Sujet S 7 - Exercice

1) Question de cours : Énoncer le théorème de réduction des matrices symétriques réelles.
2) Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre $n \geqslant 2$, ayant pour plus grande valeur propre, en valeur absolue $\lambda_{\max}(A)$. Montrer que :

$$|\lambda_{max}(A)| = \max\left\{\left|\frac{< Ax, x >}{< x, x >}\right|, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\} = \max\left\{\frac{||Ax||}{||x||}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\}.$$

où $|| \; ||$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ issue du produit scalaire $\langle \, , \rangle$.
3) Soit A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. Soit $\alpha \geqslant 0$. On pose :

$$M = (I - \alpha A)(I + \alpha A)^{-1}, \quad N = (I - \alpha B)(I + \alpha B)^{-1}$$

où I désigne la matrice identité d'ordre n.
Déterminer les valeurs propres des matrices M et N en fonction de celles de A et B. Montrer en particulier que ces valeurs propres sont toutes réelles et de valeur absolue inférieure ou égale à 1.
4) On considère la matrice $P = MN$. Montrer que les valeurs propres complexes de la matrice P sont toutes de module inférieur ou égal à 1.
5) Trouver un exemple en dimension 2 de deux matrices quelconques ayant des valeurs propres de module inférieur ou égal à 1 et dont le produit ne vérifie pas cette propriété.

Sujet S 7 - Exercice sans préparation

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi. On suppose qu'il existe deux réels, $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ tels :

$$\mathbb{P}([X_1 > x]) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{x^\lambda}$$

Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\text{pour tout } n \geqslant 1, \quad Z_n = n^{-\frac{1}{\lambda}} \max(X_1, \ldots, X_n)$$

converge en loi vers une loi à déterminer.

HEC 2010 S7 Correction de l'exercice

Q1 Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1) A est diagonalisable.

2) Il existe une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A

3) Il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ~~telle~~ que ${}^tPAP$ ou $P^{-1}AP$ soit diagonale

Q2 Soit $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Notons que $Sp\,A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ne sont pas nécessairement distincts.

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ la famille des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

$X = \sum_{k=1}^{n} \beta_k X_k$ et $AX = \sum_{k=1}^{n} \beta_k AX_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \alpha_k X_k$.

Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée : $\|X\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2$ et $\langle AX, X\rangle = \sum_{k=1}^{n} (\beta_k \alpha_k)\beta_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 \alpha_k$.

$$|\langle AX, X\rangle| = \left|\sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 \alpha_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |\beta_k^2 \alpha_k| = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 |\alpha_k| \leq \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 |\lambda_{max}(A)| = |\lambda_{max}(A)| \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2.$$

$\forall k \in [\![1, n]\!],\ |\alpha_k| \leq |\lambda_{max}(A)|$ et $\beta_k^2 \geq 0$

$|\langle AX, X\rangle| \leq |\lambda_{max}(A)|\,\|X\|^2$

Supposons $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$: $\|X\|^2 \neq 0$. Mieux $\|X\|^2 > 0$.

Alors $\dfrac{|\langle AX, X\rangle|}{\|X\|^2} \leq |\lambda_{max}(A)|$ ou $\dfrac{|\langle AX, X\rangle|}{\langle X, X\rangle} \leq |\lambda_{max}(A)|$ ou encore :

$\left|\dfrac{\langle AX, X\rangle}{\langle X, X\rangle}\right| \leq |\lambda_{max}(A)|$ et ceci pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

Soit U un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_{max}(A)$ de A.

$\langle AU, U\rangle = \langle \lambda_{max}(A) U, U\rangle = \lambda_{max} \langle U, U\rangle$ et $\langle U, U\rangle = \|U\|^2 \neq 0$.

Donc $\dfrac{\langle AU, U\rangle}{\langle U, U\rangle} = \lambda_{max}(A)$. $\left|\dfrac{\langle AU, U\rangle}{\langle U, U\rangle}\right| = |\lambda_{max}(A)|$.

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}, \quad \left|\frac{\langle AX, X\rangle}{\langle X, X\rangle}\right| \leqslant \left|\frac{\langle AU, U\rangle}{\langle U, U\rangle}\right| = |\lambda_{max}(A)|.$$

ceci indique que $\max\left\{\left|\frac{\langle AX, X\rangle}{\langle X, X\rangle}\right| ; X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right\}$ existe et vaut $|\lambda_{max}(A)|$.

Reprenons un élément non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de coordonnées $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ dans $\mathcal{B}$.

$X = \sum_{k=1}^{n} \beta_k X_k$ et $AX = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \alpha_k X_k$.

Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée $\|AX\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\beta_k \alpha_k)^2$ et $\|X\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2$.

$$\|AX\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 |\alpha_k|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 |\lambda_{max}(A)|^2 = |\lambda_{max}(A)|^2 \|X\|^2.$$

Comme $\|X\|^2 > 0$: $\left(\frac{\|AX\|}{\|X\|}\right)^2 = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \leqslant |\lambda_{max}(A)|^2$

Or $\frac{\|AX\|}{\|X\|} \geqslant 0$ et $|\lambda_{max}(A)| \geqslant 0$ donc $\frac{\|AX\|}{\|X\|} \leqslant |\lambda_{max}(A)|$.

$U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $AU = \lambda_{max}(A) U$. Alors $\|AU\| = \|\lambda_{max}(A) U\| = |\lambda_{max}(A)| \, \|U\|$.

Donc $\frac{\|AU\|}{\|U\|} = |\lambda_{max}(A)|$.

Ainsi $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\frac{\|AX\|}{\|X\|} \leqslant |\lambda_{max}(A)| = \frac{\|AU\|}{\|U\|}$.

ceci permet de dire que $\max\left\{\frac{\|AX\|}{\|A\|} ; X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right\}$ existe et vaut $|\lambda_{max}(A)|$.

Remarque. En identifiant $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on peut écrire, pour faire plaisir au concepteur :

$$|\lambda_{max}(A)| = \max\left\{\left|\frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}\right| ; x \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}\right\} = \max\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} ; x \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}\right\}.$$

Q3 **Remarque..** Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$

si $\alpha=0$: $I_n+\alpha A = I_n$ donc $I_n+\alpha A$ est inversible.

Supposons $\alpha \neq 0$. Alors $\alpha>0$. $-\frac{1}{\alpha} \notin Sp A$ car $Sp A \subset [0,+\infty[$.

donc $A-(-\frac{1}{\alpha}) I_n$ est inversible. Comme α n'est pas nul $\alpha(A-(-\frac{1}{\alpha})I_n)$ est inversible.

Par conséquent $\alpha A+I_n$ est inversible.

Pour tout α dans $\mathbb{R}^+$, $I_n+\alpha A$ est inversible.

De même pour tout α dans $\mathbb{R}^+$, $I_n+\alpha B$ est inversible.

Il existe une matrice orthogonale $\hat{P}$ de $M_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t\hat{P}A\hat{P}=\hat{P}^{-1}A\hat{P}$ soit diagonale (Q1!).

Posons $D=\mathrm{Diag}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=\hat{P}^{-1}A\hat{P}={}^t\hat{P}A\hat{P}$.

$\hat{P}^{-1}M\hat{P}=\hat{P}^{-1}(I_n-\alpha A)(I_n+\alpha A)^{-1}\hat{P}=\hat{P}^{-1}(I_n-\alpha A)\hat{P}\hat{P}^{-1}(I_n+\alpha A)^{-1}\hat{P}$.

$\rightarrow \hat{P}^{-1}(I_n-\alpha A)\hat{P}=\hat{P}^{-1}I_n\hat{P}-\alpha\hat{P}^{-1}A\hat{P}=I_n-\alpha D=\mathrm{Diag}(1-\alpha\alpha_1,1-\alpha\alpha_2,\dots,1-\alpha\alpha_n)$.

$\rightarrow \hat{P}^{-1}(I_n+\alpha A)^{-1}\hat{P}=\hat{P}^{-1}(I_n+\alpha A)^{-1}(\hat{P}^{-1})^{-1}=\left(\hat{P}^{-1}(I_n+\alpha A)\hat{P}\right)^{-1}=\left(\hat{P}^{-1}I_n\hat{P}+\alpha\hat{P}^{-1}A\hat{P}\right)^{-1}$.

$\hat{P}^{-1}(I_n+\alpha A)^{-1}\hat{P}=(I_n+\alpha D)^{-1}=\left(\mathrm{Diag}(1+\alpha\alpha_1,1+\alpha\alpha_2,\dots,1+\alpha\alpha_n)\right)^{-1}$.

$\hat{P}^{-1}(I_n+\alpha A)^{-1}\hat{P}=\mathrm{Diag}\left(\frac{1}{1+\alpha\alpha_1},\frac{1}{1+\alpha\alpha_2},\dots,\frac{1}{1+\alpha\alpha_n}\right)$

Alors $\hat{P}^{-1}M\hat{P}=\mathrm{Diag}(1-\alpha\alpha_1,1-\alpha\alpha_2,\dots,1-\alpha\alpha_n)\,\mathrm{Diag}\left(\frac{1}{1+\alpha\alpha_1},\frac{1}{1+\alpha\alpha_2},\dots,\frac{1}{1+\alpha\alpha_n}\right)$.

