Sujet S 8 - Exercice

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toute la loi exponentielle de paramètre 1.
On définit la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ par la relation :

$$Y_1 = X_1, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*, Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{n+1} X_{n+1}.$$

1) Question de cours : Définition et propriétés du produit de convolution de 2 densités.

2) Reconnaître la loi de $\dfrac{1}{n} X_n$.

3) Montrer que Y_2 possède une densité f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f_2(x) = \begin{cases} 2\exp(-x)(1-\exp(-x)) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

4) Exprimer Y_n en fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Les variables aléatoires Y_n et $\dfrac{1}{n+1} X_{n+1}$ sont-elles indépendantes ?

5) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, Y_n possède une densité f_n définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f_n(x) = \begin{cases} n\exp(-x)(1-\exp(-x))^{n-1} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

(on pourra raisonner par récurrence sur n).
- En déduire que Y_n et $Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ont la même loi.

6) Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini (on pourra utiliser une comparaison série-intégrale).

Sujet S 8 - Exercice sans préparation

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$ tel que :

$$(f - \mathrm{I}d)^3 \, o \, (f - 2\mathrm{I}d) = 0 \quad \text{et} \quad (f - \mathrm{I}d)^2 \, o \, (f - 2\mathrm{I}d) \neq 0.$$

Etudier la diagonalisabilité de f.

Q1 X et Y sont deux variables aléatoires à densité sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

- f_X (resp. f_Y) est une densité de X (resp. Y).
- X et Y sont indépendantes

si la fonction $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,dt$ (ou $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t)\,dt$) est définie et continue sauf peut-être en un nombre fini de points, $X+Y$ est une variable aléatoire à densité de densité h.

<u>Remarque</u>.. Si f_X ou f_Y est bornée, $X+Y$ est une variable aléatoire à densité et h en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ donc $X_n \hookrightarrow \Gamma(1,1)$.

Alors $\frac{1}{n} X_n \hookrightarrow \Gamma(\frac{1}{n}, 1)$ donc $\underline{\frac{1}{n} X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n)}$.

Q3 Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} \text{ si } x \in [0, +\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ et $\varphi(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} \text{ si } x \in [0, +\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$Y_2 = Y_1 + \frac{1}{2} X_2 = X_1 + \frac{1}{2} X_2$.

- X_1 et $\frac{1}{2} X_2$ sont deux variables aléatoires à densité indépendantes car X_1 et X_2 sont indépendantes
- f_1 (resp. φ) est une densité de X_1 (resp. X_2).
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f_1(x) \leq 1$ donc f_1 est bornée sur $\mathbb{R}$.

Alors $Y_2 = X_1 + \frac{1}{2} X_2$ est une variable aléatoire à densité et $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t)\varphi(t)\,dt$ en est une densité définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$h(x) = \int_0^{+\infty} f_1(x-t)\, 2e^{-2t}\,dt \underset{\text{"}u = x-t\text{"}}{=} \int_{-\infty}^{x} f_1(u)\, 2e^{-2(x-u)}\,du = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\\ \int_0^x e^{-u}\, 2e^{-2(x-u)}\,du \text{ si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

← un peu rapide mais changement de variable simple...

Donc $\forall x \in]-\infty, 0[$, $h(x) = 0$.

$\forall x \in [0, +\infty[$, $h(x) = 2e^{-2x} \int_0^x e^u\,du = 2e^{-2x}(e^x - 1) = 2e^{-x}(1 - e^{-x})$

Notons que l'on a encore $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} 2e^{-x}(1-e^{-x}) \text{ si } x \in \underline{]}0, +\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Alors Y_2 est une variable aléatoire à densité et la fonction f_2 définie par

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) = \begin{cases} 2e^{-x}(1-e^{-x}) & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \end{cases}$ en est une densité.

(Q4) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$.

