**1.. Exemple 1..**

a) $J^2 = \begin{pmatrix} 1&1&1\\1&1&1\\1&1&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&1&1\\1&1&1\\1&1&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3&3&3\\3&3&3\\3&3&3 \end{pmatrix} = 3J$. $J^2 = 3J$.

$J^2 - 3J = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. $X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de $J$ dont les zéros sont $0, 3$.

Les valeurs propres possibles de $J$ sont $0$ et $3$.

$\operatorname{rg} J = 1$ ! Ainsi $J$ n'est pas inversible. $0$ est valeur propre de $J$.

De plus $\dim SEP(J,0) = 3 - \operatorname{rg} J = 2$.

$J$ est une matrice symétrique à coefficients réels donc $J$ est diagonalisable.

$J$ possède donc une autre valeur propre qui ne peut être que $3$.

<u>Les valeurs propres de $J$ (dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$) sont $0$ et $3$.</u>

▲ <u>Remarque..</u> $\dim SEP(J,0) = 2$ donc nécessairement $\dim SEP(J,3) = 1$.

Soit $(X_1, X_2)$ une base de $SEP(J,0)$ et $(X_3)$ une base de $SEP(J,3)$.

Comme $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = SEP(J,0) \oplus SEP(J,3)$ : $\mathcal{B}' = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $J$ associés aux valeurs propres $0$, $0$ et $3$.

Soit $P$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.

Alors $P^{-1}JP = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&3 \end{pmatrix} = \operatorname{Diag}(0,0,3)$. ▲

b) $A = \begin{pmatrix} 0&1/2&1/2\\1/2&0&1/2\\1/2&1/2&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2&1/2&1/2\\1/2&1/2&1/2\\1/2&1/2&1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}J - \frac{1}{2}I_3$.

<u>$A = \frac{1}{2}J - \frac{1}{2}I_3$.</u>

$P^{-1}AP = P^{-1}\left(\frac{1}{2}J - \frac{1}{2}I_3\right)P = \frac{1}{2}P^{-1}JP - \frac{1}{2}P^{-1}I_3P = \frac{1}{2}\operatorname{Diag}(0,0,3) - \frac{1}{2}I_3$.

$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\left[\operatorname{Diag}(0,0,3) - \operatorname{Diag}(1,1,1)\right] = \frac{1}{2}\operatorname{Diag}(-1,-1,2) = \operatorname{Diag}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$.

$A$ est semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} -1/2&0&0\\0&-1/2&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\underline{\underline{\mathrm{Sp}\,A = \{-\frac{1}{2}, 1\}}}$. $\rho(A) = \mathrm{Max}\{|-\frac{1}{2}|, |1|\} = 1$. $\underline{\underline{\rho(A) = 1}}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $A^n = \left(\frac{1}{2}J - \frac{1}{2}I_3\right)^n \underset{\uparrow}{=} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell}\left(\frac{1}{2}J\right)^{\ell}\left(-\frac{1}{2}I_3\right)^{n-\ell}$.

$\frac{1}{2}J$ et $-\frac{1}{2}I_3$ commutent

$A^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell}\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-\ell} J^{\ell}$. $\quad (I_3^{n-\ell} = I_3 \dots)$.

$J^2 = 3J$. Une récurrence simple montre que $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $J^r = 3^{r-1} J$.

Alors $A^n = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-0} J^0 + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell}\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-\ell} 3^{\ell-1} J$.

$A^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell}\left(\frac{3}{2}\right)^{\ell}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-\ell}\right) J = \left(-\frac{1}{2}\right)^n I_3 + \frac{1}{3}\left[\underbrace{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^n}_{1} - \underbrace{\binom{n}{0}\left(\frac{3}{2}\right)^0}_{1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-0}\right] J$

$\underline{\underline{A^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n I_3 + \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) J}}$ et ceci pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$... et même dans $\mathbb{N}$. ⚠

{ Voir $N(A^n)$ après la rédaction de d)

d) $\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{3}$ car $|-\frac{1}{2}| < 1$.

Alors il n'est pas difficile de voir que $\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ et que

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) J\right) = \frac{1}{3} J$

ce qui donne clairement $\underline{\underline{\lim_{n \to +\infty} A^n = \frac{1}{3} J}}$.

$\underline{\underline{(A^n)_{n \geq 0} \text{ converge vers la matrice } \Pi \text{ égale à } \frac{1}{3} J.}}$

$\mathrm{rg}\, \Pi = \mathrm{rg}\left(\frac{1}{3} J\right) = \mathrm{rg}\, J = 1$ ! $\quad \underline{\underline{\mathrm{rg}\, \Pi = 1}}$.

$\Pi^2 = \left(\frac{1}{3} J\right)\left(\frac{1}{3} J\right) = \frac{1}{9} J^2 = \frac{1}{9} \times 3J = \frac{1}{3} J = \Pi$. $\Pi^2 = \Pi$. $\underline{\underline{\Pi \text{ est la matrice d'un projecteur de } \mathbb{R}^3}}$.

⚠ Retour sur la fin de c) $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\alpha_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ et $\beta_n = \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

$A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n + \beta_n & \beta_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n + \beta_n & \beta_n \\ \beta_n & \beta_n & \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$. $\quad |\alpha_n + \beta_n| + |\beta_n| + |\beta_n| = |\beta_n| + |\alpha_n + \beta_n| + |\beta_n| = |\beta_n| + |\beta_n| + |\alpha_n + \beta_n|$ !!

Alors $N(A^n) = |\alpha_n+\beta_n| + 2|\beta_n| = \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right| + 2\left|\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right|$

$N(A^n) = \frac{1}{3}\left|1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| + \frac{2}{3}\left|1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right|.$

$\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| = \left|\frac{1}{2}\right|^n \leqslant 1$ ; $-1 \leqslant \left(-\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 1$ ; $1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \geqslant 0$. $\left|1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| = 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

$n \in \mathbb{N}^*$. $\left|2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 1$ ; $-1 \leqslant 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 1$ ; $1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \geqslant 0$.

$\left|1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| = 1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$

Alors $N(A^n) = \frac{1}{3}\left(1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + \frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1.$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, N(A^n) = 1$. Mieux $\underline{\forall n \in \mathbb{N}, N(A^n) = 1.}$

## Q2 Exemple 2..

a) $A$ est triangulaire supérieure donc les valeurs propres de $A$ sont les éléments de sa diagonale. $\underline{\mathrm{Sp}\,A = \{1, 1+i, 1-i\}.}$

$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et admet trois valeurs propres deux à deux distinctes.

**$A$ est diagonalisable.**

$|1+i| = |1-i| = \sqrt{2}$

$N(A) = \max(1, |1+i|+1, |1-i|) = \sqrt{2}+1$. Ainsi : $\underline{N(A) = 1+\sqrt{2}}$

$\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}A} |\lambda| = \max\limits_{\lambda \in \{1,1+i,1-i\}} |\lambda| = \sqrt{2}$. $\underline{\rho(A) = \sqrt{2}.}$

b) $\mathrm{Sp}\,A = \{1, 1+i, 1-i\}$ et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc les sous-espaces propres de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont des droites vectorielles.

- $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Posons $Y_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. $(Y_1)$ est une base de $SEP(A,1)$.
- $A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = (1+i)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Posons $Y_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. $(Y_2)$ est une base de $SEP(A, 1+i)$.

Soit $Y=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$

$AY=(1-i)Y \Leftrightarrow \begin{cases} x = (1-i)x \\ (1+i)y + z = (1-i)y \\ (1-i)z = (1-i)z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=(1+i)y-(1+i)y=-2iy \end{cases}.$

Alors $SEP(A,1-i)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2i \end{pmatrix}$. et Posons $Y_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2i \end{pmatrix}$ ; ($Y_3$ est une base de $SEP(A,1-i)$.

