Sujet S 6 - Exercice

1) Question de cours : Rappeler les formules de Taylor-Lagrange (égalité et inégalité), ainsi que leurs conditions de validité.

2) On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

a) Calculer la dérivée à droite de f en 0.

b) Montrer que f est une densité de probabilité.

c) Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, admettant f pour densité. Montrer que X possède une espérance et une variance, et les calculer.

3) Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, de même loi, admettant pour densité une fonction g continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, 0]$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et possédant une dérivée à droite non nulle en 0, égale à c.

a) Justifier le développement limité, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures :

$$\mathbb{P}\left([\mathrm{X}_1 \leqslant x]\right) = \frac{c}{2}x^2 + o(x^2) \quad .$$

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\mathrm{Y}_n = \inf\{\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n\}$.

i) Démontrer que la suite $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0 quand n tend vers l'infini.

ii) Trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement positifs tels que $a_n\mathrm{Y}_n$ converge en loi vers la variable aléatoire X de la question 2 quand n tend vers l'infini.

Sujet S 6 - Exercice sans préparation

Pour toute matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note $f(\mathrm{M})$ la matrice $\begin{pmatrix} c'' & b'' & a'' \\ c' & b' & a' \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

1) Montrer que f est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Trouver les valeurs propres de f.

3) a) Montrer que, pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, le rang de $f(\mathrm{M})$ est égal au rang de M.

b) Cette propriété de préservation du rang est-elle vraie pour tous les automorphismes de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

HEC 2010 S 6 Correction de l'exercice

Q1 I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. f est une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. a est un élément de I.

- $\forall x \in I - \{a\}$, $\exists c_x \in]\overset{\hookrightarrow}{a}, x[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)$. (1)

- $\forall x \in I$, $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{u \in [\overset{\hookrightarrow}{a}, x]} |f^{(n+1)}(u)|$ (2)

(1) est la formule de Taylor-Lagrange. (2) est l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Q2 a) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x e^{-x^2/2} - 0}{x - 0} \right) = \lim_{x \to 0} e^{-x^2/2} = 1$.

Ainsi f est dérivable à droite en 0 et le nombre dérivé à droite de f en 0 est 1.

Remarque. - f est dérivable à gauche de 0 et le nombre dérivé à gauche de f en 0 est 0. Ainsi f n'est pas dérivable en 0.

b) - f est définie et positive sur $\mathbb{R}$.

- $x \mapsto 0$ et $x \mapsto x e^{-x^2/2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Exercice. - Notons que f est continue sur $\mathbb{R}$.

- $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ converge et vaut 0. Notons que $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = x e^{-x^2/2}$

Ainsi f est continue sur $[0, +\infty[$ et $\forall A \in [0, +\infty[$, $\int_0^A f(t)\,dt = \left[-e^{-t^2/2} \right]_0^A = 1 - e^{-A^2/2}$.

Alors $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A f(t)\,dt = \lim_{A \to +\infty} (1 - e^{-A^2/2}) = 1$. $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1. Ceci achève de montrer que f est une densité de probabilité.

SI Pour gagner du temps nous allons d'abord montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$ $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t/2}\,dt$ converge et que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} = n\, I_{n-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\forall t \in [0, +\infty[,\ q_n(t) = t^n e^{-t/2}$.

- q_n est continue sur $[0, +\infty[$. donc on peut aussi dire que $\int_0^1 q_n(t)\,dt$ existe !
- $\lim_{t \to +\infty} (t^2 q_n(t)) = \lim_{t \to +\infty} \left(2^{\frac{n+2}{2}} \dfrac{(t^2/2)^{\frac{n+2}{2}}}{e^{t/2}} \right) = 0$ par croissance comparée.