$\hat{P}^{-1}M\hat{P}=\mathrm{Diag}\left(\frac{1-\alpha\alpha_1}{1+\alpha\alpha_1},\frac{1-\alpha\alpha_2}{1+\alpha\alpha_2},\dots,\frac{1-\alpha\alpha_n}{1+\alpha\alpha_n}\right)$

M est donc semblable à la matrice diagonale $\mathrm{Diag}\left(\frac{1-\alpha\alpha_1}{1+\alpha\alpha_1},\frac{1-\alpha\alpha_2}{1+\alpha\alpha_2},\dots,\frac{1-\alpha\alpha_n}{1+\alpha\alpha_n}\right)$.

Alors $Sp M=\left\{\frac{1-\alpha\alpha_k}{1+\alpha\alpha_k}\ ;\ k\in[\![1,n]\!]\right\}$ et M est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

donc $Sp M=\left\{\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\ ;\ \lambda\in Sp A\right\}$. De même $Sp N=\left\{\frac{1-\alpha\lambda'}{1+\alpha\lambda'}\ ;\ \lambda'\in Sp B\right\}$.

Notons que M et N sont diagonalisables dans $M_n(\mathbb{R})$... alors $Sp_{\mathbb{C}} M=Sp_{\mathbb{R}} M$ et $Sp_{\mathbb{C}} N=Sp_{\mathbb{R}} N$

Ainsi les valeurs propres de M et N sont toutes réelles !

Soit $\mu \in Sp\, M$. $\exists \lambda \in Sp\, A$, $\mu = \dfrac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}$.

$$1-\mu^2 = 1 - \frac{(1-\alpha\lambda)^2}{(1+\alpha\lambda)^2} = \frac{1+\alpha^2\lambda^2+2\alpha\lambda-1-\alpha^2\lambda^2+2\alpha\lambda}{(1+\alpha\lambda)^2} = \frac{4\alpha\lambda}{(1+\alpha\lambda)^2} \geqslant 0$$

car $\alpha \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant 0$ car $Sp\, A \subset \mathbb{R}^+$

donc $1-\mu^2 \geqslant 0$. $\mu^2 \leqslant 1$. $\sqrt{\mu^2} \leqslant \sqrt{1} = 1$; $|\mu| \leqslant 1$.

Les valeurs propres de M sont réelles et de valeur absolue inférieure ou égale à 1.

De même les valeurs propres de N sont réelles et de valeur absolue inférieure ou égale à 1.

Q4 Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(P)$. Soit Z un élément non nul de $M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $PZ = \lambda Z$.

Posons $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = Re(z_k)$ et $y_k = Im(z_k)$.

Posons encore $P = (P_{k,\ell})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant \ell \leqslant n}}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $X' = PX = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ et $Y' = PY = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$.

$\lambda Z = PZ$ donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\lambda(x_k + i y_k) = \lambda z_k \overset{\lambda Z = PZ}{=} \sum_{\ell=1}^{n} P_{k,\ell} z_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} P_{k,\ell}(x_\ell + i y_\ell)$.

Alors $|\lambda(x_k + i y_k)|^2 = \left| \sum_{\ell=1}^{n} P_{k,\ell} x_\ell + i \sum_{\ell=1}^{n} P_{k,\ell} y_\ell \right|^2$ pour tout k dans $[\![1,n]\!]$.

donc $|\lambda|^2 (x_k^2 + y_k^2) = \left(\sum_{\ell=1}^{n} P_{k,\ell} x_\ell \right)^2 + \left(\sum_{\ell=1}^{n} P_{k,\ell} y_\ell \right)^2$ pour tout k dans $[\![1,n]\!]$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|\lambda|^2 (x_k^2 + y_k^2) = (x'_k)^2 + (y'_k)^2$ car $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x'_k = \sum_{\ell=1}^{n} P_{k,\ell} x_\ell$ et

$y'_k = \sum_{\ell=1}^{n} P_{k,\ell} y_\ell$ puisque $X' = PX$ et $Y' = PY$.

