables aléatoires X_n^* et Y_n ?

Sujet S 12 - Exercice sans préparation

Soit $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$ engendré par la famille $\mathscr{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ où $f_k : x \mapsto x^k e^{-x}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E. En déduire la dimension de E.

2) Soit D l'application définie sur E par :

$$\forall f \in E, \quad D(f) = f' - f''$$

   où f' et f'' désignent les dérivées première et seconde de f.
   Montrer que D est un endomorphisme de E et écrire sa matrice M dans la base $\mathscr{B}$.

3) M est-elle inversible ? diagonalisable ?

HEC 2010 S12 Correction de l'exercice

(Q1) X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui possèdent une variance non nulle. 1 programme oblige...

- le coefficient de corrélation du couple (X,Y) est le réel noté $\rho_{X,Y}$ et égal à $\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$.

- $|\rho_{X,Y}|\leq 1$

- $|\rho_{X,Y}|=1$ si et seulement X (resp. Y) est une fonction quasi affine de Y (resp. X).

donc $|\rho_{X,Y}|=1 \iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ P(X=aY+b)=1$.

$|\rho_{X,Y}|=1 \iff \exists (a',b')\in\mathbb{R}^2,\ P(Y=a'X+b')=1$.

(Q2) <u>On comprendra qu'il s'agit d'optimiser sous la contrainte $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j=1$.</u>

Posons $\Omega=(\mathbb{R}^*)^n$. $\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $g(X)=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ et $\mathcal{C}=\{X\in\mathbb{R}^n \mid g(X)=1\}$.

$\mathbb{R}^*=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. donc $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ comme réunion de deux ouverts de $\mathbb{R}$.

Alors Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ comme produit de n ouverts de $\mathbb{R}$.

g est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

f est de classe C^1 sur l'ouvert Ω car f est polynômiale.

Posons $\mathcal{H}=\mathrm{Ker}\, g$. Pour tout X dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^\perp=\mathrm{Vect}(\nabla g(X))$ donc $\mathcal{H}^\perp=\mathrm{Vect}\,(a_1,a_2,\dots,a_n)$

car $\forall X\in\mathbb{R}^n$, $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\dfrac{\partial g}{\partial x_k}(X)=a_k$.

un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$ est un point X de $\mathcal{C}\cap\Omega$ tel que $\nabla f(X)\in\mathcal{H}^\perp$. Soit $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$X\in\mathcal{C}\cap\Omega \text{ et } \nabla f(X)\in\mathcal{H}^\perp \iff \begin{cases} \forall i\in[\![1,n]\!],\ x_i\neq 0 \\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j=1 \\ (2x_1,2x_2,\dots,2x_n)\in\mathrm{Vect}((a_1,a_2,\dots,a_n)) \end{cases} \quad (1)$$

$$(1)\iff \begin{cases} \forall i\in[\![1,n]\!],\ x_i\neq 0 \\ \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall i\in[\![1,n]\!],\ 2x_i=\lambda a_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j=1 \end{cases} \iff \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \begin{cases} \forall i\in[\![1,n]\!],\ x_i\neq 0 \text{ et } x_i=\frac{\lambda}{2}a_i \\ 1=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j=\sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\lambda}{2}a_j=\frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \end{cases}$$

$(1) \underset{\substack{\uparrow\\ \sum_{j=1}^n a_j^2 \neq 0 \\ \uparrow}}{\iff} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} \lambda = \dfrac{2}{\sum_{j=1}^n a_j^2} \\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \neq 0 \text{ et } x_i = \dfrac{1}{2} \dfrac{2}{\sum_{j=1}^n a_j^2} a_i \end{cases} \iff \begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \neq 0 \text{ et} \\ x_i = \dfrac{a_i}{\sum_{j=1}^n a_j^2} \end{cases}$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ sont non nuls.

$(1) \iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i = \dfrac{a_i}{\sum_{j=1}^n a_j^2}$.

Ainsi f admet un unique point critique dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$ ou sous la contrainte $\sum_{j=1}^n a_j x_j = 1$: $A = \left(\frac{a_1}{S}, \frac{a_2}{S}, \dots, \frac{a_n}{S}\right)$ où $S = \sum_{j=1}^n a_j^2$.

b] Soit $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{C} \cap \Omega$.

Notons que $f(A) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{S}\right)^2 = \frac{1}{S^2} \sum_{i=1}^n a_i^2 = \frac{1}{S^2} S = \frac{1}{S}$.