Donc $\quad * \quad q_n(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$;

$\quad * \quad \forall t \in [1, +\infty[,\ q_n(t) \geqslant 0$ et $\frac{1}{t^2} \geqslant 0$;

$\quad * \quad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} q_n(t)\,dt$ converge.

donc $\int_0^{+\infty} q_n(t)\,dt$ converge et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$. I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall t \in [0, +\infty[,\ u(t) = t^n$ et $v(t) = -e^{-t/2}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et $\forall t \in [0, +\infty[,\ u'(t) = n t^{n-1}$ et $v'(t) = \frac{1}{2} e^{-t/2}$.
ceci justifie l'intégration par parties qui suit. Soit $A \in]0, +\infty[$.

$$\int_0^A q_{n+1}(t)\,dt = \int_0^A t^n \left(\tfrac{1}{2} e^{-t/2}\right) dt = \left[t^n \left(-e^{-t/2}\right) \right]_0^A - \int_0^A n t^{n-1} \left(-e^{-t/2}\right) dt.$$

$$\int_0^A q_{n+1}(t)\,dt = -A^n e^{-A/2} + n \int_0^A q_{n-1}(t)\,dt.$$

$\int_0^{+\infty} q_{n+1}(t)\,dt$ converge, $\int_0^{+\infty} q_{n-1}(t)\,dt$ converge et $\lim_{A \to +\infty} (A^n e^{-A/2}) = \lim_{A \to +\infty} \left(2^n \dfrac{(A/2)^n}{e^{A/2}} \right) = 0$

par croissance comparée.

Donc en faisant tendre A vers $+\infty$ il vient $\int_0^{+\infty} q_{n+1}(t)\,dt = n \int_0^{+\infty} q_{n-1}(t)\,dt$ et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

ou $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} = n\, I_{n-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\int_{-\infty}^0 t^n f(t)\,dt$ existe et vaut 0.

$\forall t \in [0, +\infty[,\ t^n f(t) = q_{n+1}(t)$ donc $\int_0^{+\infty} t^n f(t)\,dt$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} q_{n+1}(t)\,dt$.

Alors pour tout n dans $\mathbb{N}$, X possède un moment d'ordre n... que nous notons $m_n(X)$.

Donc X possède une espérance et une variance.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} g_2(t)\,dt = \int_0^{+\infty} g_{1+1}(t)\,dt = 1 \times \int_0^{+\infty} g_0(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt.$$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt = 1$ car $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. Par parité $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt = \frac{1}{2}$.

Alors $E(X) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{2\pi} \times \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. $\underline{E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} g_{2+1}(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} g_{2-1}(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 2\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2.$$

$\underline{E(X^2) = 2}$. Alors $V(X) = 2 - \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2$. $\underline{V(X) = 2 - \frac{\pi}{2}}$.

Exercice.. Calculer $m_n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(Q3) g est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction de répartition F_{X_3} de X_3 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $F'_{X_3} = g$.

Notons F la restriction de F_{X_3} à $[0,+\infty[$. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \in [0,+\infty[$, $F'(x) = g(x)$. Comme g possède une dérivable à droite en 0 qui vaut 0, F' est dérivable en 0 et $F''(0) = c$.

F est deux fois dérivable en 0 donc la formule de Taylor-Young permet d'écrire : $F(x) \underset{x \to 0}{=} F(0) + (x-0)F'(0) + \frac{(x-0)^2}{2} F''(0) + o(x^2)$.

$F(0) = F_{X_3}(0) = \int_{-\infty}^{0} g(t)\,dt = 0$. $F'(0) = F'_{X_3}(0) = g(0)$. $F''(0) = c$.

g est continue en 0 et nulle sur $]-\infty, 0]$. Ainsi $g(0) = \lim_{x \to 0^-} g(x) = 0$.

Alors $F(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{c}{2} x^2 + o(x^2)$. donc $F_{X_3}(x) \underset{x \to 0^+}{=} \frac{c}{2} x^2 + o(x^2)$.

...

