Sujet S 5 - Exercice

1) Question de cours : Rappeler la définition d'une série convergente. Démontrer qu'une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Cette équivalence demeure-t-elle valable pour les séries à termes réels de signe quelconque ?

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles positives.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$\left\{\begin{array}{lcl} m_n & = & \min\{u_n, v_n\} \\ \mathrm{M}_n & = & \max\{u_n, v_n\} \end{array}\right.$$
Démontrer que, si les séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ sont convergentes, les séries $\sum_{n\geqslant 1} m_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{M}_n$ le sont aussi, et leurs sommes vérifient : $\sum_{n=1}^{+\infty} m_n + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{M}_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

3) On suppose **désormais** que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left\{\begin{array}{lcl} u_n & = & \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} \\ v_n & = & \dfrac{4}{5^n} \end{array}\right.$.

   a) Démontrer que les deux séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ sont convergentes, et que leurs sommes sont égales.

   b) Prouver que, pour tout $n \geqslant 2$, on a : $v_n \leqslant u_n$.

4) Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les évènements $[\mathrm{X}_n = u_n]$ et $[\mathrm{X}_n = v_n]$ soient des parties complémentaires de Ω, de même probabilité $\frac{1}{2}$.

   a) Démontrer que, pour tout $\omega \in \Omega$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{X}_n(\omega)$ est convergente et que sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{X}_n(\omega)$ est comprise entre $\frac{8}{15}$ et $\frac{22}{15}$.

   b) Démontrer que $\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{X}_n = \frac{22}{15}\right]$ et $\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{X}_n = 1\right]$ sont des événements de probabilité nulle.

Sujet S 5 - Exercice sans préparation

1) La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

2) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E tel que u^2 soit un projecteur de rang égal à 1.

   a) Montrer que 0 est valeur propre de u et que u possède au plus une autre valeur propre, égale à $+1$ ou à -1.

   b) Montrer que, si u admet 1 pour valeur propre et n'est pas lui-même un projecteur, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est A.

HEC 2010 S5 Correction de l'exercice

(Q1) Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de réels.

→ La série de terme général u_n converge si la suite de terme général $\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ converge.

→ On suppose que $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $u_n \geq 0$. On pose $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$, $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

$\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$. La suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ est croissante ; ainsi, elle converge si et seulement si elle est majorée.

Par conséquent la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

→ Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 1$. Alors la suite de terme général u_n ne converge pas vers 0 donc la série de terme général u_n diverge.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = \frac{1}{2}[1-(-1)^{n+1}] = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq S_n \leq 1$. Donc $(S_n)_{n\geq 0}$ est majorée et même bornée.

Le résultat précédent ne vaut pas pour les séries à termes réels de signe quelconque.

(Q2) 1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq m_n \leq u_n$ et $0 \leq \Pi_n \leq u_n + v_n$.

2) Les séries de termes généraux u_n et $u_n + v_n$ convergent car les séries de termes généraux u_n et v_n convergent.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que les séries de termes généraux m_n et Π_n convergent.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $u_n \leq v_n$: $m_n = u_n$ et $\Pi_n = v_n$ donc $m_n + \Pi_n = u_n + v_n$.

Si $u_n > v_n$: $m_n = v_n$ et $\Pi_n = u_n$ donc $m_n + \Pi_n = v_n + u_n = u_n + v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $m_n + \Pi_n = u_n + v_n$.

R.

$\sum_{n=1}^{+\infty} m_n + \sum_{n=1}^{+\infty} n_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (m_n + n_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n+v_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ car toutes les séries convergent.

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} m_n + \sum_{n=1}^{+\infty} n_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

Q3 a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)} = 2 \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right] = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right)$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n\to+\infty} \left(2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right)\right) = 1$.

La série de terme général u_n converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

$\left|\frac{1}{5}\right| < 1$ donc la série de terme général $\left(\frac{1}{5}\right)^n$ converge alors la série de terme général $v_n = \frac{4}{5^n}$ converge.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{5^n} = \frac{4}{5} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{4}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n} = \frac{4}{5} \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = 1.$$

La série de terme général v_n converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 1$.