Comme $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})=SEP(A,1)\oplus SEP(A,1+i)\oplus SEP(A,1-i)$ : $(Y_1,Y_2,Y_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $A$ respectivement associés aux valeurs propres $1$, $1+i$ et $1-i$.

$\hat{\mathcal{B}}=\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2i \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de $A$.

c) Soit $\hat{P}$ la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0=(E_1,E_2,E_3)$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\hat{\mathcal{B}}$.

$\hat{P}$ est inversible, $\hat{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$ et $\hat{P}^{-1}A\hat{P}=\mathrm{Diag}(1,1-i,1+i)$.

$A=\hat{P}\,\mathrm{Diag}(1,1-i,1+i)\hat{P}^{-1}$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$A^n=(\hat{P}\,\mathrm{Diag}(1,1-i,1+i)\hat{P}^{-1})^n=\hat{P}\,(\mathrm{Diag}(1,1-i,1+i))^n\hat{P}^{-1}$
$=\hat{P}\,\mathrm{Diag}(1,(1-i)^n,(1+i)^n)\hat{P}^{-1}$.

$\hat{P}^{-1}$ est la matrice de passage de $\hat{\mathcal{B}}$ à $\hat{\mathcal{B}}_0$.

$Y_1=E_1$, $Y_2=E_2$ et $Y_3=E_2-2iE_3$.

$E_1=Y_1$, $E_2=Y_2$, $E_3=\frac{1}{2i}(E_2-Y_3)=\frac{1}{2i}(Y_2-Y_3)$. $\hat{P}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2i \\ 0 & 0 & -1/2i \end{pmatrix}$.

$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+i)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1-i)^n \end{pmatrix}\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

$A^n=\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+i)^n & (1-i)^n \\ 0 & 0 & -2i(1-i)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & 2i(1+i)^n & (1+i)^n-(1-i)^n \\ 0 & 0 & 2i(1-i)^n \end{pmatrix}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+i)^n & [(1+i)^n - (1-i)^n]/2i \\ 0 & 0 & (1-i)^n \end{pmatrix}$$

$$\frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} = \operatorname{Im}(1+i)^n = \operatorname{Im}\left(\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}\right)^n = \operatorname{Im}\left(\sqrt{2}^n e^{i\frac{\pi n}{4}}\right) = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+i)^n & 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4} \\ 0 & 0 & (1-i)^n \end{pmatrix}$$ et ceci pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$ et même dans $\mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\quad Sp\, A^n = \{1, (1+i)^n, (1-i)^n\}$.

$\rho(A^n) = \max(1, |(1+i)^n|, |(1-i)^n|) = \max(1, |1+i|^n, |1-i|^n) = (\sqrt{2})^n = 2^{n/2}$.

$(\rho(A))^n = (\sqrt{2})^n = 2^{n/2}$.

Ainsi $\underline{\rho(A^n) = (\rho(A))^n \text{ pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^* \text{ et même dans } \mathbb{N}}$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $N(A^n) = \max(|1|, |(1+i)^n| + |2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}|, |(1-i)^n|)$.

$N(A^n) = \max(1, 2^{n/2} + 2^{n/2} |\sin \frac{n\pi}{4}|, 2^{n/2}) = 2^{n/2} + 2^{n/2} |\sin \frac{n\pi}{4}|$.

$\underline{N(A^n) = 2^{n/2}(1 + |\sin \frac{n\pi}{4}|) \text{ pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^* \text{ et même dans } \mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(N(A^n))^{1/n} = \left(2^{n/2}(1 + |\sin(\frac{n\pi}{4})|)\right)^{1/n}$

$(N(A^n))^{1/n} = \sqrt{2}\,(1 + |\sin(\frac{n\pi}{4})|)^{\frac{1}{n}} = \sqrt{2}\, e^{\frac{1}{n} \ln(1 + |\sin(\frac{n\pi}{4})|)}$

$0 \leq \frac{1}{n} \ln(1 + |\sin(\frac{n\pi}{4})|) \leq \frac{\ln 2}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln 2}{n}$.

Alors par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \ln(1 + |\sin \frac{n\pi}{4}|)\right) = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (N(A^n))^{1/n} = \sqrt{2}\, e^0 = \sqrt{2} = \rho(A)$. $\quad \underline{\lim\limits_{n \to +\infty} (N(A^n))^{1/n} = \rho(A)}$.

R



## PARTIE II Un critère de convergence vers la matrice nulle.

(Q3) $AX=\lambda X$. $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\sum_{j=1}^{p} a_{kj} x_j = \lambda x_k$.

En particulier $\lambda x_{k_0} = \sum_{j=1}^{p} a_{k_0 j} x_j$

$|\lambda||x_{k_0}| = |\lambda x_{k_0}| = |\sum_{j=1}^{p} a_{k_0 j} x_j| \leq \sum_{j=1}^{p} |a_{k_0 j}||x_j| \leq \sum_{j=1}^{p} |a_{k_0 j}||x_{k_0}|$.

En divisant par $|x_{k_0}|$ on obtient $|\lambda| \leq \sum_{j=1}^{p} |a_{k_0 j}|$ car $|x_{k_0}|>0$.

$|\lambda| \leq \sum_{j=1}^{p} |a_{k_0 j}| \leq \max_{1\leq k\leq p} \sum_{j=1}^{p} |a_{kj}| = N(A)$

$|\lambda| \leq \sum_{j=1}^{p} |a_{k_0 j}| \leq N(A)$.

Ceci est vrai pour tout $\lambda \in Sp\,A$.

Donc $\max_{\lambda \in Sp A} |\lambda| \leq N(A)$. Donc $\rho(A) \leq N(A)$. Clairement $\rho(A) \geq 0$ donc

$0 \leq \rho(A) \leq N(A)$.

(Q4) a) $AX=\lambda X$ donc $A^n X = \lambda^n X$. Comme $X \neq 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})}$ : $\lambda^n \in Sp\,A^n$.

Alors $|\lambda^n| \leq \rho(A^n)$. $|\lambda|^n \leq \rho(A^n)$ et ceci pour tout $\lambda \in Sp\,A$.

Ainsi $\max_{\lambda \in Sp A} |\lambda|^n \leq \rho(A^n)$. Donc $\left(\max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|\right)^n \leq \rho(A^n)$.

Donc $(\rho(A))^n \leq \rho(A^n)$.

b) Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ les racines $n^{\text{ième}}$ de $\rho$ ... que nous supposerons donc non nul ?? rien n'empêchant que si $\rho=0$ : $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1}$ !

Alors $X^n - \rho = \prod_{j=0}^{n-1} (X - \alpha_j)$. Alors $A^n - \rho I_p = \prod_{j=0}^{n-1} (A - \alpha_j I_p)$.

c) $\gamma \in Sp\,A^n$ donc $A^n - \gamma I_p$ est une matrice non inversible.

Alors le produit des matrices $A - \alpha_0 I_p, A - \alpha_1 I_p, \dots, A - \alpha_{n-1} I_p$ n'est pas inversible.

Comme un produit de matrices inversibles est inversible, nécessairement l'une des matrices $A - \alpha_0 I_p, A - \alpha_1 I_p, \dots, A - \alpha_{n-1} I_p$ n'est pas inversible.

Donc l'un des complexes $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ est valeur propre de $A$.

Il existe un entier $j_0$ de $[\![0, n-1]\!]$ pour lequel $\alpha_{j_0}$ est une valeur propre de $A$.

d) $\rho(A^n) = |\gamma| = |\alpha_{j_0}^n| = |\alpha_{j_0}|^n \leq \left( \max_{\lambda \in Sp A} |\lambda| \right)^n = (\rho(A))^n$ ; $\rho(A^n) \leq (\rho(A))^n$.