$1 = 1^2 \underset{\substack{\uparrow \\ X\in\Omega}}{=} \left(\sum_{j=1}^n a_j x_j\right)^2 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Cauchy-Schwarz dans } \mathbb{R}^n}}{\leq} \left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right) = S\, f(X)$. Comme $S > 0$: $f(X) \geq \frac{1}{S} = f(A)$.

$A \in \Omega \cap \mathcal{C}$ et $\forall X \in \Omega \cap \mathcal{C},\ f(X) \geq f(A)$.

f admet un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}$ ou sous la contrainte $\sum_{j=1}^n a_j x_j = 1$ en son unique point critique dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Q3 a] $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $E(Z_j)$ existe et vaut θa_j.

Alors $E(X_n)$ existe et vaut $\sum_{j=1}^n \beta_j E(Z_j)$ donc $\sum_{j=1}^n (\beta_j \theta a_j)$.

$E(X_n) = \theta \iff \theta = \theta \sum_{j=1}^n \beta_j a_j \underset{\theta \neq 0}{\iff} \sum_{j=1}^n a_j \beta_j = 1$.

$E(X_n) = \theta$ si et seulement si $\sum_{j=1}^n a_j \beta_j = 1$

b) 1) Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $V(Z_j)$ existe et vaut 1.

2) $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ sont indépendantes.

Alors 1) Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $V(\beta_j Z_j)$ existe et vaut β_j^2.

2) $\beta_1 Z_1, \beta_2 Z_2, \dots, \beta_n Z_n$ sont indépendantes.

Par conséquent $V(X_n)$ existe et $V(X_n) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j^2$.

Comme $\sum_{j=1}^{n} a_j \beta_j = 1$ et que $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$, $V(X_n)$ est minimale si et seulement si $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\beta_i = \dfrac{a_i}{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}$.

Les valeurs $\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_n^*$ de $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ pour lesquelles $V(X_n)$ est minimale sont $\dfrac{a_1}{S}, \dfrac{a_2}{S}, \dots, \dfrac{a_n}{S}$ où $S = \sum_{j=1}^{n} a_j^2$. La valeur minimale de $V(X_n)$ est $\dfrac{1}{S} = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}$.

Q4 a) . Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, Z_i et Z_j possèdent un moment d'ordre 2 donc $\mathrm{cov}(Z_i, Z_j)$ existe.

. $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ possèdent un moment d'ordre 2. Il en est donc de même pour $X_n^* = \sum_{j=1}^{n} \beta_j^* Z_j$ et $Y_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Z_j$. Alors $\mathrm{cov}(X_n^*, Y_n)$ existe.

De plus $\mathrm{cov}(X_n^*, Y_n) = \mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^* Z_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Z_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i^* \alpha_j \,\mathrm{cov}(Z_i, Z_j)$

Or $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{cov}(Z_i, Z_j) = \begin{cases} V(Z_i) & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ car $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ sont indépendantes.

Alors $\mathrm{cov}(X_n^*, Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^* \alpha_i V(Z_i) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{S} \alpha_i \times 1 = \dfrac{1}{S} \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i = \dfrac{1}{S}$ car

$Y_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Z_j$ est un estimateur sans biais de θ donc $\theta = E(Y_n) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j E(Z_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j \theta$

et ainsi $\sum_{j=1}^{n} a_j \alpha_j = 1$ ... comme nous l'avons déjà vu dans Q3 a)

Donc $\mathrm{cov}(X_n^*, Y_n) = \dfrac{1}{S}$ et $S = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 > 0$. Alors $\mathrm{cov}(X_n^*, Y_n) > 0$.

Par conséquent $\rho = \dfrac{\operatorname{cov}(X_n^*, Y_n)}{\sqrt{V(X_n^*)}\sqrt{V(Y_n)}} > 0$. $\rho > 0$.

- **Remarque**.. Nous venons de voir que $\operatorname{cov}(X_n^*, Y_n) = \frac{1}{S}$ avec $S = \sum_{j=1}^{n} a_j^2$.

Or $V(X_n^*) = \sum_{j=1}^{n} (\beta_j^*)^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j}{S}\right)^2 = \frac{1}{S^2} \sum_{j=1}^{n} a_j^2 = \frac{1}{S}$.

Donc $\rho = \dfrac{1/S}{\sqrt{1/S}\sqrt{V(Y_n)}} = \dfrac{1}{\sqrt{S}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2}}$. ▲

b) Supposons que $\rho = 1$. Alors $\sqrt{S}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2} = 1$; $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 = \frac{1}{S}$. $V(Y_n) = \frac{1}{S}$.

Rappelons que $V(X_n)$ a pour valeur minimale $\frac{1}{S}$ et $V(X_n)$ est minimale si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\beta_i = \beta_i^*$.

Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i = \beta_i^*$. Ainsi $Y_n = X_n^*$.

R..

Question 12 HEC 2010 $\boxed{\text{F 1}}$ ATTIAS et ALLAIN

Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ où $f_k : x \to x^k\, e^{-x}$ pour k dans $\mathbb{N}$.

Q1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E. En déduire la dimension de E.

Q2. Soit D l'application définie sur E par $\forall f \in E,\ D(f) = f' - f''$ où f' et f'' désignent les dérivées première et seconde de f.

Montrer que D est un endomorphisme de E et écrire sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

Q3. M est-elle inversible ? diagonalisable ?

Q1.. Soit $(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{R}^4$ tel que $\alpha_0 f_0+\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\alpha_3 f_3 = 0_{\mathcal{F}}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $0=\alpha_0 e^{-x}+\alpha_1 x e^{-x}+\alpha_2 x^2 e^{-x}+\alpha_3 x^3 e^{-x} = e^{-x}(\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3)$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3=0$. Le polynôme $\alpha_0+\alpha_1 X+\alpha_2 X^2+\alpha_3 X^3$ est le polynôme nul. Alors $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

$\mathcal{B}$ est alors une famille libre et génératrice de E. $\mathcal{B}$ est une base de E. $\dim E = 4$.

Q2 • $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(f,g)\in E^2$, $D(\lambda f+g)=(\lambda f+g)'-(\lambda f+g)''=\lambda f'+g'-\lambda f''-g''=\lambda(f'-f'')+g'-g''=\lambda D(f)+D(g)$.

D est linéaire.

• $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_0'(x)=-e^{-x}$. $\forall k\in[\![1,3]\!]$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_k'(x)=e^{-x}(kx^{k-1}-x^k)$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f_0''(x)=e^{-x}$ et $f_1''(x)=e^{-x}(x-2)$. $\forall k\in[\![2,3]\!]$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_k''(x)=e^{-x}\big(k(k-1)x^{k-2}-2kx^{k-1}+x^k\big)$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $D(f_0)(x)=-2e^{-x}=-2f_0(x)$; $D(f_0)=-2f_0$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $D(f_1)(x)=e^{-x}(1-x)-e^{-x}(x-2)=3e^{-x}-2xe^{-x}=3f_0(x)-2f_1(x)$

$D(f_1)=3f_0-2f_1$

$\forall k\in[\![2,3]\!]$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $D(f_k)(x)=e^{-x}(kx^{k-1}-x^k)-e^{-x}\big(k(k-1)x^{k-2}-2kx^{k-1}+x^k\big)$.

$\forall k\in[\![2,3]\!]$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $D(f_k)(x)=-k(k-1)f_{k-2}(x)+3kf_{k-1}(x)-2f_k(x)$

$\forall k\in[\![2,3]\!]$, $D(f_k)=-k(k-1)f_{k-2}+3kf_{k-1}-2f_k$ ... ou $D(f_2)=-2f_0+6f_1-2f_2$ et

$D(f_3)=-6f_1+9f_2-2f_3$.

Notons que $\forall k\in[\![0,3]\!]$, $D(f_k)\in \mathrm{Vect}(f_0,f_1,f_2,f_3)=E$.

Soit $f \in E$. $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$, $f = \sum_{k=0}^{3} \alpha_k f_k$.

$D(f) = \sum_{k=0}^{3} \alpha_k D(f_k)$ car D est linéaire.

$D(f) = \sum_{k=0}^{3} \alpha_k D(f_k) \in Vect(D(f_0), D(f_1), D(f_2), D(f_3)) \subset Vect(f_0, f_1, f_2, f_3) = E$.

<u>D est une application de E dans E.</u>

ceci achève de montrer que <u>D est un endomorphisme de E.</u>

Q3 Posons $A = M_B(D)$. D'après ce qui précède $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

A est triangulaire supérieure.

$Sp A = \{-2\}$.

0 n'est pas valeur propre de A donc <u>A est inversible.</u>

Supposons A diagonalisable. Alors $M_{4,1}(\mathbb{R}) = SEP(A, -2)$.

donc $4 = \dim M_{4,1}(\mathbb{R}) = \dim SEP(A, -2) = 4 - rg(A + 2I_4)$.

$rg(A + 2I_4) = 0$. Alors $A + 2I_4 = 0_{M_4(\mathbb{R})}$. $A = -2I_4$!!

<u>A n'est pas diagonalisable.</u>

Question de cours. Coefficient de corrélation : définition et propriétés.