HEC 2010 S4

Sujet S 4 - Exercice

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Si $P \in E$, on note $u(P)$ le polynôme Q tel que, pour tout x réel, $Q(x) = P(x+1)$.

1) Question de cours : Définition et propriétés d'une matrice inversible.

2) a) Montrer que u définit un endomorphisme de E.

   b) Déterminer la matrice A de u dans la base canonique de E.
   Justifier l'existence de A^{-1} et la calculer.

   c) Déterminer A^2.

   d) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

3) a) Déterminer, selon les valeurs du réel a, tous les polynômes P de E tels que pour tout x réel,

$$P(x+1) + aP(x) = 0$$

   b) Déterminer, selon les valeurs des réels a et b, tous les polynômes P de E tels que pour tout x réel,

$$P(x+2) + aP(x+1) + bP(x) = 0$$

4) On note $d = u - \mathrm{Id}_E$, où Id_E désigne l'endomorphisme identité de E.

   a) Déterminer $\mathrm{Im}\, d$. Que vaut d^{n+1} ? (d^{n+1} désigne l'endomorphisme $d \circ d \circ \cdots \circ d$ la lettre d étant répétée $n+1$ fois).

   b) En déduire l'existence de $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que, pour tout P appartenant à E et tout x réel,

$$P(x+n+1) = \sum_{k=0}^{n} a_k P(x+k)$$

   c) Si $P \in E$, on pose $s(P) = X.d(P)$. Montrer qu'on définit ainsi un endomorphisme de E.
   Cet endomorphisme s est-il diagonalisable ?

Sujet S 4 - Exercice sans préparation

1) Montrer qu'il existe un réel c pour lequel la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{c}{1+x^2}$$

est une densité de probabilité.

2) Une variable aléatoire réelle ayant une telle densité possède-t-elle une espérance ?

3) Montrer que si X est une variable aléatoire réelle de densité f, X et $1/X$ ont même loi.

HEC 2010 S4 Correction de l'exercice.

Q1 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- A est inversible si $\exists A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AA' = A'A = I_n$.

- Si A est inversible, $\exists!\, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AA' = A'A = I_n$; A' est l'inverse de A et se note A^{-1}

- Les assertions suivantes sont équivalentes.

  i) A est inversible

  ii') $\exists A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\quad AA' = A'A = I_n$

  ii) $\exists A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AA' = I_n$

  iii) $\exists A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A'A = I_n$

  iv) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$

  v) $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = Y$

  vi) $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists!\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = Y$

  vii) A est la matrice d'un automorphisme

  viii) $\mathrm{rg}\, A = n$

  ix) 0 n'est pas valeur propre de A.

  x) A admet une réduite de Gauss inversible.

- Si A et B sont deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

- Si A est inversible, A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$

- A est inversible si et seulement si ${}^tA$ est inversible

- Si A est inversible, ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

- Si A est triangulaire, A est inversible si et seulement si les éléments de sa diagonale sont non nuls.

- Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$

Si $ad - bc \neq 0$, A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Q2 Nous disons que $\forall P \in E$, $u(P) = P(X+1)$

a) • u est une application de E dans E

• $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P,Q) \in E^2$, $u(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + Q(X+1) = \lambda u(P) + u(Q)$

u est linéaire.

Ainsi u est un endomorphisme de E.

b) $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $u(X^k) = (X+1)^k = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} X^\ell$.

Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice de u dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de E

$A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $\forall (i,j) \in [\![1,n+1]\!]$, $a_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

A est triangulaire supérieure et tous les éléments de sa diagonale sont égaux à 1. Ainsi $\mathrm{Sp}\,A = \{1\}$. Donc 0 n'est pas valeur propre de A (!) et ainsi A est inversible. Déterminons A^{-1}.

V1 $\mathcal{B}' = (1, (X+1), (X+1)^2, \dots, (X+1)^n)$ est une famille d'éléments de E, non nuls et de degrés échelonnés. $\mathcal{B}'$ est donc une famille libre de cardinal $n+1$ de E qui est de dimension $n+1$. Alors $\mathcal{B}'$ est une base de E.

Notons alors que A est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Alors A^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Or $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $X^k = (X+1-1)^k = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (-1)^{k-\ell} (X+1)^\ell$

Ainsi $A^{-1} = (a'_{i,j})$ avec $\forall (i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2$, $a'_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} (-1)^{j-i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

V2 Notons que u est un automorphisme de E car A est inversible.

$\forall P \in E$, $u(P(X-1)) = P((X-1)+1) = P(X)$. Alors $\forall P \in E$, $P(X-1) = u^{-1}(P)$.

