HEC 2010 S 2

Sujet S 2 - Exercice

Soit p un réel donné de $]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On considère un couple (U,T) de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, dont la loi de probabilité est donnée par : pour tout entier $n \geqslant 2$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}([\mathrm{U}=n] \cap [\mathrm{T}=t]) = \begin{cases} p^2 q^{n-2} & \text{si } |t| \leqslant n-2 \text{ et si } n, |t| \text{ de même parité} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales, lois conditionnelles.
2) Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{\substack{|t|\leqslant n-2 \\ n,|t| \text{ de même parité}}} p^2 q^{n-2} = 1.$
3) a) Déterminer la loi marginale de U.
   b) En distinguant les trois cas $t=0$, $t>0$ et $t<0$, montrer que la loi marginale de T est donnée par :
   pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}([\mathrm{T}=t]) = \dfrac{pq^{|t|}}{1+q}$.
   c) Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{T})$.
4) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
   a) Déterminer la loi conditionnelle de T sachant $[\mathrm{U}=n]$.
   b) Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(\mathrm{T}/\mathrm{U}=n)$ de T sachant $[\mathrm{U}=n]$.
5) a) Justifier l'existence de $\mathbb{E}(\mathrm{U})$ et de $\mathbb{E}(\mathrm{UT})$. Calculer $\mathbf{Cov}(\mathrm{U},\mathrm{T})$.
   b) Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

Sujet S 2 - Exercice sans préparation

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ par :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \quad f(\mathrm{P}) = 3\mathrm{X}\mathrm{P} + (\mathrm{X}^2-\mathrm{X})\mathrm{P}' - (\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^2)\mathrm{P}'',$$

où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
2) Déterminer $f(\mathrm{X}^k)$ $(k \in \mathbb{N})$. Que peut-on dire du degré de $f(\mathrm{X}^k)$?
3) f est-elle injective ? surjective ?
4) a) Déterminer $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ soit stable par f ($\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant n$).
   b) n étant ainsi choisi, soit ϕ l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
   ϕ est-il diagonalisable ?

HEC 2010 S2 Correction de l'exercice

(Q1) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- La loi du couple (X,Y) est l'application de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ ou dans $[0,1]$ qui à tout élément (x,y) de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ associe $P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})$.

- Les lois marginales du couple (X,Y) sont les lois de probabilité de X et de Y.

- Soit $x\in X(\Omega)$ tel que $P(X=x)\neq 0$. La loi de Y sachant $\{X=x\}$ est l'application de $Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ ou $[0,1]$ qui à tout élément y de $Y(\Omega)$ associe $P_{\{X=x\}}(Y=y)$.
  Soit $y\in Y(\Omega)$ tel que $P(Y=y)\neq 0$. La loi de X sachant $\{Y=y\}$ est l'application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ ou $[0,1]$ qui à tout élément x de $X(\Omega)$ associe $P_{\{Y=y\}}(X=x)$.
  Les lois précédentes sont les lois conditionnelles du couple (X,Y).

⚠ Commençons par deux remarques.

R1. Soit $n\in[\![2,+\infty[\![$. Posons $H_n=\{t\in\mathbb{Z} \mid |t|\leqslant n-2 \text{ et } |t| \text{ de même parité que } n\}$.

1er cas. n est pair. $\exists k\in\mathbb{N}^*$, $n=2k$. $n-2=2(k-1)$.

Si $k\geqslant 2$ $H_n=\{0\}\cup\{2i\,;\,i\in[\![1,k-1]\!]\}\cup\{-2i\,;\,i\in[\![1,k-1]\!]\}$.

Alors $\operatorname{card} H_n = 1+k-1+k-1 = 2k-1 = n-1$

Si $k=1$ $H_n=\{0\}$. $\operatorname{card} H_n = 1$ et $n-2=2(1-1)=0$ donc $\operatorname{card} H_n = n-1$

2ème cas. n est impair. $\exists k\in\mathbb{N}^*$, $n=2k+1$. $n-2=2k-1$

$H_n=\{2i-1\,;\,i\in[\![1,k]\!]\}\cup\{-(2i-1)\,;\,i\in[\![1,k]\!]\}$

$\operatorname{card} H_n = 2k = (2k+1)-1 = n-1$

Ainsi $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $\operatorname{card} H_n = n-1$.

