Sujet S 3 - Exercice

Soit a, b, c, α quatre nombres réels tels que $a \neq b$ et f l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$f(P) = (X-a)(X-b)P' + \alpha(X-c)P.$$

1) Question de cours : Equations différentielles $h'(x) = h(x)g(x)$.

2) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant n$ (en attribuant au polynôme nul le degré $-\infty$). Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, α, n pour que $\mathbb{R}_n[X]$ soit stable par f, c'est-à-dire que $f(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

Dans toute la suite du problème, on suppose cette condition réalisée et on note f_n l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_n[X]$.

4) Soit λ un réel.

a) Trouver deux réels A et B indépendants de x, qu'on exprimera en fonction de n, a, b, c, λ, tels que :

$$\forall x \notin \{a, b\},\ \frac{nx - nc + \lambda}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}.$$

b) Donner toutes les valeurs de λ telles que $(x-a)^A(x-b)^B$ soit un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

5) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f_n.

f_n est-il diagonalisable ? f_n est-il bijectif ?

Sujet S 3 - Exercice sans préparation

1) Soit n un entier strictement supérieur à 3.

n personnes jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée et de façon indépendante. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ qu'on précisera.

Quelle est la probabilité qu'une personne exactement obtienne un résultat différent des $n-1$ autres personnes (événement noté A) ?

2) Un jeu consiste à réitérer l'expérience précédente (appelée "partie") jusqu'à la réalisation de A. On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Soit X la variable aléatoire à valeurs entières désignant le nombre de parties jouées si le jeu s'arrête et prenant la valeur 0 sinon. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

HEC 2010 S 3 Correction de l'exercice

Q1 I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

g est une application continue de I dans $\mathbb{R}$ et G est une primitive de g sur I.

$\mathcal{S}_g$ est l'ensemble des applications h de I dans $\mathbb{R}$, dérivables sur I et telles que $\forall x\in I,\ h'(x)=h(x)\,g(x)$.

Soit h une application de I dans $\mathbb{R}$.

$h\in\mathcal{S} \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\ h(x)=\lambda e^{G(x)}$.

Q2 • f est une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

• Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $(P,Q)\in\mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X]$.

$f(\lambda P+Q)=(X-a)(X-b)(\lambda P+Q)'+\alpha(X-c)(\lambda P+Q)=(X-a)(X-b)(\lambda P'+Q')+\alpha(X-c)(\lambda P+Q)$.

$f(\lambda P+Q)=\lambda\left[(X-a)(X-b)P'+\alpha(X-c)P\right]+(X-a)(X-b)Q'+\alpha(X-c)Q=\lambda f(P)+f(Q)$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(P,Q)\in E^2,\ f(\lambda P+Q)=\lambda f(P)+f(Q)$. f est linéaire.

Donc f est un endomorphisme de E.

Q3 • $f(1)=\alpha(X-c)$. Si $\alpha\neq 0$ $\deg f(1)=1$ et si $\alpha=0$, $f(1)=0_{\mathbb{R}[X]}$.

• $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ f(X^k)=(X-a)(X-b)kX^{k-1}+\alpha(X-c)X^k$.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $\deg f(X^k)\leq k+1$ car $\deg(X-a)(X-b)X^{k-1}=\deg(X-c)X^k=k+1$.

Le coefficient de X^{k+1} dans $f(X^k)$ est $k+\alpha$.

Donc si $k+\alpha\neq 0$ $\deg f(X^k)=k+1$ et si $k+\alpha=0$ $\deg f(X^k)\leq k$.

Notons que ce résultat vaut pour $k=0$.

Donc $\forall k\in\mathbb{N},\ \deg f(X^k)=k+1$ si $k+\alpha\neq 0$ et $\deg f(X^k)\leq k$ si $k+\alpha=0$.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

1er cas.. $n+\alpha\neq 0$. Alors $X^n\in\mathbb{R}_n[X]$ et $f(X^n)\notin\mathbb{R}_n[X]$ car $\deg f(X^n)=n+1$

donc $\mathbb{R}_n[X]$ n'est pas stable par f.

2ème cas.. $n+\alpha=0$.

Alors $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $k+\alpha\neq 0$ donc $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $\deg f(X^k)=k+1$... au moins si $n\geq 1$.