$\forall P \in E$, $u^{-1}(P) = P(X-1)$.

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $u^{-1}(X^k) = (X-1)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (-1)^{k-\ell} X^\ell$. Comme $A^{-1} = \Pi_B(u^{-1})$:

$A^{-1} = (a'_{i,j})$ avec $\forall (i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2$, $a'_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} (-1)^{j-i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

c) A^c est la matrice de $u \circ u$ dans B.

$\forall P \in E$, $(u \circ u)(P) = u(P(X+1)) = P(X+c)$.

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $(u \circ u)(X^k) = (X+c)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} c^{k-\ell} X^\ell$.

Alors $A^c = (b_{i,j})$ avec $\forall (i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2$, $b_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} c^{j-i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

d) Rappelons que A est triangulaire supérieure et que tous ses éléments diagonaux sont égaux à 1. Alors $Sp\, A = \{1\}$ donc $Sp\, u = \{1\}$.

Supposons que u est diagonalisable. Alors $E = SEP(u,1) = Ker(u - Id_E)$.

Donc $u - Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $u = Id_E$.

$n \geq 1$. Alors $X \in E$ et $X = u(X) = X+1$!!

Ainsi u n'est pas diagonalisable.

Q3 a) Rappelons que $Sp\, u = \{1\}$.

Ainsi $\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$, $Ker(u - \lambda Id_E) = \{0_E\}$.

On a également $\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $Ker(u + \lambda Id_E) = \{0_E\}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $P \in E$.

$P(X+1) + a P(X) = 0_E \Leftrightarrow u(P) + aP = 0_E \Leftrightarrow (u + a Id_E)(P) = 0_E \Leftrightarrow P \in Ker(u + a Id_E)$.

1er cas. $a \neq -1$. Alors $P(X+1) + a P(X) = 0_E \Leftrightarrow P = 0_E$.

2ème cas. $a = -1$. $P(X+1) + a P(X) = 0_E \Leftrightarrow P(X+1) - P(X) = 0_E \Leftrightarrow P(X+1) = P(X)$

$P(X+1) + a P(X) = 0_E \Leftrightarrow u(P) = P$.

→ Supposons que $u(P) = P$.

1er cas.. P est constant alors $P \in \mathbb{R}_0[X]$

2ème cas.. $\deg P \geq 1$. Alors P admet au moins une racine α dans $\mathbb{C}$.

$u(P) = P$. $P(X+1) = P(X)$. Ainsi $P(\alpha+1) = P(\alpha) = 0$.

Une récurrence simple donne $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(\alpha+n) = 0$.

Alors P admet une infinité de racine. Ceci contredit $\deg P \geq 1$.

Finalement si $P \in u(P) = P$: $P \in \mathbb{R}_0[X]$.

→ Réciproquement supposons que $P \in \mathbb{R}_0[X]$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $P(X) = \lambda$.

$u(P) = P(X+1) = \lambda = P$. Par conséquent : $\{P \in E \mid u(P) = P\} = \mathbb{R}_0[X]$.

Ainsi pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{P \in E \mid P(X+1) + aP = 0_E\} = \begin{cases} \mathbb{R}_0[X] & \text{si } a = -1 \\ \{0_E\} & \text{sinon} \end{cases}$.

Remarque.. Notons que nous avons montré que $SEP(u, 1) = \mathbb{R}_0[X]$. Ce qui confirme que u n'est pas diagonalisable...

b) $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. $\forall P \in E$, $P(X+2) + aP(X+1) + bP = u^2(P) + au(P) + bP = (u^2 + au + b\,Id_E)(P)$

$\forall P \in E$, $P(X+2) + aP(X+1) + bP = 0_E \Leftrightarrow P \in \mathrm{Ker}\,(u^2 + au + b\,Id_E)$.

La matrice de $u^2 + au + b\,Id_E$ est $A^2 + aA + bI_n$.

Notons que A^2, A et I_n sont trois matrices triangulaires dont les éléments diagonaux sont égaux à 1, non ?

Alors $A^2 + aA + bI_n$ est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont $1+a+b$. Alors $Sp(A^2 + aA + bI_n) = \{1+a+b\}$.

Ainsi $Sp(u^2 + au + b\,Id_E) = \{1+a+b\}$.

Alors $\mathrm{Ker}\,(u^2 + au + b\,Id_E) = \{0_E\} \Leftrightarrow 1+a+b \neq 0$.

Si $1+a+b \neq 0$: $P(X+2) + aP(X+1) + bP = 0_E \Leftrightarrow P = 0_E$. Supposons $1+a+b = 0$.