Donc $(\rho(A))^n \overset{a)}{\leq} \rho(A^n) \leq (\rho(A))^n$ ; $(\rho(A))^n = \rho(A^n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \rho(A^n) = (\rho(A))^n$.

Nous avons vu dans Q3 que $\rho(A) \leq N(A)$ pour toute matrice $A$ de $M_p(\mathbb{C})$.

Ici nous pouvons donc dire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \rho(A^n) \leq N(A^n)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; (\rho(A))^n \leq N(A^n)$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; 0 \leq \rho(A) \leq (N(A^n))^{1/n}$ $\quad$ ($t \mapsto t^{1/n}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ ...)

Q5 Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; A^n = (a_{kj}(n))_{1 \leq k, j \leq p}$.

$\lim_{n \to +\infty} A^n = O_{M_p(\mathbb{C})}$ donc $\forall (k,j) \in [\![1,p]\!]^2, \; \lim_{n \to +\infty} a_{kj}(n) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$0 \leq N(A^n) = \max_{1 \leq k \leq p} \left( \sum_{j=1}^{p} |a_{kj}(n)| \right) \leq \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} |a_{kj}(n)|.$$

$\forall (k,j) \in [\![1,p]\!]^2, \; \lim_{n \to +\infty} |a_{kj}(n)| = 0$

Donc $\forall k \in [\![1,p]\!], \; \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{p} |a_{kj}(n)| = 0$ et ainsi $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} |a_{kj}(n)| = 0$.

R



Par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} N(A^n) = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \rho(A) \leq (N(A^n))^{1/n}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq (\rho(A))^n \leq N(A^n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} N(A^n) = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\rho(A))^n = 0$ par encadrement. Ceci entraîne que $|\rho(A)| < 1$.

Comme $\rho(A) \geq 0$ : $\underline{\underline{\rho(A) < 1}}$.

Q6 a) A est diagonalisable donc A est semblable à une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p)$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

$\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$, $D = P^{-1}AP$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D^n = P^{-1}A^nP$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1} = P\,\mathrm{Diag}(\delta_1^n, \delta_2^n, \dots, \delta_p^n)\,P^{-1}$.

$\mathrm{Sp}\,A = \mathrm{Sp}\,D = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p\}$.

$\forall k \in [\![1, p]\!]$, $|\delta_k| \leq \rho(D) = \rho(A)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq |\delta_k|^n \leq (\rho(A))^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\rho(A))^n = 0$ car $0 \leq \rho(A) < 1$.

Par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} |\delta_k|^n = 0$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

Donc $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |\delta_k^n| = 0$, $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_k^n = 0$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Diag}(\delta_1^n, \delta_2^n, \dots, \delta_p^n) = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{C})}$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = \lim\limits_{n\to+\infty} (PD^nP^{-1}) = P\,0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{C})}\,P^{-1} = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{C})}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} P = P$, $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{C})}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P^{-1} = P^{-1}$ !!

Si $\rho(A) < 1$ : $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}}$.

**b)** $Sp\, A_\varepsilon = \{ \frac{1}{\rho(A)+\varepsilon} \lambda ; \lambda \in Sp\, A \}$.

$$\rho(A_\varepsilon) = \max_{\lambda' \in Sp A_\varepsilon} |\lambda'| = \max_{\lambda \in Sp A} \left| \frac{1}{\rho(A)+\varepsilon} \lambda \right| = \max_{\lambda \in Sp A} \left( \frac{1}{\rho(A)+\varepsilon} |\lambda| \right) = \frac{1}{\rho(A)+\varepsilon} \max_{\lambda \in Sp A} |\lambda| = \frac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon}.$$

$\underline{\rho(A_\varepsilon) = \frac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon}}$ donc $\underline{\underline{\rho(A_\varepsilon) < 1}}$ car $\varepsilon > 0$.

$\rho(A_\varepsilon) < 1$ donc d'après Q6 c) la suite $(A_\varepsilon^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $O_{M_p(\mathbb{C})}$ (car n'oublions pas que $A_\varepsilon$ est diagonalisable ( $A_\varepsilon = \frac{1}{\rho(A)+\varepsilon} A$ et $A$ est diagonalisable).

$(A_\varepsilon^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $O_{M_p(\mathbb{C})}$ donc Q5 montre que $\lim_{n \to +\infty} N(A_\varepsilon^n) = 0$.

Alors la définition de la limite d'une suite permet de dire que :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in [\![ n_0, +\infty [\![$, $|N(A_\varepsilon^n) - 0| \leq 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0 \Rightarrow N(A_\varepsilon^n) \leq |N(A_\varepsilon^n)| \leq 1$.

$\underline{\underline{\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0 \Rightarrow N(A_\varepsilon^n) \leq 1.}}$

**c)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $A^n = (a_{kj}(n))_{1 \leq k,j \leq p}$ et $A_\varepsilon^n = (b_{kj}(n))_{1 \leq k,j \leq p}$.

$A_\varepsilon = \frac{1}{\rho(A)+\varepsilon} A$ ; $A = (\rho(A)+\varepsilon) A_\varepsilon$ ; $A^n = (\rho(A)+\varepsilon)^n A_\varepsilon^n$.

$\forall (k,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $a_{kj}(n) = (\rho(A)+\varepsilon)^n b_{kj}(n)$.

$\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\sum_{j=1}^{p} |a_{kj}(n)| = \sum_{j=1}^{p} \left( |(\rho(A)+\varepsilon)^n b_{kj}(n)| \right) = |(\rho(A)+\varepsilon)^n| \sum_{j=1}^{p} |b_{kj}(n)|$

or $(\rho(A)+\varepsilon)^n > 0$.

Donc $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\sum_{j=1}^{p} |a_{kj}(n)| = (\rho(A)+\varepsilon)^n \sum_{j=1}^{p} |b_{kj}(n)|$ $\underline{(\rho(A)+\varepsilon)^n > 0}$

Donc $N(A^n) = \max_{1 \leq k \leq p} \sum_{j=1}^{p} |a_{kj}(n)| = \max_{1 \leq k \leq p} \left( (\rho(A)+\varepsilon)^n \sum_{j=1}^{p} |b_{kj}(n)| \right) = (\rho(A)+\varepsilon)^n \max_{1 \leq k \leq p} \sum_{j=1}^{p} |b_{kj}(n)|$

$\underline{\underline{N(A^n) = (\rho(A)+\varepsilon)^n N(A_\varepsilon^n)}}$ et ceci pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$... normal $N$ est une norme !!

R



d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Q4d donne : $\rho(A) \leq (N(A^n))^{1/n}$ donc $0 \leq (N(A^n))^{1/n} - \rho(A)$.

Supposons que $n \geq n_0$. $N(A^n) = (\rho(A)+\varepsilon)^n N(A_\varepsilon^n)$, $N(A_\varepsilon^n) \leq 1$ et $(\rho(A)+\varepsilon)^n \geq 0$.

Alors $N(A^n) \leq (\rho(A)+\varepsilon)^n$. Or $N(A^n) \geq 0$ et $(\rho(A)+\varepsilon)^n \geq 0$

Donc $(N(A^n))^{1/n} \leq \left((\rho(A)+\varepsilon)^n\right)^{1/n} = \rho(A)+\varepsilon$ car $\rho(A)+\varepsilon \geq 0$.

Ainsi $N(A^n)^{1/n} - \rho(A) \leq \varepsilon$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq (N(A^n))^{1/n} - \rho(A) \leq \varepsilon.$

Nous venons donc de montrer que :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq (N(A^n))^{1/n} - \rho(A) \leq \varepsilon$. Alors :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_0 \Rightarrow |(N(A^n))^{1/n} - \rho(A)| \leq \varepsilon$.

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} (N(A^n))^{1/n} = \rho(A)$.