Par conséquent $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $f(X^k)\in\mathbb{R}_n[X]$

comme $n+\alpha=0$ $\deg f(X^n)\leq n$; $f(X^n)\in\mathbb{R}_n[X]$

Par conséquent $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $f(X^k)\in\mathbb{R}_n[X]$.

$f(\mathbb{R}_n[X])=f(\mathrm{Vect}(1,X,\dots,X^n))=\mathrm{Vect}(f(1),f(X),\dots,f(X^n))\subset\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f.

Finalement, si $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f si et seulement si $\alpha=-n$.

Dans toute la suite $\alpha=-n$, n étant un élément de $\mathbb{N}$.

Q4 $\lambda\in\mathbb{R}$.

a] $\forall x\in\mathbb{R}-\{a,b\}$, $\dfrac{nx-nc+\lambda}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}$.

$\Updownarrow$

$\forall x\in\mathbb{R}-\{a,b\}$, $nx-nc+\lambda=A(x-b)+B(x-a)$

$\Updownarrow$

$\forall x\in\mathbb{R}-\{a,b\}$, $(n-A-B)x-nc+\lambda+Ab+Ba=0$ (1)

(1) entraîne que le polynôme $(n-A-B)X-nc+\lambda+Ab+Ba$ admet une infinité de racines,

donc est le polynôme nul et ainsi $n-A-B=-nc+\lambda+Ab+Ba=0$.

Réciproquement si $n-A-B=-nc+\lambda+Ab+Ba=0$ (1) est vérifiée.

Donc $\forall x\in\mathbb{R}-\{a,b\}$, $\dfrac{nx-nc+\lambda}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}\Leftrightarrow\begin{cases}n-A-B=0\\-nc+\lambda+Ab+Ba=0\end{cases}$ (2)

(2) $\Leftrightarrow\begin{cases}B=n-A\\0=-nc+\lambda+Ab+a(n-A)=(b-a)A-nc+\lambda+an\end{cases}$. Rappelons que $a\neq b$. Alors:

(2) $\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{nc-an-\lambda}{b-a}\\B=n-\dfrac{nc-an-\lambda}{b-a}=\dfrac{nb-na-nc+na+\lambda}{b-a}=\dfrac{nb-nc+\lambda}{b-a}\end{cases}$.

donc $\forall x \in \mathbb{R}-\{a,b\}$, $\dfrac{nx-nc+\lambda}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} \iff \begin{cases} A = \dfrac{nc-na-\lambda}{b-a} \\ B = \dfrac{nb-nc+\lambda}{b-a} \end{cases}$.

Ainsi si $A = \dfrac{nc-na-\lambda}{b-a}$ et si $B = \dfrac{nb-nc+\lambda}{b-a}$ alors :

$\forall x \in \mathbb{R}-\{a,b\}$, $\dfrac{nx-nc+\lambda}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b}$.

b) Notons que $A+B = \dfrac{1}{b-a}(nc-na-\lambda+nb-nc+\lambda) = \dfrac{n(b-a)}{b-a} = n$.

donc $B = n-A$.

Ainsi $(x-a)^A(x-b)^B$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $A \in [\![0,n]\!]$.

Alors $(x-a)^A(x-b)^B$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si :

$\exists k \in [\![0,n]\!]$, $\dfrac{nc-na-\lambda}{b-a} = k$ donc si et seulement si $\exists k \in [\![0,n]\!]$, $\lambda = nc-na+k(b-a)$.

$(x-a)^A(x-b)^B$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $\exists k \in [\![0,n]\!]$, $\lambda = nc-na+k(b-a)$.

Q5 Trouvons les valeurs propres et les sous-espaces propres de f_n.

<u>Version 1</u>.. Pour faire plaisir aux concepteurs, mais la méthode n'est pas des meilleures.

- Soit λ une valeur propre de f_n et P un vecteur propre associé.

  $P \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ et $f_n(P) = \lambda P$.

  $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-a)(x-b)P' - n(x-c)P = \lambda P$. Posons $M = \max(a,b)$ et $I =]M,+\infty[$.

  $\forall x \in I$, $P'(x) = \dfrac{nx-nc+\lambda}{(x-a)(x-b)} P(x) = \left(\dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b}\right) P(x)$.