Finalement $P(X_1 \leq x) \underset{x \to 0^+}{=} \frac{c}{2} x^2 + o(x^2)$.

b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(|Y_n - 0| \geq \varepsilon) = P(\{Y_n \leq -\varepsilon\} \cup \{Y_n \geq \varepsilon\})$

$P(|Y_n - 0| \geq \varepsilon) = P(Y_n \leq -\varepsilon) + P(Y_n \geq \varepsilon)$.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et ont même loi.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $P(Y_n \leq x) = 1 - P(Y_n > x) = 1 - P(\{X_1 > x\} \cap \{X_2 > x\} \cap \dots \cap \{X_n > x\}) \overset{\text{ind}}{=} 1 - (P(X_1 > x))^n$.

$P(Y_n \leq x) = 1 - (1 - P(X_1 \leq x))^n = 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n$; $\underline{P(Y_n \leq x) = 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n}$.

$P(Y_n \geq x) = P(\{X_1 \geq x\} \cap \{X_2 \geq x\} \cap \dots \cap \{X_n \geq x\}) = [P(X_1 \geq x)]^n = (1 - P(X_1 < x))^n = (1 - P(X_1 \leq x))^n$

$\uparrow$ $X_1, X_2, \dots, X_n$ ont même loi et sont indépendantes.

$\underline{P(Y_n \geq x) = (1 - P(X_1 \leq x))^n = (1 - F_{X_1}(x))^n}$.

Alors $\underline{P(Y_n \geq \varepsilon) = (1 - P(X_1 \leq \varepsilon))^n}$. $\underline{P(Y_n \leq -\varepsilon) = 1 - (1 - F_{X_1}(-\varepsilon))^n}$.

$F_{X_1}(-\varepsilon) = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} g(t)\,dt = 0$ car g est nulle sur $]-\infty, 0]$. Donc $P(Y_n \leq -\varepsilon) = 1 - (1-0)^n = 0$ ce qui n'est pas une grande surprise ! Y_n prend des valeurs positives presque sûrement...

Finalement : $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(|Y_n - 0| \geq \varepsilon) = (1 - P(X_1 \leq \varepsilon))^n}$.

Supposons que $P(X_1 \leq \varepsilon) = 0$. Alors $F_{X_1}(\varepsilon) = 0$.

Comme F_{X_1} est croissante : $\forall x \in [0, \varepsilon]$, $0 \leq F_{X_1}(x) \leq F_{X_1}(\varepsilon) = 0$. $\forall x \in [0, \varepsilon]$, $F_{X_1}(x) = 0$.

Alors $\forall x \in [0, \varepsilon]$, $P(X_1 \leq x) = 0$.

donc $\lim_{x \to 0^+} \frac{P(X_1 \leq x)}{x^2} = 0$. Or $P(X_1 \leq x) \underset{x \to 0^+}{=} \frac{c}{2} x^2 + o(x^2)$ et $\frac{c}{2} > 0$.

Donc $P(X_1 \leq x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{c}{2} x^2$. Alors $\lim_{x \to 0^+} \frac{P(X_1 \leq x)}{x^2} = \frac{c}{2}$. Ainsi $0 = \frac{c}{2}$!!

Finalement $P(X_1 \leq \varepsilon) > 0$. Donc $0 < P(X_1 \leq \varepsilon) \leq 1$. Alors $0 \leq 1 - P(X_1 \leq \varepsilon) < 1$

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} P(|Y_n - 0| \geq \varepsilon) = \lim_{n \to +\infty} (1 - P(X_1 \leq \varepsilon))^n = 0$ ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Par conséquent $\underline{(Y_n)_{n \geq 1}}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 0.

ii) Notons F la fonction de répartition de X. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

$\forall x \in]0, +\infty[$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} t e^{-t^2/2}\,dt = \left[-e^{-t^2/2}\right]_0^x = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0] \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$. Notons que F est continue à tout point de $\mathbb{R}$ car elle est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $Z_n = a_n Y_n$ et notons F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leq x) = P(a_n Y_n \leq x) \underset{a_n > 0}{=} P\left(Y_n \leq \frac{x}{a_n}\right) = F_{Y_n}\left(\frac{x}{a_n}\right) = 1 - \left(1 - F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right)^n$.