$b = -1-a$ donc $u^2+au+b\,\mathrm{Id}_E = u^2-\mathrm{Id}_E + a(u-\mathrm{Id}_E) = (u+\mathrm{Id}_E)\circ(u-\mathrm{Id}_E) + a(u-\mathrm{Id}_E)$

$\uparrow u\circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ u$

$u^2+au+b\,\mathrm{Id}_E = (u+(1+a)\mathrm{Id}_E)\circ(u-\mathrm{Id}_E)$.

Soit $P\in E$.

$P\in \mathrm{Ker}(u^2+au+b\,\mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow (u+(1+a)\mathrm{Id}_E)((u-\mathrm{Id}_E)(P)) = 0_E \Leftrightarrow (u-\mathrm{Id}_E)(P)\in \mathrm{Ker}(u+(1+a)\mathrm{Id}_E)$.

i) Supposons $1+a\neq -1$ donc $a\neq -2$. Alors $\mathrm{Ker}(u+(1+a)\mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.

$P\in \mathrm{Ker}(u^2+au+b\,\mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow (u-\mathrm{Id}_E)(P) = 0_E \Leftrightarrow P\in \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow P\in \mathbb{R}_0[X]$.

Dans ce cas $\{P\in E \mid P(X+2)+aP(X+1)+bP = 0_E\} = \mathbb{R}_0[X]$.

ii) Supposons que $1+a=-1$ donc que $a=-2$. Comme $1+a+b=0$: $b=1$.

$u^2+au+b\,\mathrm{Id}_E = (u-\mathrm{Id}_E)\circ(u-\mathrm{Id}_E)$.

$\mathrm{Ker}(u^2+au+b\,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}((u-\mathrm{Id}_E)\circ(u-\mathrm{Id}_E))$.

Alors $\forall P\in E$, $P\in\mathrm{Ker}(u^2+au+b\,\mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow (u-\mathrm{Id}_E)(P)\in \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow u(P)-P\in\mathbb{R}_0[X]$.

Cherchons $\mathcal{S} = \{P\in E \mid u(P)-P\in\mathbb{R}_0[X]\}$. Soit $P\in\mathcal{S}$. Supposons que $\deg P\geqslant 2$.

Alors $\exists \lambda\in\mathbb{R}$, $u(P)-P=\lambda$. $P(X+1)-P=\lambda$ Posons $r=\deg P$. $r\geqslant 2$.

$\exists (a_0,a_1,\dots,a_r)\in\mathbb{R}^{r+1}$, $P=\sum_{k=0}^{r} a_k X^k$ et $a_r\neq 0$

$\lambda = \sum_{k=0}^{r} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{r} a_k X^k = \sum_{k=1}^{r} a_k\left[(X+1)^k - X^k\right]$.

$\forall k\in[\![1,r]\!]$, $(X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}X^i$ donc $\forall k\in[\![1,r]\!]$, $\deg\left[(X+1)^k-X^k\right] = k-1$.

Comme $a_r\neq 0$ alors $\deg\left(\sum_{k=1}^{r} a_k\left[(X+1)^k-X^k\right]\right) = r-1 \geqslant 2-1 = 1$. Donc

$\sum_{k=1}^{r} a_k\left[(X+1)^k-X^k\right]$ ne peut pas être égal à λ.

Alors $\mathcal{S}\subset\mathbb{R}_1[X]$. Soit $P\in\mathbb{R}_1[X]$. $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $P=\alpha X+\beta$.

$u(P)-P = P(X+1)-P = \alpha(X+1)+\beta-\alpha X-\beta = \alpha \in \mathbb{R}_0[X]$; $P \in \mathcal{S}$.

Finalement $\mathcal{S} = \mathbb{R}_1[X]$.

Avant de conclure, notons que si $1+a+b=0$: $a=-2 \Leftrightarrow b=1$.

$$\{P \in E \mid P(X+2)+aP(X+1)+bP(X)\} = \begin{cases} \{0_E\} & \text{si } 1+a+b \neq 0 \\ \mathbb{R}_0[X] & \text{si } 1+a+b=0 \text{ et } a \neq -2 \\ \mathbb{R}_1[X] & \text{si } a=-2 \text{ et } b=1 \end{cases}$$

Q4 a) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. $d(\mathbb{R}_k[X]) = d(\mathrm{Vect}(1,X,\dots,X^k)) = \mathrm{Vect}(d(1),d(X),\dots,d(X^k))$.

Or $d(1)=0$ car $1 \in \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$.

$\forall i \in [\![1,k]\!]$, $d(X^i) = u(X^i)-X^i = (X+1)^i - X^i = \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i}{\ell} X^\ell$.

