Sujet S 9 - Exercice

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$
Soit X une variable aléatoire dont la loi dépend du paramètre réel inconnu $\lambda > 0$.
Soit n un entier non nul et $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un n-échantillon i.i.d. de cette loi.
On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre inconnu λ, et on pose :

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

On se propose d'étudier certaines propriétés de $\overline{X}_n$.

1) Question de cours : Donner la définition d'un estimateur de λ.
Dans quel cas peut-on dire que cet estimateur est sans biais ?

2) Montrer que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de λ.

3) On définit la fonction L de $\mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (k_1, k_2, \cdots, k_n, \lambda) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_*^+, \ \mathrm{L}(k_1, k_2, \ldots, k_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X = k_i).$$

On pose alors, pour tout $(k_1, k_2, \ldots, k_n, \lambda) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{G}(k_1, k_2, \ldots, k_n, \lambda) = \ln(\mathrm{L}(k_1, k_2, \ldots, k_n, \lambda))$.

a) Vérifier que la fonction G est bien définie. Calculer $\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial \lambda}(k_1, k_2, \ldots, k_n, \lambda)$.

b) Soit $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ un n-uplet fixé dans $\mathbb{N}^n$.
Etudier les variations de la fonction $h : \lambda \to \mathrm{G}(k_1, k_2, \ldots, k_n, \lambda)$.
Que représente le réel $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$ pour $\overline{X}_n$?

4) On considère la variable aléatoire $-\dfrac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial \lambda^2}(X_1, X_2, \cdots, X_n, \lambda)$. Exprimer cette variable aléatoire à l'aide de $\overline{X}_n$.
Calculer son espérance notée $\mathrm{I}_n(\lambda)$ et déterminer une relation entre $\mathrm{I}_n(\lambda)$ et la variance $\mathrm{V}\left(\overline{X}_n\right)$.

Sujet S 9 - Exercice sans préparation

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :
$\mathrm{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - y + z = 0 \text{ et } x + y = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - y + z = 0\}$
Déterminer une base ainsi que la dimension de chacun de ces sous-espaces vectoriels.
Déterminer $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ et $\mathrm{F} \cup \mathrm{G}$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Déterminer le noyau et l'image de f.

(Q1) Un estimateur de λ est une statistique $T_n = \varphi_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$, φ_n étant une fonction de $\mathbb{R}^n$ et $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une suite de n variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi exponentielle de paramètre λ.

Il est sans biais s'il possède une espérance égale à λ.

(Q2) $E(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda = \frac{1}{n} n\lambda = \lambda$.

Ainsi <u>$\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de λ.</u>

(Q3) a] Soit $(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_+^*$

$L(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(X = k_i) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda}\right) > 0$.

Donc $\ln(L(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda))$ existe. Ainsi G est défini en $(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda)$.

<u>G est bien défini sur $\mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_+^*$</u>

$\forall (k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_+^*$, $G(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{k_i}}{k_i!}e^{-\lambda}\right) = \sum_{i=1}^{n}\ln\frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} - n\lambda$.

$\forall (k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_+^*$, $G(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)\ln\lambda - \sum_{i=1}^{n}\ln(k_i!) - n\lambda$.

Alors $\forall (k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial G}{\partial \lambda}(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} k_i \times \frac{1}{\lambda} - n$ (existence claire!).

b] $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h'(\lambda) = \frac{\partial G}{\partial \lambda}(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) = \frac{n}{\lambda}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i - \lambda\right]$

<u>1er cas.</u> $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$.

Alors h est décroissante sur $]0, +\infty[$

<u>2ème cas.</u> $(k_1, k_2, \dots, k_n) \neq 0_{\mathbb{N}^n}$.

<u>Alors h est croissante sur $]0, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i]$ et décroissante sur $[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i, +\infty[$</u>

<u>Notons que h admet un maximum sur $]0, +\infty[$ atteint en $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$.</u>

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$ est donc la valeur de λ qui rend maximum $\prod_{i=1}^{n} P(X=k_i)$.

Q4 $\forall (k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial G}{\partial \lambda}(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} k_i \times \frac{1}{\lambda} - n$

$\forall (k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) = -\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)\frac{1}{\lambda^2}$ (existence claire!).

$$-\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}(X_1, X_2, \dots, X_n, \lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \times \frac{1}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda^2}\overline{X_n}.$$

$$-\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}(X_1, X_2, \dots, X_n, \lambda) = \frac{n}{\lambda^2}\overline{X_n}$$

$E\left(\frac{n}{\lambda^2}\overline{X_n}\right) = \frac{n}{\lambda^2}E(\overline{X_n}) = \frac{n}{\lambda^2} \times \lambda = \frac{n}{\lambda}$.

L'espérance $I_n(\lambda)$ de $-\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}(X_1, X_2, \dots, X_n, \lambda)$ est $\frac{n}{\lambda}$.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et ont une variance égale à λ.

Alors $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ existe et vaut $n\lambda$.

Donc $V(\overline{X_n})$ existe et vaut $\frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ donc $\frac{\lambda}{n}$.

Alors $I_n(\lambda) = \frac{1}{V(\overline{X_n})}$.

R.

Question 9 HEC 2010 $\boxed{\text{F 1}}$ ou F0 J. HÉRY

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } x + y = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$.

Déterminer une base ainsi que la dimension de chacun de ces sous-espaces vectoriels. Déterminer $F \cap G$ et $F \cup G$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Déterminer le noyau et l'image de f. cours. Définition d'un estimateur et d'un estimateur sans biais.

Nous notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$(x,y,z) \in F \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ z = -2x \end{cases}$.

$F = \{(x,-x,-2x) \,;\, x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1,-1,-2)) = \text{Vect}(e_1 - e_2 - 2e_3)$.

De plus $e_1 - e_2 - 2e_3$ n'est pas nul.

$(e_1 - e_2 - 2e_3)$ est une base de F. $\dim F = 1$.

G est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ donc $\dim G = 2$. De plus (e_1+e_2, e_2+e_3) est une famille clairement libre de G dont le cardinal est 2.

(e_1+e_2, e_2+e_3) est une base de G.

$F \subset G$. $F \cap G = F$ et $F \cup G = G$.

$\text{Im} f = f(\mathbb{R}^3) = f(\text{Vect}(e_1, e_2, e_3)) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$

$\text{Im} f = \text{Vect}(e_1 + e_2, e_1 - e_3, e_1 - e_2 - 2e_3) = \text{Vect}(e_1 + e_2, e_1 - e_3)$

$e_1 - e_2 - 2e_3 = 2(e_1 - e_3) - (e_1 + e_2)$

$(e_1 + e_2, e_1 - e_3)$ est clairement libre.

Alors $(e_1 + e_2, e_1 - e_3)$ est une base de $\text{Im} f$. $\dim \text{Im} f = 2$.

Alors $\dim \text{Ker} f = 3 - \dim \text{Im} f = 1$. $\dim \text{Ker} f = 1$

Or $f(e_3) = 2f(e_2) - f(e_1)$; $f(e_1 - 2e_2 + e_3) = 0_E$. $e_1 - 2e_2 + e_3$ est un élément non nul de $\text{Ker} f$ qui est de dimension 1.

$(e_1 - 2e_2 + e_3)$ est une base de $\text{Ker} f$. C'est tout ?