R2 Soit $t\in\mathbb{Z}$. Posons $K_t=\{n\in\mathbb{N} \mid |t|\leqslant n-2 \text{ et, } n \text{ et } |t| \text{ ont même parité}\}$

Notons que si $k\in\mathbb{N}$, $|t|+2k$ a même parité que $|t|$.

Réciproquement soit $i\in\mathbb{N}$ tel que $|t|+i$ a même parité que $|t|$.

Alors $(|t|+i)-|t|$ est pair donc $\exists k\in\mathbb{N}$, $i=2k$.

L'ensemble des éléments de $\mathbb{N}$ qui ont même parité que $|t|$ est $\{|t|+2k \; ; \; k\in\mathbb{N}\}$

Alors $K_t = \{|t|+2k \mid k\in\mathbb{N}$ et $|t|\leq |t|+2k-2\} = \{|t|+2k \; ; \; k\in\mathbb{N}^*\}$.

Ou encore $\underline{\underline{K_t = \{|t|+2k+2 \; ; \; k\in\mathbb{N}\}}}$

Q2 soit $n\in [\![2,+\infty[\![$. $\displaystyle\sum_{\substack{|t|\leq n-2\\ n \text{ et } |t| \text{ ont même parité}}} p^2q^{n-2} = \sum_{t\in H_n} p^2q^{n-2} = (\operatorname{card} H_n)p^2q^{n-2} = (n-1)\,p^2q^{n-2}$.

$p\in]0,1[$ et $q=1-p$ donc $|q|<1$. Alors la série de terme général nq^{n-1} converge.

Ainsi la série de terme général $(n-1)\,q^{n-2}$ converge. Il en est de même de la série de terme général $(n-1)\,p^2q^{n-2}$.

Alors $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{t\in H_n} p^2q^{n-2}$ existe

et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{t\in H_n} p^2q^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)p^2q^{n-2} \overset{n\leftarrow n+1}{=} p^2\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = p^2\times\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p^2}{p^2} = 1.$

$\underline{\underline{\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{\substack{|t|\leq n-2\\ n \text{ et } |t| \text{ de même parité}}} p^2q^{n-2} \quad \text{existe et vaut } 1.}}$

Q3 a) $(\{T=t\})_{t\in\mathbb{Z}}$ est un système complet d'événements. Alors :

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $\displaystyle P(U=n) = \sum_{t\in\mathbb{Z}} P(\{U=n\}\cap\{T=t\}) = \sum_{t\in H_n} p^2q^{n-2} = (n-1)\,p^2q^{n-2}$.

$\underline{\underline{\forall n\in[\![2,+\infty[\![, \; P(U=n) = (n-1)\,p^2q^{n-2}.}}$

b) Soit $t\in\mathbb{Z}$. $(\{U=n\})_{n\in[\![2,+\infty[\![}$ est un système complet d'événements donc

$\displaystyle P(T=t) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(\{U=n\}\cap\{T=t\}) = \sum_{n\in K_t} p^2q^{n-2}$

Pour faire plaisir aux correcteurs envisageons trois cas !! mais bon cela peut faciliter le travail des candidats.

1er cas. $t=0$. $K_t = \{2k+2 \; ; \; k\in\mathbb{N}\}$

Alors $\displaystyle P(T=t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^2q^{2k+2-2} = p^2\times\sum_{k=0}^{+\infty}(q^2)^k = p^2\times\frac{1}{1-q^2} = \frac{p}{1+q} = \frac{pq^{|0|}}{1+q}$.

<u>2e Cas.</u> $t>0$. $K_t = \{t+2k+2 \,;\, k\in\mathbb{N}\}$.

$$P(T=t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^2 q^{t+2k+2-2} = q^t P(T=0) = \frac{pq^t}{1+q} = \frac{pq^{|t|}}{1+q}.$$

<u>3e Cas.</u> $t<0$ $K_t = \{|t|+2k+2 \,;\, k\in\mathbb{N}\} = \{|-t|+2k+2 \,;\, k\in\mathbb{N}\} = K_{-t}$

Alors $P(T=t) = \sum_{n\in K_t} p^2 q^{n-2} = \sum_{n\in K_{-t}} p^2 q^{n-2} = P(T=-t) \underset{-t>0}{=} \frac{pq^{-t}}{1+q} = \frac{pq^{|t|}}{1+q}$.