## PARTIE III Matrices positives. Relation entre $\rho(A)$ et les coefficients de A.

(Q7) Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = (a_{kj}(n))_{1\leq k,j\leq p}$ et $B^n = (b_{kj}(n))_{1\leq k,j\leq p}$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (k,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $0 \leq b_{kj}(n) \leq a_{kj}(n)$.

- $\forall (k,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $0 \leq b_{kj} \leq a_{kj}$ donc $\forall (k,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $0 \leq b_{kj}(1) \leq a_{kj}(1)$.

  La propriété est vraie pour $n=1$.

- Supposons la propriété vraie pour $n$ dans $\mathbb{N}^*$ et montrons-la pour $n+1$.

  Soit $(k,j) \in [\![1,p]\!]^2$.

  $b_{kj}(n+1) = \sum_{\ell=1}^{p} b_{k\ell}(n)\, b_{\ell j}$ ( $B^{n+1} = B^n \times B$ ! )

  Or $\forall \ell \in [\![1,p]\!]$, $0 \leq b_{k\ell}(n) \leq a_{k\ell}(n)$ par hypothèse de récurrence et

  $\forall \ell \in [\![1,p]\!]$, $0 \leq b_{\ell j}(n) \leq a_{\ell j}$.

  Alors $\forall \ell \in [\![1,p]\!]$, $0 \leq b_{k\ell}(n)\, b_{\ell j}(n) \leq a_{k\ell}(n)\, a_{\ell j}$. Ainsi :

  $$b_{kj}(n+1) = \sum_{\ell=1}^{p} b_{k\ell}(n)\, b_{\ell j} \leq \sum_{\ell=1}^{p} a_{k\ell}(n)\, a_{\ell j} = a_{kj}(n+1).$$

$\forall (k,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $0 \leq b_{kj}(n+1) \leq a_{kj}(n+1)$. La propriété est vraie pour $n+1$.

Ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (k,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $0 \leq b_{kj}(n) \leq a_{kj}(n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![1,p]\!]$.

$$\sum_{j=1}^{p} |b_{kj}(n)| = \sum_{j=1}^{p} b_{kj}(n) \leq \sum_{j=1}^{p} a_{kj}(n) = \sum_{j=1}^{p} |a_{kj}(n)|$$

Alors $\max_{1\leq k\leq p} \sum_{j=1}^{p} |b_{kj}(n)| \leq \max_{1\leq k\leq p} \sum_{j=1}^{p} |a_{kj}(n)|$ ; $N(B^n) \leq N(A^n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $N(B^n) \leq N(A^n)$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(N(B^n))^{1/n} \leq (N(A^n))^{1/n}$.

En faisant tendre $n$ vers $+\infty$ il vient : $\rho(B) \leq \rho(A)$.

R



**Q8** Posons pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, $A^n = (a_{kj}(n))_{1\leq k,j\leq p}$.

Montrons par récurrence sur $n$ que $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\sum_{j=1}^{p} a_{kj}(n) = s^n$

- $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\sum_{j=1}^{p} a_{kj}(1) = \sum_{j=1}^{p} a_{kj} = s$ ; la propriété est vraie pour $n=1$.
- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

Soit $k \in [\![1,p]\!]$.

$$\sum_{j=1}^{p} a_{kj}(n+1) \underset{A^{n+1}=A^nA}{=} \sum_{j=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{p} a_{k\ell}(n)\, a_{\ell j} \overset{\text{inversion des deux sommes}}{=} \sum_{\ell=1}^{p}\Big(a_{k\ell}(n) \underbrace{\sum_{j=1}^{p} a_{\ell j}}_{=s}\Big) = s\sum_{\ell=1}^{p} a_{k\ell}(n) = s\,s^n = s^{n+1}$$

$\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\sum_{j=1}^{p} a_{kj}(n+1) = s^{n+1}$. La propriété est vraie pour $n+1$ et la récurrence s'achève.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$N(A^n) = \max_{1\leq k\leq p} \sum_{j=1}^{p} |a_{kj}(n)| \overset{a_{kj}(n)\geq 0 \text{ (prouvé dans Q7...)}}{=} \max_{1\leq k\leq p} \sum_{j=1}^{p} a_{kj}(n) = \max_{1\leq k\leq p} s^n = s^n.$$

$(N(A^n))^{1/n} = (s^n)^{1/n} \underset{s\geq 0}{=} s$. Alors $\rho(A) = \lim_{n\to+\infty} (N(A^n))^{1/n} = s$.

$\rho(A) = s$.

**Q9** Nous savons déjà que $\rho(A) \leq N(A)$. Il reste plus qu'à montrer que $\sigma \leq \rho(A)$. C'est clair si $\sigma = 0$. Supposons $\sigma \neq 0$. Alors $\sigma > 0$.

Posons $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\sigma_k = \sum_{j=1}^{p} a_{kj} = \sum_{j=1}^{p} |a_{kj}|$.

$\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\sigma_k \geq \min_{1\leq k\leq p} \sum_{j=1}^{p} |a_{kj}| = \sigma > 0$.

Posons $\forall (k,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $b_{kj} = \frac{\sigma}{\sigma_k} a_{kj}$. Posons également $B = (b_{kj})_{1\leq k,j\leq p}$

$\forall (k,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $0 \leq b_{kj} \leq a_{kj}$ . Alors $\underline{\rho(B) \leq \rho(A)}$ d'après Q7

$\uparrow \frac{\sigma}{\sigma_k} \leq 1$ et $a_{kj} \geq 0$.

De plus 1) $\forall (k,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $b_{kj} \geq 0$

(*) → 2) $B = (b_{kj})$ n'est pas nulle car $A$ n'est pas nulle et $\sigma > 0$

3) $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\sum_{j=1}^{p} b_{kj} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\sigma}{\sigma_k} a_{kj} = \frac{\sigma}{\sigma_k} \sum_{j=1}^{p} a_{kj} = \frac{\sigma}{\sigma_k} \sigma_k = \sigma.$

Nous pouvons alors appliquer Q8. $\rho(B) = \sigma$.

Alors $\sigma = \rho(B) \leq \rho(A)$. $\sigma \leq \rho(A)$.

Remarque.. (*) n'est davantage pas utile mais nous avons prouvé Q8 pour $A$ et dans le texte $A$ n'est pas nulle !!

Ainsi $\min_{1 \leq k \leq p} \sum_{j=1}^{p} a_{kj} = \sigma \leq \rho(A) \leq N(A)$.

Q10 a) $\Delta_x = \mathrm{Diag}(x_1, x_2, \dots, x_p)$. $S_p \Delta_x = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$.

$X > 0$ donc $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $x_k > 0$.

Alors $0$ n'est pas valeur propre de $\Delta_x$. $\Delta_x$ est inversible.

Notons que $\Delta_x^{-1} = \mathrm{Diag}(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_p})$.

Posons $\Delta_x = (\delta_{kj})$, $A\Delta_x = (\varepsilon_{kj})$, $\Delta_x^{-1} = (\delta'_{kj})$ et $\Delta_x^{-1} A \Delta_x = (\gamma_{kj})$.

$\forall (k,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $\varepsilon_{kj} = \sum_{\ell=1}^{p} a_{k\ell} \delta_{\ell j} = a_{kj} \delta_{jj} = a_{kj} x_j$.

$\Delta_x = \mathrm{Diag}(x_1, \dots, x_p)$

$\forall (k,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $\gamma_{kj} = \sum_{\ell=1}^{n} \delta'_{k\ell} \varepsilon_{\ell j} = \delta'_{kk} \varepsilon_{kj} = \frac{1}{x_k} \varepsilon_{kj} = \frac{1}{x_k} a_{kj} x_j$.