Donc $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $\deg d(X^i) = i-1$.

Alors $(d(X),d(X^2),\dots,d(X^k))$ est une famille d'éléments non nuls de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ de degrés échelonnés. C'est donc une famille libre de cardinal k qui est la dimension de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Ainsi $(d(X),d(X^2),\dots,d(X^k))$ est une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Alors $\underline{d(\mathbb{R}_k[X]) = \mathbb{R}_{k-1}[X]}$ et ceci pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. (*)

En particulier : $\mathrm{Im}\, d = d(E) = d(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. $\underline{\mathrm{Im}\, d = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

Une récurrence très simple montre à partir de (*) que $\forall q \in [\![0,n-1]\!]$, $d^q(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-q}[X]$

Alors $d^q(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_0[X]$.

Or $\mathbb{R}_0[X] = \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\, d$. Alors $d^{n+1}(\mathbb{R}_n[X]) = d(\mathbb{R}_0[X]) = \{0_E\}$.

$d^{n+1}(E) = \{0_E\}$. $\underline{d^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}}$.

b) $0_{\mathcal{L}(E)} = d^{n+1} = (u-\mathrm{Id}_E)^{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ u\circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ u}}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^k \circ (-\mathrm{Id}_E)^{n+1-k}$.

Alors $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k} u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Donc $\binom{n+1}{n+1}(-1)^{n+1-(n+1)} u^{n+1} = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k} u^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k}(-1)^{n-k} u^k$.

$u^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k}(-1)^{n-k} u^k$.

Notons que $\forall i \in \mathbb{N}, \forall P \in E, u^i(P) = P(X+i)$.

Alors $\forall P \in E, P(X+n+1) = u^{n+1}(P) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k}(-1)^{n-k} u^k(P) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k}(-1)^{n-k} P(X+k)$.

$\forall P \in E,\ P(X+n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k}(-1)^{n-k} P(X+k)$.

Donc $\exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall P \in E,\ P(X+n+1) = \sum_{k=0}^{n} a_k P(X+k)$.

c) • Nous avons vu que $\operatorname{Im} d = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Alors $\forall P \in E, d(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $\forall P \in E, s(P) = X d(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

$\forall P \in E, s(P) \in E$. s est une application de E dans E.

• $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P,Q) \in E^2, s(\lambda P + Q) = X d(\lambda P + Q) = X(\lambda d(P) + d(Q)) = \lambda X d(P) + X d(Q) = \lambda s(P) + s(Q)$.

Ainsi s est linéaire.

Finalement s est un endomorphisme de E.

$s(1) = X d(1) = 0_E$. $s(X) = X(X+1-X) = X$. $\forall k \in [\![2,n]\!], s(X^k) = X[(X+1)^k - X^k] = X \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$,

$\forall k \in [\![2,n]\!],\ s(X^k) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^{i+1} = \binom{k}{k-1} X^k + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} X^{i+1} = k X^k + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} X^{i+1}$.

Ceci permet de dire que la matrice A' de s dans la base $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ est triangulaire supérieure et que ses éléments diagonaux sont $0, 1, 2, \dots, n$.

Alors $\operatorname{Sp} A' = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. $A' \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et A' possède $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes donc A' est diagonalisable. Ainsi s est diagonalisable.

R..

Question 4 **HEC 2010** $\boxed{\text{F 2}}$

Q1. Montrer qu'il existe un réel c pour lequel la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{c}{1+x^2}$ est une densité de probabilité.

Q2. Une variable aléatoire réelle ayant une telle densité possède-t-elle une espérance ?

Q3. Montrer que si X est une variable aléatoire réelle de densité f, X et $\dfrac{1}{X}$ ont même loi.

Q1 * f est continue sur $\mathbb{R}$.

* f est positive sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $c \geqslant 0$.

* $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{dt}{1+t^2} = \lim\limits_{A\to+\infty} (\operatorname{Arctan} A) = \frac{\pi}{2}$; $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ existe et vaut $\frac{\pi}{2}$.

Par parité $\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2}$ existe et vaut $\frac{\pi}{2}$. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ existe et vaut π

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut $c\pi$. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{\pi}$.

Comme $\frac{1}{\pi} \geqslant 0$ (!!), <u>f est une densité de probabilité si et seulement si $c = \frac{1}{\pi}$.</u>

Q2 $\forall A \in \mathbb{R}^+$, $\int_0^A x f(x)\,dx = \int_0^A \frac{1}{\pi} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^A = \frac{\ln(1+A^2)}{2\pi}$.

$\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A x f(x)\,dx = +\infty$. $\int_0^{+\infty} x f(x)\,dx$ diverge ; $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ également.