Finalement $\forall t\in\mathbb{Z}$, $\boxed{P(T=t) = \frac{pq^{|t|}}{1+q}}$.

c) $\forall t\in\mathbb{N}$, $tP(T=t) = \frac{p}{1+q}\times tq^t$

$|q|<1$ donc la série de terme général $tP(T=t)$ est convergente et même absolument convergente.

$\forall t\in\mathbb{N}^*$, $-tP(T=-t) = -t\frac{p}{1+q}q^{|-t|} = -\frac{p}{1+q}tq^t$.

Donc la série de terme général $-tP(X=-t)$ est absolument convergente.

Cela doit suffire pour dire que $E(T)$ existe, non ?

De plus $E(T) = \sum_{t=0 \text{ ou } 1}^{+\infty} tP(T=t) + \sum_{t=1}^{+\infty}(-tP(T=-t)) = \sum_{t=1}^{+\infty} t\,[P(T=t)-P(T=-t)]$

Or $\forall t\in\mathbb{N}^*$, $P(T=-t)=P(T=t)$. Donc $\underline{E(T)=0}$.

<u>Exercice.</u> Montrer que $E(U)$ existe et vaut $\frac{2}{p}$ ... voir plus loin.

Q4 a) Soit $n\in[\![2,+\infty[\![$. $\forall t\in\mathbb{Z}$, $P_{\{U=n\}}(T=t) = \frac{P(\{U=n\}\cap\{T=t\})}{P(U=n)}$ ($P(U=n)\neq 0$!)

$$\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \forall t\in\mathbb{Z},\ P_{\{U=n\}}(T=t) = \begin{cases}\dfrac{p^2q^{n-2}}{(n-1)p^2q^{n-2}} & \text{si } |t|\le n-2 \text{ et si } n, |t| \text{ de même parité} \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![, \ \forall t \in \mathbb{Z}, \ P_{\{U=n\}}(T=t) = \begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{si } |t| \leq n-2 \text{ et } |t| \text{ a même parité que } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

soit $n \in [\![2,+\infty[\![$.

Remarque.. Rappelons que $H_n = \{t \in \mathbb{Z} \mid |t| \leq n-2 \text{ et } |t| \text{ a même parité que } n\}$ et que H_n a $n-1$ éléments.

Alors la loi de T sachant que $\{U=n\}$ est la loi uniforme sur H_n.

b) soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. Notons que $E(T \mid \{U=n\})$ existe car l'ensemble $\{t \in \mathbb{Z} \mid P_{\{U=n\}}(T=t) \neq 0\}$ est fini ... et est égal à H_n.

$$E(T \mid \{U=n\}) = \sum_{t \in \mathbb{Z}} t \, P_{\{U=n\}}(T=t) = \sum_{t \in H_n} t \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{t \in H_n} t .$$

Rappelons que $H_n = \{t \in \mathbb{Z} \mid |t| \leq n-2\}$.

Alors $\forall t \in \mathbb{Z}$, $t \in H_n \Leftrightarrow -t \in H_n$ donc $\sum_{t \in H_n} t = 0$. Ainsi $E(T \mid \{U=n\}) = 0$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![, \ E(T \mid \{U=n\}) = 0.$

Remarque.. Notons que ceci permet de retrouver $E(T) = 0$ avec le théorème des espérances conditionnelles.

Q5 a) $\forall n \in [\![2,+\infty[\![, \ n P(U=n) = n(n-1)p^2 q^{n-2} = p^2 n(n-1) q^{n-2}$.

$|q| < 1$ donc le cours donne la convergence de la série de terme général $n(n-1)q^{n-2}$ (série géométrique "dérivée" "deux fois").

Alors la série de terme général $n P(U=n)$ est convergente et même absolument convergente car c'est une série à termes positifs.

Ainsi $E(U)$ existe.

Remarque.. $E(U) = \sum_{n=2}^{+\infty} n P(U=n) = p^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) q^{n-2} = p^2 \times \frac{2}{(1-q)^3} = p^2 \times \frac{2}{p^3}$.

$E(U) = \frac{2}{p}$.

Pour montrer que UT possède une espérance il suffit de montrer que :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{t\in\mathbb{Z}}\left|n t P(\{U=n\}\cap\{T=t\})\right| \text{ existe ou que } \sum_{n=2}^{+\infty}\left[n\left(\sum_{t\in\mathbb{Z}}|t|\, P(\{U=n\}\cap\{T=t\})\right)\right]$$

existe ou encore que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left[n\left(\sum_{t\in H_n}|t|\, p^2q^{n-2}\right)\right]$.