$\Delta_x^{-1} = \mathrm{Diag}(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_p})$

Ainsi $\Delta_x^{-1} A \Delta_x = \left( \frac{1}{x_k} a_{kj} x_j \right)_{1 \leq k,j \leq p}$.

**b)** $A$ et $\Delta_x^{-1} A \Delta_x$ sont semblables. Ainsi $\rho(A) = \rho(\Delta_x^{-1} A \Delta_x)$ car $Sp\,A = Sp(\Delta_x^{-1} A \Delta_x)$

$\Delta_x^{-1} A \Delta_x$ est une matrice de $M_p(\mathbb{R})$ positive et non nulle ($\Delta_x^{-1} A \Delta_x = 0_{M_p(\mathbb{R})}$

donne $A = 0_{M_p(\mathbb{R})}$ ! ). Rappelons que $\Delta_x^{-1} A \Delta_x = (\gamma_{kj})_{1 \le k,j \le p}$

Alors Q9 donne $\min\limits_{1 \le k \le p} \sum\limits_{j=1}^{p} \gamma_{kj} \le \rho(\Delta_x^{-1} A \Delta_x) = \rho(A) \le N(\Delta_x^{-1} A \Delta_x)$.

Donc $\min\limits_{1 \le k \le p} \sum\limits_{j=1}^{p} \gamma_{kj} \le \rho(A) \le \max\limits_{1 \le k \le p} \sum\limits_{j=1}^{p} |\gamma_{kj}| = \max\limits_{1 \le k \le p} \sum\limits_{j=1}^{p} \gamma_{kj}$

Par conséquent : $\underline{\underline{\min\limits_{1 \le k \le p} \frac{1}{x_k} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{kj} x_j \le \rho(A) \le \max\limits_{1 \le k \le p} \frac{1}{x_k} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{kj} x_j}}$.

**c)** Supposons que $\beta$ est un réel positif tel que $\beta X < AX$.

Alors $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\beta x_k < \sum\limits_{j=1}^{p} a_{kj} x_j$ et $x_k > 0$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\beta < \frac{1}{x_k} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{kj} x_j$.

Donc $\beta < \min\limits_{1 \le k \le p} \left( \frac{1}{x_k} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{kj} x_j \right) \le \rho(A)$. $\underline{\underline{\beta < \rho(A)}}$.

R.



## Partie IV Matrices strictement positives.

**Q11** a) Posons $\omega = \min\limits_{1\leq \ell,j\leq p} a_{\ell j}$. $\omega > 0$ car $\forall (\ell,j)\in [\![1,p]\!]^2$, $a_{\ell j} > 0$.

Posons $\forall (\ell,j)\in [\![1,p]\!]^2$, $b_{\ell j} = \omega$ et $B = (b_{\ell j})_{1\leq \ell,j\leq p}$.

Alors $\forall (\ell,j)\in [\![1,p]\!]^2$, $0 \leq b_{\ell j} \leq a_{\ell j}$.

donc $\rho(B)\leq \rho(A)$ (Q7).

$\forall \ell\in [\![1,p]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{p} b_{\ell j} = p\omega$. Alors $\rho(B) = p\omega$ d'après Q8.

Ainsi $0 < p\omega \leq \rho(A)$. $\underline{\underline{\rho(A) > 0}}$.

b) $\forall \ell\in [\![1,p]\!]$, $\left|\sum\limits_{j=1}^{p} a_{\ell j} x_j\right| \leq \sum\limits_{j=1}^{p} |a_{\ell j} x_j| = \sum\limits_{j=1}^{p} |a_{\ell j}|\,|x_j| = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{\ell j}|x_j|$

$\forall \ell\in [\![1,p]\!]$, $\left|\sum\limits_{j=1}^{p} a_{\ell j} x_j\right| \leq \sum\limits_{j=1}^{p} a_{\ell j}|x_j|$

Alors $\underline{\underline{|AX| \leq A|X|}}$. $AX = \lambda X$. $|AX| = |\lambda|\,|X| = \rho(A)|X|$

donc $\underline{\underline{\rho(A)|X| \leq A|X|}}$.

c) Posons $X = \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_p\end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1\\ \vdots \\ z_p\end{pmatrix}$. $Z = A|X|$ ; $\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots \\ z_p\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} |x_1|\\ \vdots \\ |x_p|\end{pmatrix}$.

$\forall \ell\in [\![1,p]\!]$, $z_\ell = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{\ell j}|x_j|$

$X \neq 0_{M_{p,1}}$. $\exists j_0\in [\![1,p]\!]$, $x_{j_0}\neq 0$.

$\forall \ell\in [\![1,p]\!]$, $z_\ell = \sum\limits_{j=1}^{p} \underbrace{a_{\ell j}|x_j|}_{\geq 0} \geq a_{\ell j_0}|x_{j_0}| > 0$

$\quad$ ($a_{\ell j_0} > 0$ et $|x_{j_0}| > 0$)

$\forall \ell\in [\![1,p]\!]$, $z_\ell > 0$.

donc $\underline{\underline{Z = A|X| > 0}}$.

R.



c'est ce que nous venons de faire avec $|X|$ ! lemme un peu tardif !!

d) lemme.. Si $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ : $T \geqslant 0$ et $T \neq 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})} \Rightarrow AT > 0$.

Soit $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ tel que $T \geqslant 0$ et $T \neq 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$.

Posons $AT = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$. $\forall \ell \in [\![1,p]\!]$, $u_\ell = \sum_{j=1}^{p} \underbrace{a_{\ell j}}_{\geqslant 0} \underbrace{t_j}_{\geqslant 0} \geqslant 0$.

Supposons que $\ell \in [\![1,p]\!]$ et $u_\ell = 0$.

$\sum_{j=1}^{p} a_{\ell j} t_j = 0$ et $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $a_{\ell j} t_j \geqslant 0$.

Alors $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $a_{\ell j} t_j = 0$ et $a_{\ell j} > 0$. $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $t_j = 0$. $T = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$ !!

ceci achève la preuve du lemme.

$Y = A|X| - \rho(A)X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. $Y \geqslant 0$ d'après b). On suppose $Y \neq 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$.

le lemme donne alors $\underline{\underline{AY > 0}}$. Dans ces conditions :

$AY = A(A|X| - \rho(A)|X|) = A(Z - \rho(A)|X|) = AZ - \rho(A)A|X| = AZ - \rho(A)Z$.

$AZ - \rho(A)Z > 0$. Donc $\underline{\underline{\rho(A)Z < AZ}}$.

e) $Z = A|X|$. Or $|X| \geqslant 0$ et $|X| \neq 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$ $(X \neq 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{C})})$.

le lemme donne alors $Z > 0$.

Ainsi $Z > 0$, $\rho(A)Z < AZ$, $\rho(A) \in \mathbb{R}^+$ et $A$ est positive

d'après III Q10 : $\rho(A) < \rho(A)$ !!

cela montre que l'hypothèse $Y \neq 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$ ne convient pas.

Alors $Y = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$. $A|X| - \rho(A)|X| = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$. $A|X| = \rho(A)|X|$.

De plus $|X| \neq 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$ car $X \neq 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{C})}$.

Donc $\underline{\underline{|X| \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } \rho(A)}}$.

**Q12** a) $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$

$$(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = |z_1+z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|$$

$$\underbrace{z_1\overline{z_1}}_{|z_1|^2} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + \underbrace{z_2\overline{z_2}}_{|z_2|^2} = |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|.$$

Alors $2|z_1||z_2| = z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1} = |z_1|e^{i\theta_1}|z_2|e^{-i\theta_2} + |z_2|e^{i\theta_2}|z_1|e^{-i\theta_1}$.

$|z_1| \neq 0$ et $|z_2| \neq 0$. Ainsi $2 = e^{i(\theta_1-\theta_2)} + e^{-i(\theta_1-\theta_2)} = 2\cos(\theta_1-\theta_2)$.