En sommant de 1 à n il vient : $|\lambda|^2 \left[\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell^2 + \sum_{\ell=1}^{n} y_\ell^2 \right] = \sum_{k=1}^{n} (x'_k)^2 + \sum_{\ell=1}^{n} (y'_\ell)^2$.

donc $|\lambda|^2 [\|X\|^2 + \|Y\|^2] = \|PX\|^2 + \|PY\|^2$

Lemme.. $\boxed{\forall V \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PV\| \leqslant \|V\|}$

Admettons un instant le résultat du lemme.

Alors $|\lambda|^2 [\|X\|^2 + \|Y\|^2] \leqslant \|X\|^2 + \|Y\|^2$. Supposons que $\|X\|^2 + \|Y\|^2 = 0$.

Alors $\|X\|^2 = \|Y\|^2 = 0$. $\|X\| = \|Y\| = 0$. $X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $Y = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = y_k = 0$. Ainsi $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $z_k = x_k + i y_k = 0$. $Z = 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}$!!

Donc $\|X\|^2+\|Y\|^2 \neq 0$. Mieux $\|X\|^2+\|Y\|^2>0$.

Or $|\lambda|^2\left[\|X\|^2+\|Y\|^2\right] \leqslant \|X\|^2+\|Y\|^2$. Donc en divisant par $\|X\|^2+\|Y\|^2$ on obtient $|\lambda|^2\leqslant 1$. Ce qui donne $|\lambda|\leqslant 1$.

Il ne reste plus qu'à montrer le lemme.

Nous avons montré dans Q3 l'existence d'une matrice orthogonale $\hat{P}$ de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $\hat{P}^{-1}M\hat{P}=\mathrm{Diag}\left(\frac{1-\alpha d_1}{1+\alpha d_1}, \frac{1-\alpha d_2}{1+\alpha d_2}, \dots, \frac{1-\alpha d_n}{1+\alpha d_n}\right)$. Notons Δ cette dernière matrice. $\hat{P}^{-1}M\hat{P}=\Delta$. $M=\hat{P}\Delta\hat{P}^{-1}=\hat{P}\Delta{}^t\hat{P}$.

Alors ${}^tM={}^t(\hat{P}\Delta{}^t\hat{P})={}^t({}^t\hat{P}){}^t\Delta{}^t\hat{P} \underset{\substack{\uparrow\\ \Delta \text{ est diagonale}}}{=} \hat{P}\Delta{}^t\hat{P}=M$. Donc M est une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$.

De même N est une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$.

$$|\lambda_{max}(M)|=\max\left\{\frac{\|MT\|}{\|T\|}\ ;\ T\in M_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}\right\}$$

$$\forall T\in M_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\},\quad \frac{\|MT\|}{\|T\|}\leqslant|\lambda_{max}(M)| \underset{\substack{\uparrow\\ Q3}}{\leqslant} 1 \quad \& \quad \|T\|>0.$$

Donc $\forall T\in M_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}$, $\|MT\|\leqslant\|T\|$.

Mieux $\forall T\in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|MT\|\leqslant\|T\|$. De même $\forall T\in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|NT\|\leqslant\|T\|$.

Alors $\forall V\in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|PV\|=\|MNV\|=\|M(NV)\|\leqslant\|NV\|\leqslant\|V\|$.

Ceci achève de montrer le lemme et permet de dire que :

les valeurs propres complexes de la matrice $P=MN$ sont toutes de module inférieur ou égal à 1.

Q5 Posons $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N' = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P' = M'N'$.

$Sp_{\mathbb{C}} M' = \{1\}$ et $Sp_{\mathbb{C}} N' = \{\frac{1}{2}, 1\}$ (M' et N' sont triangulaires ...).

Les valeurs propres de M' et N' sont de module inférieur ou égal à 1

$P' = M'N' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}} P' \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 1-\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $1-\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Alors $Sp_{\mathbb{C}} P' = \{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ et $|1 + \frac{1}{\sqrt{2}}| = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > 1$.

Les valeurs propres de P' ne sont pas toutes de module inférieur ou égal à 1.

Question 7 **HEC 2010** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et de même loi.

On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs α et λ tels que $P(X_1 > x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{x^\lambda}$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Z_n = n^{-\frac{1}{\lambda}} \operatorname{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi

---

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons F_n la fonction de répartition de Z_n et F la fonction de répartition de X_1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$F_n(x) = P(Z_n \leqslant x) = P(\operatorname{Max}(X_1, \ldots, X_n) \leqslant n^{\frac{1}{\lambda}} x) = P(\{X_1 \leqslant n^{1/\lambda} x\} \cap \ldots \cap \{X_n \leqslant n^{1/\lambda} x\})$

$F_n(x) = P(X_1 \leqslant n^{1/\lambda} x) \ldots P(X_n \leqslant n^{1/\lambda} x)$ par indépendance.