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n-1}(Y_{k+1}-Y_k) + Y_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} X_{k+1} + X_1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} X_k + X_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} X_k.$$

De plus $Y_1 = X_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} X_k$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} X_k$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ sont indépendantes.

Donc $\frac{1}{1}X_1, \frac{1}{2}X_2, \dots, \frac{1}{n}X_n, \frac{1}{n+1}X_{n+1}$ sont indépendantes.

Alors $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} X_k$ et $\frac{1}{n+1} X_{n+1}$ sont indépendantes.

Finalement Y_n et $\frac{1}{n+1} X_{n+1}$ sont indépendantes et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(Q5) Montrons cette propriété par récurrence sur n.

- Elle est vraie pour $n = 1$ car Y_1 suit la loi exponentielle de paramètre 1 et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

  Notons qu'elle est même vraie pour $n = 2$ d'après Q3.

- Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

  1) Par hypothèse de récurrence Y_n est une variable aléatoire à densité et la fonction f_n définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} n e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ en est une densité.

2.. $\frac{1}{n+1} X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{E}(n+1)$ donc $\frac{1}{n+1} X_{n+1}$ est une variable aléatoire à densité et la fonction φ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \begin{cases} (n+1) e^{-(n+1)x} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ en est une densité.

3.. Y_n et $\frac{1}{n+1} X_{n+1}$ sont indépendantes.

4.. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq \varphi(x) \leq n+1$ donc φ est bornée.

Alors $Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{n+1} X_{n+1}$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction $\hat{h}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \hat{h}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x-t)\,\varphi(t)\,dt$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\hat{h}(x) = \int_0^{+\infty} f_n(x-t)\,(n+1)\,e^{-(n+1)t}\,dt$

$\hat{h}(x) \underset{\uparrow}{=} \int_{-\infty}^{x} f_n(u)\,(n+1)\,e^{-(n+1)(x-u)}\,du = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \int_0^x f_n(u)(n+1)e^{-(n+1)(x-u)}\,du & \text{sinon} \end{cases}$

$u = x - t$... changement de variable simple ...

Alors $\forall x \in]-\infty, 0],\ \hat{h}(x) = 0$. Soit $x \in]0,+\infty[$.

$\hat{h}(x) = \int_0^x f_n(u)(n+1)e^{-(n+1)(x-u)}\,du = (n+1)e^{-(n+1)x} \int_0^x n e^{-u}(1-e^{-u})^{n-1} e^{(n+1)u}\,du$.

$\hat{h}(x) = (n+1)e^{-(n+1)x} \int_0^x n\, e^{nu}(1-e^{-u})^{n-1}\,du = (n+1)\,e^{-(n+1)x} \int_0^x n\, e^{u}\,(e^{u})^{n-1}(1-e^{-u})^{n-1}\,du$

$\hat{h}(x) = (n+1)e^{-(n+1)x} \int_0^x n\, e^{u}\,(e^{u}-1)^{n-1}\,du = (n+1)e^{-(n+1)x}\left[(e^{u}-1)^n\right]_0^x$

$\hat{h}(x) = (n+1)\,e^{-(n+1)x}(e^{x}-1)^n = (n+1)\,e^{-x}\left(e^{-x}(e^{x}-1)\right)^n = (n+1)e^{-x}(1-e^{-x})^n$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \hat{h}(x) = \begin{cases} (n+1)\,e^{-x}(1-e^{-x})^{(n+1)-1} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi Y_{n+1} est une variable aléatoire à densité et la fonction f_{n+1} définie par

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \begin{cases} (n+1)e^{-x}(1-e^{-x})^{(n+1)-1} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

ceci achève la récurrence. La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, Y_n est une variable aléatoire à densité et la fonction f_n définie

par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} n e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ en est une densité.

Remarque.. Notons F_n la fonction de répartition de Z_n & ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt = 0$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt = \int_0^x n e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1} dt = \left[(1-e^{-t})^n\right]_0^x = (1-e^{-x})^n$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} (1-e^{-x})^n & \text{si } x \in]0,+\infty[\text{ ou si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $A_x = Z_n^{-1}(]-\infty, x])$. Soit $\omega \in \Omega$.