  De plus $x \mapsto A\ln(x-a) + B\ln(x-b)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b}$ sur I.

  Alors Q1 montre que $\exists d \in \mathbb{R}^*$, $\forall x \in I$, $P(x) = d\, e^{A\ln(x-a)+B\ln(x-b)}$

  $P \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$

  donc $\forall x \in I$, $P(x) = d(x-a)^A(x-b)^B$.

Comme P est polynomiale et que $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(x-a)^A(x-b)^B$ est polynomiale (... sur I).

Donc $\exists k \in [\![0,n]\!]$, $\lambda = nc - na + k(a-b)$.

De plus $A = \frac{nc-na-\lambda}{b-a} = \frac{nc-na-nc+na-k(a-b)}{b-a} = k$ et $B = n-k$.

Alors $P = \alpha(X-a)^k(X-b)^{n-k}$

Ainsi $\forall P \in SEP(f_n,\lambda)$, $P \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]} \Rightarrow P \in Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k})$.

Mieux $\forall P \in SEP(f_n,\lambda)$, $P \in Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k})$. $SEP(f_n,\lambda) \subset Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k})$.

Or $SEP(f_n,\lambda) \neq \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$ donc $\dim SEP(f_n,\lambda) \geqslant 1$.

De plus $SEP(f_n,\lambda) \subset Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k})$ et $\dim Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k}) = 1$.

Alors $SEP(f_n,\lambda) \subset Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k})$ et $\dim SEP(f_n,\lambda) = 1 = \dim Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k})$.

Par conséquent $SEP(f_n,\lambda) = Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k})$.

Résumons cette première étape.

<u>Si $\lambda \in Sp f_n$: $\exists k \in [\![0,n]\!]$, $\lambda = nc-na+k(a-b)$ et $SEP(f_n,\lambda) = Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k})$.</u>

- Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Posons $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$. $P_k \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

$f_n(P_k) = (X-a)(X-b)\left[k(X-a)^{k-1}(X-b)^{n-k} + (X-a)^k(n-k)(X-b)^{n-k-1}\right] - n(X-c)P_k$ (à deux petits abus près : $k=0$ et $k=n$).

Alors $f_n(P_k) = k(X-b)P_k + (n-k)(X-a)P_k - n(X-c)P_k$.

$f_n(P_k) = (kX - kb + (n-k)X - (n-k)a - nX + nc)P_k$.

$f_n(P_k) = (-kb - na + ka + nc)P_k = (nc - na + k(a-b))P_k$ et $P_k \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$

Ainsi $nc - na + k(a-b)$ est valeur propre de f_n et ceci pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

Les deux étapes précédentes montrent que

1) $\underline{\underline{Sp f_n = \{nc - na + k(a-b) \,/\, k \in [\![0,n]\!]\}}}$.

2) $\underline{\underline{\forall k \in [\![0,n]\!],\ SEP(f_n, nc-na+k(a-b)) = Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k})}}$.

<u>Version 2</u> Une version plus naturelle qui pourrait être utilisée si l'on remplaçait $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$... Supposons $n \geqslant 1$. Je vous laisse le cas $n = 0$!

- Soit $\lambda \in Sp\, f_n$. Soit P un vecteur propre associé. $P \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Soit r le degré de P et a_r le coefficient de X^r dans P. $a_r \neq 0$.

$(X-a)(X-b)P' - n(X-c)P = \lambda P$ car $f_n(P) = \lambda P$.

Le coefficient de X^{r+1} dans $(X-a)(X-b)P' - n(X-c)P$ est $ra_r - na_r$

le coefficient de X^{r+1} dans λP est 0.

Alors $ra_r - na_r = 0$. Comme a_r n'est pas nul : $r = n$. P est de degré n.

Soit δ une racine de P dans $\mathbb{C}$. Supposons que $\delta \neq a$ et $\delta \neq b$.

Soit i l'ordre de multiplicité de δ dans P.

$(X-a)(X-b)P' = (\lambda + n(X-c))P$ et $(X-\delta)^i$ divise $(\lambda + n(X-c))P$ car il divise P.

Donc $(X-\delta)^i$ divise $(X-a)(X-b)P'$. Comme $\delta \neq a$ et $\delta \neq b$, $(X-\delta)^i$ divise P'.