Les séries de termes généraux u_n et v_n convergent et ont même somme.

b) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.

$v_n \leq u_n \iff \frac{4}{5^n} \leq \frac{2}{(n+1)(n+2)} \iff 2(n+1)(n+2) \leq 5^n$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $2(n+1)(n+2) \leq 5^n$.

- Si $n=2$ $2(n+1)(n+2) = 24$ et $5^n = 25$ donc $2(n+1)(n+2) \leq 5^n$. La propriété est vraie pour $n=2$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément n de $[\![2, +\infty[\![$ et montrons la pour $n+1$.

$5^n \geq 2(n+1)(n+2)$ donc $5^{n+1} \geq 10(n+1)(n+2) = 10(n+1)(n+2) - 2(n+2)(n+3) + 2(n+2)(n+3)$.

Alors $5^{n+1} \geq 2(n+2)(n+3) + 2(n+2)[5n+5-n-3] = 2(n+2)(n+3) + \underbrace{2(n+2)(4n+2)}_{\geq 0}$.

Alors $5^{n+1} \geq 2(n+2)(n+3) = 2((n+1)+1)((n+1)+2)$. Ceci achève la récurrence.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2 \Rightarrow 5^n \geq 2(n+1)(n+2) > 0$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\dfrac{1}{5^n} \leq \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$. $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\dfrac{4}{5^n} \leq \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$

Alors $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $v_n \leq u_n$.

Variante. $v_n = u_n$ donne $5^n = 2(n+1)(n+2)$ ce qui est impossible si $n \geq 1$ pour des raisons de parité...

Remarques 1. Si nous utilisons la récurrence il est clair que nous avons aussi pu montrer que : $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $v_n < u_n$. Ce qui est précieux pour la définition des X_n dans Q4...

2°. $u_1 = \frac{1}{3}$ et $v_1 = \frac{4}{5}$ donc $u_1 < v_1$.

Si $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\min(u_n, v_n) = \begin{cases} u_1 & \text{si } n=1 \\ v_n & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$ et $\max(u_n, v_n) = \begin{cases} v_1 & \text{si } n = 1 \\ u_n & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

Q4 a) Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $m_n = \min(u_n, v_n)$ et $M_n = \max(u_n, v_n)$.

Les séries de termes généraux u_n et v_n convergent et sont à termes positifs donc les séries de terme généraux m_n et M_n convergent.

Soit $\omega \in \Omega$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\omega) \in \{u_n, v_n\}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq X_n(\omega) \leq \max(u_n, v_n) \leq M_n$. Comme la série de terme général M_n converge, la série de terme général $X_n(\omega)$ converge d'après les règles de comparaison sur les séries à termes positifs.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $m_n = \min(u_n, v_n) \leq X_n(\omega) \leq M_n$.

Alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} m_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} M_n$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} m_n = u_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} v_n = u_1 - v_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{1}{3} - \frac{4}{5} + 1 = \frac{1}{15}(5-12+15) = \frac{8}{15}$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} M_n = v_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = v_1 - u_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{15}(12-5+15) = \frac{22}{15}$.

Ainsi $\forall \omega \in \Omega$, $\displaystyle\frac{8}{15} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) \leq \frac{22}{15}$.

b] Soit $\omega \in \Omega$. Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\omega) \in \{u_n, v_n\}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\omega) \leq \max(u_n, v_n) = M_n$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{M_n - X_n(\omega) \geq 0}$. Rappelons encore que $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n = \frac{22}{15}$. Alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) = \frac{22}{15}$$

$$\Updownarrow$$

$$0 = \frac{22}{15} - \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} M_n - \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} (M_n - X_n(\omega))$$

$$\Updownarrow \ \underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_n - X_n(\omega) \geq 0}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_n - X_n(\omega) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n(\omega) = M_n.$$

Ainsi $\{\omega \in \Omega \mid \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) = \frac{22}{15}\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = M_n\}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\{X_n = M_n\} \in \mathcal{B}$ (X_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$).