$\omega \in A_x \iff Z_n(\omega) \leq x \iff \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) \leq x \iff \forall k \in [\![1,n]\!],\ X_k(\omega) \leq x$.

$\omega \in A_x \iff \forall k \in [\![1,n]\!],\ \omega \in X_k^{-1}(]-\infty, x])$. Alors $A_x = \bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}(]-\infty, x])$.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ donc $\forall k \in [\![1,n]\!], X_k^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}$.

Comme $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie : $A_x = \bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}$.

De plus $P(A_x) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}(]-\infty, x])\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \leq x\}\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq x)$ car $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $Z_n^{-1}(]-\infty, x]) = A_x \in \mathcal{A}$ donc Z_n est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Notons F_{Z_n} sa fonction de répartition. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Z_n}(x) = P(Z_n^{-1}(]-\infty, x])) = P(A_x) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq x)$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X_k \leq x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Z_n}(x) = \begin{cases} (1-e^{-x})^n & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors $F_{Z_n} = F_n$.

Ainsi, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, Y_n et $Z_n = $ "$\max$"$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ont même loi.

(Q6) Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $E(X_k)$ existe et vaut 1.

Alors pour tout n dans $E(Y_n)$ existe et vaut $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} E(X_k)$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(Y_n)$ existe et vaut $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$. En intégrant il vient :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$ (car $k \leq k+1$).

Alors $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = E(Y_n)$.

Donc $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^n = \ln n \leq E(Y_n)$. pour tout n dans $[\![2, +\infty[\![$

$E(Y_n) - 1 \leq \ln n \leq E(Y_n)$ pour tout n dans $[\![2, +\infty[\![$. De plus $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\ln n > 0$.

donc $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $1 \leq \frac{E(Y_n)}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}$ et $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln n}\right) = 1$.

Ainsi par encadrement : $\lim_{n \to +\infty} \frac{E(Y_n)}{\ln n} = 1$. Alors $E(Y_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$.

Remarque.. Cela figure dans le problème d'ECRICOME 2011 partie I.

R...

Question 8 HEC 2010 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit f un endomorphisme d'une espace vectoriel de dimension n supérieur ou égal à 1.

On suppose que $(f-\mathrm{Id}_E)^3\circ(f-2\,\mathrm{Id}_E)=0_{\mathcal{L}(E)}$ et $(f-\mathrm{Id}_E)^2\circ(f-2\,\mathrm{Id}_E)\neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Étudier la digonalisisabilité de f.

Posons $P=(X-1)^3(X-2)$ et $Q=(X-1)^2(X-2)$.

$P(f)=0_{\mathcal{L}(E)}$ et $Q(f)\neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. P est un polynôme annulateur de f dont les zéros sont 1 et 2. Ainsi $Sp\, f\subset\{1,2\}$. Supposons que f est diagonalisable. Il existe une base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de E constituée de vecteurs propres respectivement associées aux valeurs propres $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$.

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $f(e_i)=\alpha_i e_i$ et $\alpha_i\in\{1,2\}$.

Alors $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $Q(f)(e_i)=Q(\alpha_i)e_i$. Or $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $Q(\alpha_i)=0$ car les racines de Q sont 1 et 2.

Donc $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $Q(f)e_i=0_E=0_{\mathcal{L}(E)}(e_i)$. $Q(f)$ et $0_{\mathcal{L}(E)}$ sont deux endomorphismes de E qui coïncident sur la base $\mathcal{B}$ de E donc $Q(f)=0_{\mathcal{L}(E)}$

Alors $(f-\mathrm{Id}_E)^2\circ(f-2\mathrm{Id}_E)=0_{\mathcal{L}(E)}$. Ceci contredit l'hypothèse.

<u>f n'est pas diagonalisable.</u>