$\cos(\theta_1-\theta_2) = 1$. $\theta_1-\theta_2 \equiv 0\ [2\pi]$.

Or $(\theta_1,\theta_2) \in [0,2\pi[^2$ donc $\theta_1-\theta_2 \in ]-2\pi,2\pi[$. Par conséquent $\theta_1-\theta_2 = 0$.

$\theta_1 = \theta_2$.

b) Montrons ce résultat par récurrence sur $p$.

- La propriété est vraie pour $p=2$ d'après a).
- Supposons la propriété vraie pour un élément $p$ de $[2,+\infty[$ et montrons la pour $p+1$. Soit $(z_1,\dots,z_{p+1}) \in \mathbb{C}^{p+1}$ tel que : $\begin{cases} \forall j \in [\![1,p+1]\!],\ z_j \neq 0 \\ \left|\sum_{j=1}^{p+1} z_j\right| = \sum_{j=1}^{p+1} |z_j|. \end{cases}$

$$\left|\sum_{j=1}^{p+1} z_j\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{p} z_j\right| + |z_{p+1}| \leq \sum_{j=1}^{p}|z_j| + |z_{p+1}| = \sum_{j=1}^{p+1}|z_j| = \left|\sum_{j=1}^{p+1} z_j\right|$$

Alors $\left|\sum_{j=1}^{p+1} z_j\right| \underset{①}{=} \left|\sum_{j=1}^{p} z_j\right| + |z_{p+1}| \underset{②}{=} \sum_{j=1}^{p}|z_j| + |z_{p+1}|$

② donne $\left|\sum_{j=1}^{p} z_j\right| = \sum_{j=1}^{p}|z_j|$. L'hypothèse de récurrence montre alors l'existence de $\theta$ dans $[0,2\pi[$ tel que $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $z_j = |z_j|e^{i\theta}$

$z_{p+1} \neq 0$ et $\sum_{j=1}^{p} z_j = e^{i\theta}\sum_{j=1}^{p}|z_j| \neq 0$. Alors ① et a) donnent l'existence de $\theta'$ dans $[0,2\pi[$ tel que $z_{p+1} = |z_{p+1}|e^{i\theta'}$ et $\sum_{j=1}^{p} z_j = \left|\sum_{j=1}^{p} z_j\right| e^{i\theta'}$

$\left|\sum_{j=1}^{p} z_j\right| = \sum_{j=1}^{p} |z_j|$ $\qquad$ $\sum_{j=1}^{p} z_j = \left|\sum_{j=1}^{p} z_j\right| e^{i\theta'}$ $\qquad$ $\forall j \in [\![1,k]\!],\ z_j = |z_j| e^{i\theta}$



Alors $\sum_{j=1}^{p} |z_j| e^{i\theta'} = \left|\sum_{j=1}^{p} z_j\right| e^{i\theta'} = \sum_{j=1}^{p} z_j = \sum_{j=1}^{p} |z_j| e^{i\theta}$

Comme $\sum_{j=1}^{p} |z_j| \neq 0$ : $e^{i\theta'} = e^{i\theta}$. Comme $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\theta' \in [0, 2\pi[$ : $\theta = \theta'$.

Alors $\forall j \in [\![1, k+1]\!]$, $z_j = |z_j| e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

La propriété est vraie pour $k+1$. Ceci achève la récurrence.

Si $p \in [\![2, +\infty[\![$ et si $z_1, z_2, \dots, z_p$ sont $p$ complexes tous non nuls tels que $\left|\sum_{j=1}^{p} z_j\right| = \sum_{j=1}^{p} |z_j|$

alors $\exists \theta \in [0, 2\pi[$, $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $z_j = |z_j| e^{i\theta}$.

Q13 $\quad A|X| > 0$ car $|X| \geqslant 0$ et $|X| \neq 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$ (Comme ...).

Alors $\rho(A)\,|X| > 0$ et $\rho(A) > 0$. Ainsi $|X| > 0$.

$|AX| = |\lambda X| = |\lambda|\,|X| = \rho(A)\,|X| = A|X|$.

$|AX| = A|X|$.

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $AX = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix}$.

Soit $k \in [\![1, p]\!]$, $\left|\sum_{j=1}^{p} a_{kj} x_j\right| = |x'_j| \overset{|AX| = A|X|}{=} \sum_{j=1}^{p} a_{kj} |x_j| \underset{a_{kj} > 0}{=} \sum_{j=1}^{p} |a_{kj} x_j|$

$\left|\sum_{j=1}^{p} a_{kj} x_j\right| = \sum_{j=1}^{p} |a_{kj} x_j|$ et $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $a_{kj} x_j \in \mathbb{C}^*$ ($a_{kj} > 0$ et $|x_j| > 0$).

Donc d'après Q12 $\exists \theta_k \in [0, 2\pi[$, $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $a_{kj} x_j = |a_{kj} x_j| e^{i\theta_k}$.

$\forall j \in [\![1, p]\!]$, $a_{kj} x_j = |a_{kj}|\,|x_j| e^{i\theta_k} = a_{kj} |x_j| e^{i\theta_k}$ et $a_{kj} \neq 0$.

$\forall j \in [\![1, p]\!]$, $x_j = |x_j| e^{i\theta_k}$.

Posons alors $\theta = \theta_k$ (!!!). $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $x_j = |x_j| e^{i\theta}$.

$\exists \theta \in [0, 2\pi[$, $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $x_j = |x_j| e^{i\theta}$. $\quad \exists \theta \in [0, 2\pi[$, $X = |X| e^{i\theta}$.

Je préfère faire sur $\exists \theta \in [0, 2\pi[, \ X = e^{i\theta}|X|$ ...

**Q14** a) $|X|$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\rho(A)$.

Donc $e^{i\theta}|X|$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\rho(A)$.

Alors $X$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\rho(A)$ ... et à la valeur propre $\lambda$. Ainsi $\lambda = \rho(A)$.

Alors
1) $\rho(A) \in Sp\, A$
2) $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in Sp A} |\lambda|$
3) $\rho(A) \geq 0$ donc $\rho(A) = |\rho(A)|$
4) $\forall \lambda \in Sp\, A, \ |\lambda| = \rho(A) \Rightarrow \lambda = \rho(A)$.

Ce tout suffit pour dire que $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximal.

b) Posons $\hat{W} = u_1 V - v_1 U$.

Notons que, d'après Q13 $|U| > 0$ et $|V| > 0$. En particulier $u_1 \neq 0$ et $v_1 \neq 0$. c'est trop !!

Si $\hat{W} = 0_{n,1}(\mathbb{C})$ la liberté de $(U,V)$ donne $u_1 = v_1 = 0$.

Donc $\hat{W} \neq 0_{n,1}(\mathbb{C})$ et $A\hat{W} = u_1 AV - v_1 AU = u_1 \rho(A) V - v_1 \rho(A) U = \rho(A)(u_1 V - v_1 U)$
$= \rho(A)\hat{W}$.

Donc $\hat{W}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\rho(A)$.

D'après Q13 : $|\hat{W}| > 0$. Or la première composante de $\hat{W}$ est nulle !

Ainsi $(U,V)$ est liée.

Comme $U \neq 0_{n,1}(\mathbb{C})$, $\exists \gamma \in \mathbb{C}$, $V = \gamma U$. $V \in Vect(U)$.

Tout vecteur propre de A associé à la valeur propre $\rho(A)$ appartient à $Vect(U)$.

De plus $0_{n,1}(\mathbb{C}) \in Vect(U)$. Alors $SEP(A, \rho(A)) \subset Vect(U)$.

Comme $\dim SEP(A, \rho(A)) \geq 1$ et $\dim Vect(U) = 1$ : $SEP(A, \rho(A)) = Vect(U)$.