<u>X n'a pas d'espérance.</u>

Q3 Soit $x \in \mathbb{R}$.

<u>1er cas</u>.. $x < 0$. $\{\frac{1}{X} \leqslant x\} = \{X < 0\} \cap \{\frac{1}{x} \leqslant X\} = \{\frac{1}{x} \leqslant X < 0\} = X^{-1}([\frac{1}{x}, 0[)$

Alors 1) $\{\frac{1}{X} \leqslant x\} = X^{-1}([\frac{1}{x}, 0[) \in \mathcal{A}$ car X est une variable aléatoire.

2) $P(\frac{1}{X} \leqslant x) = P(\frac{1}{x} \leqslant X < 0) = P(X<0) - P(X < \frac{1}{x}) = P(X \leqslant 0) - P(X \leqslant \frac{1}{x})$.

<u>$P(\frac{1}{X} \leqslant x) = F_X(0) - F_X(\frac{1}{x})$</u> ($F_X$ étant la fonction de répartition de X)

<u>2e cas</u>.. $x = 0$ $\{\frac{1}{X} \leqslant x\} = \{\frac{1}{X} \leqslant 0\} = \{X \leqslant 0\} = X^{-1}(]-\infty, 0])$

1) $\{\frac{1}{X} \leqslant x\} = X^{-1}(]-\infty, 0]) \in \mathcal{A}$.

2) <u>$P(\frac{1}{X} \leqslant x) = P(X \leqslant 0) = F_X(0)$.</u>

3ème cas. $x>0$ $\{\frac{1}{X}\leq x\} = \{X<0\} \cup (\{X>0\}\cap\{\frac{1}{x}\leq X\})$

$\{\frac{1}{X}\leq x\} = \{X<0\} \cup \{X\geq\frac{1}{x}\} = \underbrace{X^{-1}(]-\infty,0[)}_{\in\mathcal{A}} \cup \underbrace{X^{-1}([\frac{1}{x},+\infty[)}_{\in\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$

1) $\{\frac{1}{X}\leq x\}\in\mathcal{A}$

2) $P(\frac{1}{X}\leq x) = P(X<0)+P(X\geq\frac{1}{x}) = P(X\leq 0)+1-P(X<\frac{1}{x}) = P(X\leq 0)+1-P(X\leq\frac{1}{x})$

$P(\frac{1}{X}\leq x) = F_X(0)+1-F_X(\frac{1}{x})$.

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R}$, $\{\frac{1}{X}\leq x\}\in\mathcal{A}$ donc $\frac{1}{X}$ est une variable aléatoire.

De plus $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_{1/X}(x) = \begin{cases} F_X(0)-F_X(\frac{1}{x}) & \text{si } x\in]-\infty,0[\\ F_X(0) & \text{si } x=0 \\ F_X(0)+1-F_X(\frac{1}{x}) & \text{si } x\in]0,+\infty[\end{cases}$.

$\forall z\in\mathbb{R}$, $F_X(z) = \int_{-\infty}^{z}\frac{1/\pi}{1+t^2}\,dt = \lim_{A\to-\infty}\left[\frac{1}{\pi}\arctan t\right]_A^z = \lim_{A\to-\infty}\left[\frac{1}{\pi}\arctan z-\frac{1}{\pi}\arctan A\right]$.

$\forall z\in\mathbb{R}$, $F_X(z) = \frac{1}{\pi}\arctan z-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan z+\frac{\pi}{2}\right)$. En particulier $F_X(0)=\frac{1}{2}$.

Rappelons que $\forall z\in\mathbb{R}^*$, $\arctan z+\arctan\frac{1}{z} = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } z>0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } z<0 \end{cases}$ (*)

Soit x dans $\mathbb{R}$. Montrons que $F_{1/X}(x)=F_X(x)$.

. C'est clair pour $x=0$.

. Supposons $x>0$. $F_{1/X}(x) = F_X(0)+1-F_X(1/x) = \frac{1}{2}+1-\frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$

$F_{1/X}(x) = 1-\frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{x} = 1-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan x+\pi-\frac{\pi}{2}\right)$

$F_{1/X}(x) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan x+\frac{\pi}{2}\right) = F_X(x)$.

. Supposons $x<0$. $F_{1/X}(x) = F_X(0)-F_X(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{1}{x}+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)$

$F_{1/X}(x) = -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}-\arctan x\right) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan x+\frac{\pi}{2}\right) = F_X(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $F_{1/X}(x)=F_X(x)$. X et $1/X$ ont même loi.

Exercice.. Démontrer (*) (on pourra dériver).