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right) = \int_{-\infty}^{x/a_n} g(t)\,dt = 0$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 - F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right)^n \text{ si } x \in]0, +\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Notons que $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $\lim_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) = 0 = F(x)$. ⊙ ($F_{Z_n}(x) = 0$!)

Ainsi $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X

⇕

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) = F(x)$

⊙ ⇕

$\forall x \in]0, +\infty[$, $\lim_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) = F(x)$

⇕

$\forall x \in]0, +\infty[$, $\lim_{n \to +\infty} \left[1 - \left(1 - F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right)^n\right] = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$.

⇕

$\forall x \in]0, +\infty[$, $\lim_{n \to +\infty} \left(1 - F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right)^n = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $X \iff \forall x \in]0,+\infty[$, $\lim_{n\to+\infty} \left(n \ln\left(1 - F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right)\right) = -\frac{x^2}{2}$

<u>Remarque</u>.. Soit $x \in]0,+\infty[$. Supposons que $\lim_{n\to+\infty} \left(n \ln(1 - F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right))\right) = -\frac{x^2}{2}$.

comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, par produit $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 - F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right) = 1$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right) = 0$. Il semble alors raisonnable de penser que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{a_n} = 0$ donc que $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Nous montrerons en complément que $\lim_{n\to+\infty} F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right) = 0$ donne $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

Supposons donc maintenant que $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X

$\Leftrightarrow$ $n \ln\left(1 - F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ pour tout x dans $]0,+\infty[$

$\Updownarrow$ $\leftarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{a_n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right) = F_{X_1}(0) = 0$

$-n\left(-F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

$\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[$, $P(X_1 \leq x) = \frac{c}{2}x^2 + o(x^2)$ donc $F_{X_1}(x) = P(X_1 \leq x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{c}{2}x^2$ $(c \neq 0)$.

Alors $\forall x \in]0,+\infty[$, $F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{c}{2}\frac{x^2}{a_n^2}$.

$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $X \iff \forall x \in]0,+\infty[$, $-n\left(-\frac{c}{2}\frac{x^2}{a_n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $X \iff \frac{cn}{a_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \iff a_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} cn$

$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $X \iff a_n = |a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{cn} \iff a_n \sim \sqrt{cn}$.

Notons que cette équivalence suppose que $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

<u>Posons alors</u> $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sqrt{cn}$.

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n > 0$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

3) $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{c_n}$!

Alors $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.

si $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \sqrt{c_n}$, $(a_n Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.

complément. Soit $x \in]0,+\infty[$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs.

Montrons pour le sens que si $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right) = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

montrons que $\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow a_n > A$. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$\frac{x}{A} \in \mathbb{R}_+^*$. Comme nous l'avons vu dans i) $P(X_1 \leq \frac{x}{A}) > 0$. $F_{X_1}\left(\frac{x}{A}\right) > 0$.

or $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right) = 0$. Ainsi $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq p \Rightarrow \left|F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right) - 0\right| < F_{X_1}\left(\frac{x}{A}\right)$

donc $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right) \overset{!}{\leq} \left|F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right| < F_{X_1}\left(\frac{x}{A}\right)$. or F_{X_1} est croissante sur $\mathbb{R}$.

donc $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $\frac{x}{a_n} < \frac{x}{A}$ $\left(\frac{x}{a_n} \geq \frac{x}{A} \Rightarrow F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right) \geq F_{X_1}\left(\frac{x}{A}\right)\right)$.

Alors $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $A < a_n$ (car $x > 0$, $a_n > 0$, $A > 0$).

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq p \Rightarrow a_n > A$.

Ainsi $\forall A \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq p \Rightarrow a_n > A$. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

ce qui permet de dire que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs alors :

$(a_n Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X si et seulement si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{c_n}$

ou si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{c}$ ou si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n^2}{n} = c$.