**La dimension du sous-espace propre de $A$ associé à la valeur propre $\rho(A)$ est $1$.**

(Q15) a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$\lambda \in Sp A \Leftrightarrow A - \lambda I_p$ non inversible $\Leftrightarrow {}^t(A - \lambda I_p)$ non inversible.

$\lambda \in Sp A \Leftrightarrow {}^tA - \lambda {}^tI_p$ non inversible $\Leftrightarrow {}^tA - \lambda I_p$ non inversible $\Leftrightarrow \lambda \in Sp\, {}^tA$.

**$Sp\,{}^tA = Sp\,A$. $A$ et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres.**

b) ⚠ Ici il faut sans doute ajouter que $\boxed{Z \in M_p(\mathbb{R})}$ !!

C'est ce que nous ferons. De plus ce $Z$ n'a rien à voir avec celui de Q11 !!

$Sp\,{}^tA = Sp\,A$. Alors $\rho({}^tA) = \rho(A)$.

Donc $Z$ est un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre $\rho({}^tA)$.

Alors $|Z| > 0$ et $\exists \theta \in [0, 2\pi[$, $Z = e^{i\theta}|Z|$.

Posons $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix}$. $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $z_k = e^{i\theta}|z_k|$. et $|z_k| > 0$.

Alors $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $e^{i\theta} = \dfrac{z_k}{|z_k|} \in \mathbb{R}$. Donc $e^{i\theta} = 1$ ou $-1$.

Cela permet de dire que $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $z_k = |z_k|$ ou $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $z_k = -|z_k|$.

Alors $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $z_k > 0$ ou $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $z_k < 0$.

**Les coordonnées de $Z$ sont toutes strictement positives ou toutes strictement négatives.**

c) Posons $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$. ${}^tZU = \sum_{j=1}^{p} z_j u_j \neq 0$ donc ${}^tZU \neq 0$ !

$\forall j \in [\![1,p]\!], z_j u_j > 0$ ou $\forall j \in [\![1,p]\!], z_j u_j < 0$

$\forall k \in [\![1, p]\!]$, $y_k = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{p} z_j u_j} z_k$. $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $z_k = \varepsilon |z_k|$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ d'après b).

$\forall k \in [\![1, p]\!]$, $y_k = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{p} \varepsilon |z_j| u_j} \varepsilon |z_k| = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{p} |z_j| u_j} |z_k| > 0$

$|z_k| > 0$
$|z_j| > 0 \dots$
$u_j > 0 \dots$

$${}^tAY = {}^tA\left(\frac{1}{{}^tZU}Z\right) = \frac{1}{{}^tZU}{}^tAZ = \frac{1}{{}^tZU}\rho(A)Z = \rho(A)\frac{1}{{}^tZU}Z = \rho(A)Y.$$

$\underline{\underline{{}^tAY = \rho(A)Y}}$.

$${}^tYU = {}^t\left(\frac{1}{{}^tZU}Z\right)U = \frac{1}{{}^tZU}{}^tZU = 1. \quad \underline{\underline{{}^tYU = 1}}.$$

Q16 a) $\Pi^2 = (U\,{}^tY)(U\,{}^tY) = U\underbrace{({}^tYU)}_{=1}{}^tY = U\,{}^tY = \Pi$. $\Pi^2 = \Pi$.

Soit $q$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ de matrice $\Pi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

$\Pi^2 = \Pi$ donc $q^2 = q$. $q$ est un projecteur. $\underline{\underline{\Pi \text{ est la matrice d'un projecteur}}}$.

Ici nous ferons l'identification proposée !!

Soit $x \in \mathbb{R}^p$. $q(x) = 0 \Leftrightarrow \Pi x = 0 \Leftrightarrow U\,{}^tYx = 0 \Leftrightarrow \langle Y, x\rangle U = 0 \overset{U\neq 0}{\Leftrightarrow} \langle Y, x\rangle = 0$.

$q(x) = 0 \Leftrightarrow x \in (\mathrm{Vect}(Y))^\perp$. $\underline{\underline{\mathrm{Ker}\, q = (\mathrm{Vect}(Y))^\perp}}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^p$, $q(x) = \Pi x = U\,{}^tYx = \langle Y, x\rangle U \in \mathrm{Vect}(U)$. $\mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Vect}(U)$.

$q(U) = \Pi U = U\,{}^tYU = U$ ; $U \in \mathrm{Im}\, q$ ; $\mathrm{Vect}(U) \subset \mathrm{Im}\, q$.

Ainsi $\underline{\underline{\mathrm{Im}\, q = \mathrm{Vect}(U)}}$.

b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{1}{\rho(A)}A - \Pi\right)^n = \left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^n - \Pi$.

. C'est clair pour $n = 1$.

. Supposons la propriété vraie pour $n$ dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$$\left(\frac{1}{\rho(A)}A - \Pi\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{\rho(A)}A - \Pi\right)^n\left(\frac{1}{\rho(A)}A - \Pi\right) = \left(\left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^n - \Pi\right)\left(\frac{1}{\rho(A)}A - \Pi\right)$$

$$\left(\frac{1}{\rho(A)}A - \Pi\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^n\Pi - \frac{1}{\rho(A)}\Pi A + \Pi^2$$

$$\left(\frac{1}{\rho(A)}A - \Pi\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^{n+1} - \frac{1}{(\rho(A))^n}A^n\Pi - \frac{1}{\rho(A)}\Pi A + \Pi \qquad (\Pi^2 = \Pi).$$

$\Pi A = U^tYA = U^t({}^tAY) \underset{\uparrow}{=} U(\rho(A)^tY) = \rho(A)U^tY = \rho(A)\Pi.$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad {}^tAY = \rho(A)Y$

Alors $\underline{\frac{1}{\rho(A)}\Pi A = \Pi}$.

$A^n\Pi = A^nU^tY \underset{\uparrow}{=} (\rho(A))^nU^tY = (\rho(A))^n\Pi$. $\quad \underline{\frac{1}{(\rho(A))^n}A^n\Pi = \Pi}$.

$\qquad AU = \rho(A)U$

Alors $\left(\frac{1}{\rho(A)}A - \Pi\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^{n+1} - \Pi - \Pi + \Pi = \left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^{n+1} - \Pi$. La propriété est

vraie pour $n+1$. Ceci achève la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\frac{1}{\rho(A)}A - \Pi\right)^n = \left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^n - \Pi.$$

Q17 a) $\Pi W = U^tYW = ({}^tYW)U$ et $U \neq 0_{M_{p,1}(\mathbb{C})}$.

Pour montrer que $\Pi W = 0$ (il faut et) il suffit de montrer que ${}^tYW = 0$

ou que ${}^tWY = 0$. (${}^tYW \in M_1(\mathbb{C})$ ; ${}^t({}^tYW) = {}^tYW$)

$\mu W = (A - \rho(A)\Pi)W = AW - \rho(A)\Pi W$.

Alors $\mu{}^tW = {}^tW{}^tA - \rho(A){}^tW{}^t\Pi = {}^tW{}^tA - \rho(A){}^tWY{}^tU$.

Donc $\mu{}^tWY = {}^tW\underbrace{{}^tAY}_{\rho(A)Y} - \rho(A){}^tWY\underbrace{{}^tUY}_{{}^tUY = {}^tYU = 1} = \rho(A){}^tWY - \rho(A){}^tWY = 0$.

Or $\mu \neq 0$ donc ${}^tWY = 0$. Alors ${}^tYW = 0$. $\Pi W = U^tYW = 0_{M_{p,1}(\mathbb{C})}$

$\underline{\Pi W = 0_{M_{p,1}(\mathbb{C})}}$.