Donc $E(UT)$ existe dès que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left[n p^2 q^{n-2}\sum_{t\in H_n}|t|\right]$ existe ou encore dès que

$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left[n q^{n-2}\sum_{t\in H_n}|t|\right]$ existe. Montrons alors que la série de terme général

$\displaystyle u_n = n q^{n-2}\sum_{t\in H_n}|t|$ est convergente.

Soit $n\in[\![2,+\infty[\![$. $H_n=\{t\in\mathbb{Z} \mid |t|\leq n-2$ et, n et $|t|$ ont même parité$\}$.

Rappelons que card $H_n = n-1$. De plus $\forall t\in H_n$, $|t|\leq n-2$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{t\in H_n}|t| \leq (n-1)\times(n-2)$. Alors $\displaystyle n q^{n-2}\sum_{t\in H_n}|t| \leq n(n-1)(n-2)\,q^{n-2}$.

Donc $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $0\leq u_n\leq \frac{1}{q}\, n(n-1)(n-2)\,q^{n-3}$.

Or la série de terme général $n(n-1)(n-2)q^{n-3}$ converge car $|q|<1$ (série géométrique dérivée trois fois) donc la série de terme général $\frac{1}{q}\, n(n-1)(n-2)\,q^{n-3}$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général u_n converge.

Ceci achève de montrer que **UT possède une espérance**.

Exercice.. Justifier l'existence de $E(UT)$ en montrant que :

$$\sum_{t\in\mathbb{Z}}\sum_{n=2}^{+\infty}|t n\, P(\{U=n\}\cap\{T=t\})| \text{ existe}$$

Calculer $E(UT)$.

$$E(UT) = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{t\in\mathbb{Z}} n\,t\,P(\{U=n\}\cap\{T=t\}) = \sum_{n=2}^{+\infty}\Big[n \sum_{t\in H_n} t\, p^2 q^{n-2}\Big]$$

$$E(UT) = \sum_{n=2}^{+\infty}\Big[n\,p^2 q^{n-2} \sum_{t\in H_n} t\Big]$$

Or, comme nous l'avons vu au niveau du calcul de $E(T\mid U=n)$, $\sum_{t\in H_n} t = 0$ pour tout n dans $[\![2,+\infty[\![$.

Alors $E(UT) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(n\,p^2 q^{n-2}\times 0\right) = 0$. $\underline{\underline{E(UT)=0}}$.

Alors $\mathrm{cov}(U,T) = E(UT) - E(U)E(T) = 0 - E(U)\times 0 = 0$. $\underline{\underline{\mathrm{cov}(U,T)=0}}$.

<u>Remarque</u>.. En toute rigueur et pour être conforme au programme il aurait fallu montrer que U et T possède un moment d'ordre 2 pour justifier que $\mathrm{cov}(U,T)$ existe. Ceci n'est pas très difficile et est à faire en exercice. Notons néanmoins que l'existence de $E(UT)$, $E(U)$ et $E(T)$ suffit car $\mathrm{cov}(U,T) = E\big((U-E(U))(T-E(T))\big)$ ...

<u>b)</u> $P(\{U=2\}\cap\{T=1\}) = 0$ car $|1| > 2-2$.

Or $P(U=2)P(T=1) = \left((2-1)p^2 q^{2-2}\right)\left(\dfrac{p\,q^{|1|}}{1+q}\right) = \dfrac{p^3 q}{1+q} \neq 0$.

Alors $P(\{U=2\}\cap\{T=1\}) \neq P(U=2)\,P(T=1)$.

Donc <u>U et T ne sont pas indépendantes</u>... et pourtant $\mathrm{cov}(U,T)=0$.

/

R..

Question 2 HEC 2010 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit f l' application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = 3XP + (X^2 - X)P' - (X^3 - X^2)P''$, où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q2. Déterminer $f(X^k)$ ($k \in \mathbb{N}$). Que peut-on dire du degré de $f(X^k)$?

Q3. f est injective ? surjective ?

Q4. a) Déterminer n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathbb{R}_n[X]$ soit stable par f.

b) n étant ainsi choisi, soit ϕ l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_n[X]$. ϕ est-il diagonalisable ?