$\underline{F_n(x) = \left(F(n^{1/\lambda} x)\right)^n = \left(1 - P(X_1 > n^{1/\lambda} x)\right)^n.}$

$\underline{1^{\text{er}}\text{ cas}}$.. $x < 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^{1/\lambda} x) = -\infty$. $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n^{1/\lambda} x) = 0$.

Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ 0 \leqslant F(n^{1/\lambda} x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ 0 \leqslant (F(n^{1/\lambda} x))^n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

Par encadrement il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty} (F(n^{1/\lambda} x))^n = 0$. $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0.}}$

$\underline{2^{\text{ème}}\text{ cas}}$.. $x = 0$.

Supposons $F(0) = 1$. Alors $\forall x \in [0, +\infty[,\ 1 = F(0) \leqslant F(x) \leqslant 1$.

$\forall x \in [0, +\infty[,\ F(x) = 1$.

$\forall x \in [0, +\infty[,\ P(X_1 > x) = 1 - F(x) = 0$. Ceci contredit $P(X_1 > x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{x^\lambda}$

Alors $F(0) \neq 1$. Ainsi $F(0) \in [0, 1[$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (F(0))^n = 0$; $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(0) = 0.}}$

$\underline{3^{\text{ème}}\text{ cas}}$.. $x > 0$ $F_n(x) = (1 - P(X_1 > n^{1/\lambda} x))^n$. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^{1/\lambda} x) = +\infty$ donc

$$P(X_1 > n^{1/\lambda} x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{(n^{1/\lambda} x)^\lambda} = \frac{\alpha}{n x^\lambda}.$$

Ainsi En particulier $\lim_{n\mapsto+\infty} P(X_1 > n^{1/\lambda}x) = 0$.

Donc $\lim_{n\mapsto+\infty} (1 - P(X_1 > n^{1/\lambda}x)) = 1$.

Alors $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in [\![n_1, +\infty [\![$, $1 - P(X_1 > n^{1/\lambda}x) > 0$.

$$n \ln(1 - P(X_1 > n^{1/\lambda}x)) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} n \times (-P(X_1 > n^{1/\lambda}x)) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} n\left(-\frac{\alpha}{n x^\lambda}\right) = -\frac{\alpha}{x^\lambda}.$$

$\lim_{n\mapsto+\infty} e^{n\ln(1-P(X_1>n^{1/\lambda}x))} = e^{-\frac{\alpha}{x^\lambda}}$ ... par continuité de la fonction exponentielle.

$\lim_{n\mapsto+\infty} (1 - P(X_1 > n^{1/\lambda}x))^n = e^{-\frac{\alpha}{x^\lambda}}$. $\lim_{n\mapsto+\infty} F_n(x) = e^{-\frac{\alpha}{x^\lambda}}$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\mapsto+\infty} F_n(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\alpha}{x^\lambda}} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\alpha}{x^\lambda}} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. montrons que G est la

fonction de répartition d'une variable aléatoire ... à densité.

1 * $\lim_{x\mapsto-\infty} G(x) = 0$ car G est nulle sur $]-\infty, 0]$.

$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\alpha}{x^\lambda} = 0$ car $\lambda > 0$ donc $\lim_{x\mapsto+\infty} G(x) = 1$.

2 * Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Supposons $a < b$

1er cas.. $a < b \leq 0$. Alors $G(a) = 0 \leq 0 = G(b)$.

2ème cas.. $a \leq 0 < b$. Alors $G(a) = 0 \leq e^{-\frac{\alpha}{b^\lambda}} = G(b)$

3ème cas.. $0 < a < b$. $\frac{1}{b^\lambda} \leq \frac{1}{a^\lambda}$ car $\lambda > 0$. $-\frac{\alpha}{a^\lambda} \leq -\frac{\alpha}{b^\lambda}$ $(\alpha > 0)$.

Donc $G(a) = e^{-\alpha/a^\lambda} \leq e^{-\alpha/b^\lambda} = G(b)$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b \Rightarrow G(a) \leq G(b)$. G est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. G est nulle sur $]-\infty,0]$ donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$

$x \mapsto -\frac{\alpha}{x^\lambda}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Par composition G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Donc 1) G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (au moins) donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

2) G est continue à gauche en 0.

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^\lambda}\right)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} G(x) = 0 = G(0)$. G est continue à droite en 0.

Finalement G est continue en 0.

G est continue sur $\mathbb{R}$. Ceci achève de montrer que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

$(Z_n)_{n\geq1}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité de fonction de répartition G.