Alors $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = M_n\} \in \mathcal{B}$ car $\mathcal{B}$ est stable par intersection dénombrable.

Alors $P(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n = \frac{22}{15}) = P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = M_n\})$

$\forall r \in [\![2, +\infty[\![$, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = M_n\} \subset \bigcap_{n=2}^{r} \{X_n = M_n\} = \bigcap_{n=2}^{r} \{X_n = u_n\}$. Soit $r \in [\![2, +\infty[\![$

Alors $0 \leq P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = M_n\}) \leq P(\bigcap_{n=2}^{r} \{X_n = u_n\}) = \prod_{n=2}^{r} P(X_n = u_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$.

$X_2, X_3, \dots, X_r$ sont indépendantes

$\forall r \in [\![2, +\infty[\![$, $0 \leq P(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n = \frac{22}{15}) = P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = M_n\}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$

En faisant tendre r vers $+\infty$ il vient $\underline{\underline{P(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n = \frac{22}{15}) = 0}}$.

<u>Soit $\omega \in \Omega$</u>

- Observons que si ($\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\omega) = u_n$) ou ($\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\omega) = v_n$) alors
$\sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) = 1$ car $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$. Montrons la réciproque.

• Supposons que $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) = 1$.

<u>1er cas..</u> $X_1(\omega) = u_1$.

Alors $\sum_{n=2}^{+\infty} X_n(\omega) = 1 - X_1(\omega) = 1 - u_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n - u_1 = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.

Donc $\sum_{n=2}^{+\infty} (X_n(\omega) - u_n) = 0$. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$, $X_n(\omega) \in \{u_n, v_n\}$ et $u_n \geq v_n$.

Alors $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $X_n(\omega) - u_n \leq 0$.

Comme $\sum_{n=2}^{+\infty} (X_n(\omega) - u_n) = 0$: $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $X_n(\omega) - u_n = 0$.

Alors $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $X_n(\omega) = u_n$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\omega) = u_n$ car $X_1(\omega) = u_1$.

<u>2e cas..</u> $X_1(\omega) = v_1$.

$\sum_{n=2}^{+\infty} X_n(\omega) = 1 - X_1(\omega) = 1 - v_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n - v_1 = \sum_{n=2}^{+\infty} v_n$. Alors $\sum_{n=2}^{+\infty} (X_n(\omega) - v_n) = 0$.

De plus $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $X_n(\omega) \in \{u_n, v_n\}$ et $v_n \leq u_n$.

Alors $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $X_n(\omega) - v_n \geq 0$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} (X_n(\omega) - v_n) \geq 0$

Donc $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $X_n(\omega) - v_n = 0$. $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $X_n(\omega) = v_n$. De plus $X_1(\omega) = v_1$.

Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\omega) = v_n$. Ceci achève de montrer que :

$\{\omega \in \Omega \mid \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) = 1\} = \{\omega \in \Omega \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, X_n(\omega) = u_n\} \cup \{\omega \in \Omega \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, X_n(\omega) = v_n\}$.

$\{\omega \in \Omega \mid \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) = 1\} = \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} X_n^{-1}(\{u_n\})\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} X_n^{-1}(\{v_n\})\right)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n^{-1}(\{u_n\}) \in \mathcal{B}$ et $X_n^{-1}(\{v_n\}) \in \mathcal{B}$ car pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, X_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

Comme $\mathcal{B}$ est stable par intersection dénombrable et réunion finie on peut dire que $\{\omega \in \Omega \mid \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) = 1\} \in \mathcal{B}$.

Notons que $\bigcap_{n=1}^{+\infty} X_n^{-1}(\{u_n\})$ et $\bigcap_{n=1}^{+\infty} X_n^{-1}(\{v_n\})$ sont disjoints.

Alors $P\left(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n = 1\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = u_n\}\right) + P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = v_n\}\right)$.

$\forall r \in \mathbb{N}^*$, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = u_n\} \subset \bigcap_{n=1}^{r} \{X_n = u_n\}$.