Q1 * si $P \in \mathbb{R}[X]$, $3XP + (X^2-X)P' - (X^3-X^2)P''$ appartient à $\mathbb{R}[X]$.

f est une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$

* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$.

$f(\lambda P+Q) = 3X(\lambda P+Q) + (X^2-X)(\lambda P+Q)' - (X^3-X^2)(\lambda P+Q)''$

$f(\lambda P+Q) = 3X(\lambda P+Q) + (X^2-X)(\lambda P'+Q') - (X^3-X^2)(\lambda P''+Q'')$.

$f(\lambda P+Q) = \lambda(3XP + (X^2-X)P' - (X^3-X^2)P'') + (3XQ + (X^2-X)Q' - (X^3-X^2)Q'')$

$f(\lambda P+Q) = \lambda f(P) + f(Q)$. f est linéaire.

Ainsi f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q2 $f(1) = 3X$, $f(X) = 3X^2 + X^2 - X = 4X^2 - X$.

$\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $f(X^k) = 3X^{k+1} + (X^2-X)kX^{k-1} - (X^3-X^2)k(k-1)X^{k-2}$.

$\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $f(X^k) = (-k^2+2k+3)X^{k+1} + (k^2-2k)X^k$

En fait $\forall k \in \mathbb{N}$, $f(X^k) = (-k^2+2k+3)X^{k+1} + (k^2-2k)X^k$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $-k^2+2k+3 = 0 \iff k = -1$ ou $k = 3 \iff k = 3$.

$\forall k \in \mathbb{N} - \{3\}$, $\deg f(X^k) = k+1$.

$f(X^3) = 3X^3$ donc $\deg f(X^3) = 3$

Q3 * $f(X^2) = (-4+4+3)X^3 + (4-4)X^2 = 3X^3 = f(X^3)$. f n'est pas injective.

* $f(P)(0)=0$ donc $\operatorname{Im} f \subset \{Q \in \mathbb{R}[X] \mid Q(0)=0\}$.

Ainsi $X+1 \notin \operatorname{Im} f$. f n'est pas surjective.

Q3 a) Soit $n \in \mathbb{N}-\{3\}$. $X^n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\deg f(X^n) = n+1$. $X^n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $f(X^n) \notin \mathbb{R}_n[X]$

Si $n \in \mathbb{N}-\{3\}$, $\mathbb{R}_n[X]$ n'est pas stable par f.

$f(\mathbb{R}_3[X]) = f(\operatorname{Vect}(1, X, X^2, X^3)) = \operatorname{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3))$

$f(\mathbb{R}_3[X]) = \operatorname{Vect}(3X, 4X^2-X, 3X^3, 3X^3) = \operatorname{Vect}(X, 4X^2-X, X^3) = \operatorname{Vect}(X, X^2, X^3) \subset \mathbb{R}_3[X]$.

$\mathbb{R}_3[X]$ est stable par f.

b) $n=3$. Soit $\mathcal{B}=(1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

$\varphi(1) = 3X$, $\varphi(X) = 4X^2 - X$, $\varphi(X^2) = \varphi(X^3) = 3X^3$

$A = M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. A est triangulaire inférieure.

$\operatorname{Sp}\varphi = \operatorname{Sp} A = \{-1, 0, 3\}$. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un élément de $\mathbb{R}_3[X]$.

$\varphi(P) = -P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -d \\ 3d - c = -c \\ 4c = -b \\ 3b + 3a = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b = -4c \\ a = -\frac{3}{4} b = 3c \end{cases}$

$SEP(\varphi, -1) = \{3cX^3 - 4cX^2 + cX \,;\, c \in \mathbb{R}\}$; $SEP(\varphi, -1) = \operatorname{Vect}(3X^3 - 4X^2 + X)$

$\varphi(P) = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} 3d - c = 0 \\ 4c = 0 \\ 3b + 3a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \\ b = -a \end{cases}$

$SEP(\varphi, 0) = \{aX^3 - aX^2 \,;\, a \in \mathbb{R}\}$; $SEP(\varphi, 0) = \operatorname{Vect}(X^3 - X^2)$.

$\varphi(P) = 3P \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 3d \\ 3d - c = 3c \\ 4c = 3b \\ 3b + 3a = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$. $SEP(\varphi, 3) = \operatorname{Vect}(X^3)$.

$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}\varphi} \dim SEP(\varphi, \lambda) = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$. φ n'est pas diagonalisable.