Alors δ est racine d'ordre au moins i de P' et d'ordre i de P. Ceci est impossible.

Les seuls zéros possibles de P dans $\mathbb{C}$ sont a et b. Or P est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et appartient à $\mathbb{R}_n[X] - \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$.

Alors $\exists d \in \mathbb{R}^*, \exists k \in \mathbb{N}, \exists k' \in \mathbb{N}$, $P = d(X-a)^k(X-b)^{k'}$.

Mais $\deg P = n$, alors $k \in [\![0, n]\!]$ et $k' = n-k$. $P = d(X-a)^k(X-b)^{n-k}$.

Donc $P \in \text{Vect}((X-a)^k(X-b)^{n-k})$.

$SEP(f_n, \lambda)$ est contenu dans la droite vectorielle engendrée par $(X-a)^k(X-b)^{n-k}$.

Comme $SEP(f_n, \lambda)$ est au moins de dimension 1 : $SEP(f_n, \lambda) = \text{Vect}((X-a)^k(X-b)^{n-k})$.

Nous venons donc de montrer que si $\lambda \in Sp\, f_n$ <u>il existe k dans $[\![0, n]\!]$ tel que $SEP(f_n, \lambda) = \text{Vect}((X-a)^k(X-b)^{n-k})$</u>. Notons que nous avons rien dit sur la valeur de λ...

- Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Posons $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$.

Un calcul simple, déjà fait dans la version 1 montre que $f_n(P_k) = (nc - na + k(a-b))P_k$.

Comme P_k n'est pas nul, $nc-na+k(a-b)$ est une valeur propre de f_n et $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$ est un vecteur propre de f_n associé à cette valeur propre. Ceci étant vrai pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

De ces deux étapes il résulte que :

1) $Sp f_n = \{nc-na+k(a-b) ;\ k \in [\![0,n]\!]\}$.

2) $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $SEP(f_n, nc-na+k(a-b)) = Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k})$.

Nous avons ainsi retrouvé le résultat de la version 1

$a \neq b$ donc f_n admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes.

Comme f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$: f_n est diagonalisable.

f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\dim \mathbb{R}_n[X] < +\infty$. Alors :

f_n bijectif $\Leftrightarrow$ f_n injectif $\Leftrightarrow$ $0 \notin Sp f_n \Leftrightarrow$ il n'existe pas k dans $[\![0,n]\!]$ tel que $nc-na+k(a-b)=0$

f_n bijectif $\Leftrightarrow$ il n'existe pas k dans $[\![0,n]\!]$ tel que $k = \dfrac{na-nc}{a-b}$.

f_n est bijectif si et seulement si $\dfrac{na-nc}{a-b} \notin [\![0,n]\!]$.

Ré.

Question 3 HEC 2010 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Q1. Soit n un entier strictement supérieur à 3.

n personnes jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée et de façon indépendante. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on précisera.

Quelle est la probabilité qu'une personne exactement obtienne un résultat différent des $n-1$ autres personnes (événement noté A) ?

Q2. Un jeu consiste à réitérer l'expérience précédente (appelée "partie") jusqu'à la réalisation de A. On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X la variable aléatoire à valeurs entières désignant le nombre de parties jouées si le jeu s'arrête et prenant la valeur 0 sinon. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

Q1 $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P est la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$ notons A'_i (resp. A''_i) l'événement la i^e personne obtient pile (resp. face) et les autres face (resp. pile).

$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A'_i \cup A''_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A'_i \cup A''_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A'_i) + \sum_{i=1}^{n} P(A''_i)$ par incompatibilité.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(A'_i) = P(A''_i) = \frac{1}{2^n}$. $\quad P(A) = 2 \times \frac{n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Q2 $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = \frac{n}{2^{n-1}} \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^{k-1}$ (loi géométrique !!).

$P(X=0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1 - \frac{n}{2^{n-1}} \frac{1}{1-\left(1-\frac{n}{2^{n-1}}\right)} = 1 - 1 = 0$!!

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = \frac{n}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^{k-1}$ et $P(X=0) = 0$.

Nous pouvons sans doute dire que $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)$.

$E(X) = \frac{2^{n-1}}{n}$ $\quad V(X) = \left(\frac{2^{n-1}}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)$.