Donc $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = u_n\}\right) \leq P\left(\bigcap_{n=1}^{r} \{X_n = u_n\}\right) = \prod_{n=1}^{r} P(X_n = u_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^r$

$X_1, X_2, \dots, X_r$ sont indépendantes.

En faisant tendre r vers $+\infty$ il vient $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = u_n\}\right) = 0$

On montre de même que $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = v_n\}\right) = 0$.

Alors $\underline{\underline{P\left(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n = 1\right) = 0}}$.

R..

Question 5 HEC 2010 $\boxed{\text{F 2}}$

Q1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Q2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E tel que u^2 soit un projecteur de rang égal à 1.

a) Montrer que 0 est valeur propre de u et que u possède une autre valeur* propre, égale à 1 ou à -1.

b) Montrer que si u admet 1 pour valeur propre et n'est pas lui-même un projecteur, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est A.

le texte disait "au plus une autre"...

Q1 A est triangulaire supérieure. $\mathrm{Sp}\,A = \{0,1\}$. Soit (E_1,E_2,E_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

(E_1,E_2) est libre

• $\mathrm{rg}\,A = \dim \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \dim \mathrm{Vect}(E_1,E_2) = 2.$

Alors $\dim \mathrm{SEP}(A,0) = 3 - \mathrm{rg}\,A = 1$... et $\mathrm{SEP}(A,0) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$.

• $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\mathrm{rg}(A-I_3) = \dim \mathrm{Vect}(-E_1, E_1 - E_3) = \dim \mathrm{Vect}(E_1,E_3) = 2.$

Alors $\dim \mathrm{SEP}(A,1) = 3 - \mathrm{rg}(A-I_3) = 1$ ... et $\mathrm{SEP}(A,1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}A} \dim \mathrm{SEP}(A,\lambda) = 2 \neq 3$. <u>$A$ n'est pas diagonalisable.</u>

Q2 a) $\mathrm{rg}\,u^2 = 1 \neq 3$ donc u^2 n'est pas bijectif. Alors u n'est pas bijectif (u bijectif $\Rightarrow u \circ u$ bijectif). Comme $\dim E < +\infty$ u n'est pas injectif.

Ainsi <u>0 est valeur propre de u.</u>

$u^4 = (u^2)^2 = u^2$ car u^2 est un projecteur ; $u^4 - u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $X^4 - X^2$ est un polynôme annulateur de u dont les zéros sont 0, 1 et -1.

Ainsi <u>$\mathrm{Sp}\,u \subset \{0,1,-1\}$.</u>

$1 \in \mathrm{Sp}\,u^2$ et $\dim \mathrm{SEP}(u^2,1) = 1$ car u^2 est une projection de rang 1

($\mathrm{Im}\,u^2 = \mathrm{Ker}(u^2 - \mathrm{Id}_E)$ et $\dim \mathrm{Im}\,u^2 = 1$).

Soit x un vecteur propre de u^2 associé à la valeur propre 1. $x \neq 0_E$!

Posons $x_1 = \frac{1}{2}(x + u(x))$ et $x_2 = \frac{1}{2}(x - u(x))$.

$u(x_1) = \frac{1}{2}(u(x)+u^2(x)) = \frac{1}{2}(u(x)+x) = x_1$. $u(x_2) = \frac{1}{2}(u(x)-u^2(x)) = \frac{1}{2}(u(x)-x) = -x_2$

Supposons que $x_1 = x_2 = 0$. Alors $u(x) = -x$ et $u(x) = x$. $x = -x$; $x = 0_E$!

Donc $x_1 \neq 0_E$ ou $x_2 \neq 0_E$. Comme $u(x_1) = x_1$ et $u(x_2) = -x_2$ alors

ou 1 est valeur propre de u ou -1 est valeur propre de u.

<u>0 est valeur propre de u et u possède une autre valeur propre égale à 1 ou à -1.</u>

Pour éviter les doutes montrons que $\mathrm{Sp}\, u = \{0,1\}$ ou $\{0,-1\}$.

D'après ce qui précède il suffit de montrer que 1 et -1 ne sont pas simultanément valeurs propres de u. Supposons le contraire. Soit z_1 (resp. z_2) un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1 (resp. -1).

(z_1, z_2) est libre (vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ...)

$u^2(z_1) = 1^2 z_1 = z_1$ et $u^2(z_2) = (-1)^2 z_2 = z_2$. (z_1, z_2) est une famille libre de

$SEP(u^2, 1) = \mathrm{Ker}(u^2 - Id_E) = \mathrm{Im}\, u^2$ et dim $\mathrm{Im}\, u^2 = 1$!!

Finalement $\mathrm{Sp}\, u = \{0,1\}$ ou $\{0,-1\}$.

Remarque.. On aurait pu obtenir ce résultat en montrant que $\mathrm{Ker}(u^2 - Id_E) = \mathrm{Ker}(u - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(u + Id_E)$

Analyse.

b) * Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E telle que $M_{\mathcal{B}}(u) = A$.

Alors $u(e_1) = 0_E$, $u(e_2) = e_2$, $u(e_3) = e_1$. $0_E = u(e_1) = u^2(e_3)$

Donc $e_1 = u(e_3)$ (ainsi $u(e_3) \neq 0_E$), $e_2 \in SEP(u,1)$, $e_3 \in \mathrm{Ker}\, u^2$.

Ainsi $e_1 = u(e_3)$, $e_3 \notin \mathrm{Ker}\, u$, $e_3 \in \mathrm{Ker}\, u^2$ et $e_2 \in SEP(u,1)$.

Synthèse ou construction d'une base solution.

*. Soit e_2 un élément non nul de $SEP(u,1)$.

. $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u^2$. Montrons par l'absurde que $\mathrm{Ker}\, u \subsetneq \mathrm{Ker}\, u^2$.

Supposons que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$. Alors $\dim \mathrm{Ker}\, u = \dim \mathrm{Ker}\, u^2 = 3 - \mathrm{rg}\, u^2 = 3 - 1 = 2$

Ainsi $\dim SEP(u,0) = 2$.

Ici $Sp\,u = \{0,1\}$. Nous avons $\dim SEP(u,0) = 2$ et $\dim SEP(u,1) \geq 1$.

Comme $\dim E = 3$: $\dim SEP(u,1) = 1$.

$\dim SEP(u,0) + \dim SEP(u,1) = \dim E$. u est diagonalisable.

mieux il existe une base de E telle que la matrice de u dans cette base est $A' = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. $A'^2 = A'$; $u^2 = u$; u est un projecteur !

Ainsi $\operatorname{Ker} u \subsetneq \operatorname{Ker} u^2$. Soit e_3 un élément de $\operatorname{Ker} u^2$ n'appartenant pas à $\operatorname{Ker} u$. Posons $e_1 = u(e_3)$. $e_1 \neq 0_E$ car $e_3 \in \operatorname{Ker} u$.

$u(e_2) = e_2$. $u(e_3) = e_1$, $u(e_1) = u^2(e_3) = 0_E$. Montrons que (e_1, e_2, e_3) est une base de E. $\dim E = 3$, il suffit donc de montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_E$.

$0_E = u^2(0_E) = \alpha u^2(e_1) + \beta u^2(e_2) + \gamma u^2(e_3) = \alpha u(0_E) + \beta e_2 + \gamma . 0_E = \beta e_2$.

Or e_2 n'est pas nul donc $\beta = 0$.

$\alpha e_1 + \gamma e_3 = 0_E$. Alors $0_E = u(0_E) = \alpha u(e_1) + \gamma u(e_3) = \gamma u(e_3)$.

$\gamma u(e_3) = 0_E$ et $u(e_3) \neq 0_E$ car $e_3 \notin \operatorname{Ker} u$ donc $\gamma = 0$.

Alors $\alpha e_1 = 0_E$ avec $e_1 \neq 0_E$. $\alpha = 0$.

Ceci achève de montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.

De plus $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} = A$.