$(A - \rho(A)\Pi)W = \mu W$. $\quad AW - \rho(A)\Pi W = \mu W$ ; $AW = \mu W$ et $W \neq 0_{M_{p,1}}(\mathbb{C})$.

Donc $\underline{\mu \text{ est également valeur propre de } A}$. Par conséquent $\underline{|\mu| \leq \rho(A)}$.

b) Supposons que $|\mu| = \rho(A)$. Alors $\mu = \rho(A)$ car $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximal.

Alors $AW = \rho(A)W$ et $W \neq 0_{M_{p,1}(\mathbb{C})}$.

d'après Q13 $\exists \theta \in [0, 2\pi[$, $W = |W| e^{i\theta}$ ou $W = e^{i\theta}|W|$. Posons $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_p \end{pmatrix}$

$\forall k \in [\![1,p]\!]$, $w_k = e^{i\theta}|w_k|$

Or ${}^tYW = 0$. $\sum_{k=1}^{p} y_k w_k = 0$ ; $0 = \sum_{k=1}^{p} y_k e^{i\theta}|w_k| = e^{i\theta}\sum_{k=1}^{p} y_k |w_k|$.

Ainsi $\sum_{k=1}^{p} y_k |w_k| = 0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $y_k |w_k| \geq 0$ car $|Y| > 0$.

Donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $y_k |w_k| = 0$ et $y_k > 0$. Alors $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $|w_k| = 0$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $w_k = 0$. $W = 0_{M_{p,1}(\mathbb{C})}$ or $W$ est un vecteur propre.

Alors $|\mu| \leq \rho(A)$ et $|\mu| \neq \rho(A)$ donc $\underline{\underline{|\mu| < \rho(A)}}$.

c) $\forall \mu \in Sp(A - \rho(A)\Pi)$, $\mu \neq 0 \Rightarrow |\mu| < \rho(A)$.

Or $|0| < \rho(A)$ ! Donc $\forall \mu \in Sp(A - \rho(A)\Pi)$, $|\mu| < \rho(A)$.

Ainsi $\max_{\mu \in Sp(A-\rho(A)\Pi)} |\mu| < \rho(A)$. Donc $\underline{\underline{\rho(A - \rho(A)\Pi) < \rho(A)}}$.

Alors $\rho\left(\frac{1}{\rho(A)}(A - \rho(A)\Pi)\right) < 1$ non ?

Alors $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\rho(A)} A - \Pi\right)^n = 0$ (résultat admis à la fin de Q6).

Donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{1}{\rho(A)} A\right)^n - \Pi\right) = 0$ ; $\underline{\underline{\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{\rho(A)} A\right)^n = \Pi}}$.

## Partie V. Un algorithme de calcul de $\rho(A)$ et d'un vecteur propre associé.

Q18 a) $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base orthonormée et $v_0 = \sum_{k=1}^{p} s_k e_k$.

Alors $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $s_k = \langle v_0, e_k \rangle$.

$e_1$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre de plus grand module (... ou de plus grande valeur absolue ici).

Alors $|e_1| > 0$ et $\exists \theta \in [0, 2\pi[$, $e_1 = |e_1| e^{i\theta}$

Comme les composantes* de $e_1$ sont réelles et que $|e_1| > 0$, $e^{i\theta} = 1$ ou $-1$.

Alors $e_1 = |e_1|$ ou $e_1 = -|e_1|$.

Donc les composantes de $e_1$ sont ou strictement positives ou strictement négatives. Comme $v_0 > 0$ les composantes* de $v_0$ sont strictement positives.

Dans ces conditions $\langle v_0, e_1 \rangle > 0$ ou $\langle v_0, e_1 \rangle < 0$.

Donc $s_1 = \langle v_0, e_1 \rangle \neq 0$. $\underline{\underline{s_1 \neq 0.}}$

**Remarque** : * Il s'agit des composantes dans la base canonique.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = A v_n$. Une récurrence simple donne : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = A^n v_0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = A^n \left( \sum_{k=1}^{p} s_k e_k \right) = \sum_{k=1}^{p} s_k A^n e_k = \sum_{k=1}^{p} s_k \lambda_k^n e_k$ . $\underline{v_n = \sum_{k=1}^{p} s_k \lambda_k^n e_k}$.

$(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|v_n\|^2 = \sum_{k=1}^{p} (s_k \lambda_k^n)^2$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\|v_n\|^2}{\lambda_1^{2n}} = \sum_{k=1}^{p} s_k^2 \left( \dfrac{\lambda_k}{\lambda_1} \right)^{2n}$. $\lim_{n \to +\infty} \left( \dfrac{\lambda_k}{\lambda_1} \right)^{2n} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \neq 1 \end{cases}$ car

$\forall k \in [\![2, n]\!]$, $\left| \dfrac{\lambda_k}{\lambda_1} \right| < 1$. Ainsi $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{\|v_n\|^2}{\lambda_1^{2n}} = s_1^2$ et $s_1^2 \neq 0$.

Ainsi $\|V_n\|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha_1^2 \lambda_1^{2n}$.

Alors $\dfrac{\|V_{n+1}\|^2}{\|V_n\|^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha_1^2 \lambda_1^{2(n+1)}}{\alpha_1^2 \lambda_1^{2n}} = \lambda_1^2$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\|V_{n+1}\|^2}{\|V_n\|^2} = \lambda_1^2$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\|V_{n+1}\|}{\|V_n\|} = |\lambda_1|$.

Or $\lambda_1$ est la valeur propre de $A$ de plus grand module.

Ainsi $\lambda_1 = \rho(A)$ et $\rho(A) > 0$. Donc $|\lambda_1| = \lambda_1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\|V_{n+1}\|}{\|V_n\|} = \lambda_1$.

---

c) $\|V_n\|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha_1^2 \lambda_1^{2n}$. $\|V_n\| \sim |\alpha_1|\,|\lambda_1|^n = |\alpha_1|\,\lambda_1^n$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k \lambda_k^n e_k$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{\|V_n\|} V_n = \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{\alpha_k \lambda_k^n}{\|V_n\|} e_k$

$\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\dfrac{\alpha_k \lambda_k^n}{\|V_n\|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha_k \lambda_k^n}{|\alpha_1|\,|\lambda_1|^n}$ car $\|V_n\|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha_1^2 \lambda_1^{2n}$

$\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\dfrac{\alpha_k \lambda_k^n}{\|V_n\|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha_k}{|\alpha_1|} \left(\dfrac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^n$

Alors $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\alpha_k \lambda_k^n}{\|V_n\|}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 1 \\ \dfrac{\alpha_1}{|\alpha_1|} & \text{si } k = 1. \end{cases}$

Posons alors $\varepsilon = \dfrac{\alpha_1}{|\alpha_1|}$. $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$.

Ce qui précède suggère de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\|V_n\|} V_n\right) = \varepsilon e_1$.

ce que nous venons presque de faire ...

Montrons alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\| \frac{1}{\|V_n\|} V_n - \varepsilon e_1 \right\| = 0$ ou que

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| \frac{1}{\|V_n\|} V_n - \varepsilon e_1 \right\|^2 = 0 .$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad \frac{1}{\|V_n\|} V_n - \varepsilon e_1 = \left( \frac{\alpha_1 \lambda_1^n}{\|V_n\|} - \varepsilon \right) e_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{\alpha_k \lambda_k^n}{\|V_n\|} e_k .$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\| \frac{1}{\|V_n\|} V_n - \varepsilon e_1 \right\|^2 = \left( \frac{\alpha_1 \lambda_1^n}{\|V_n\|} - \varepsilon \right)^2 + \sum\limits_{k=2}^{n} \left( \frac{\alpha_k \lambda_k^n}{\|V_n\|} \right)^2 .$

On nous avons montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_1 \lambda_1^n}{\|V_n\|} = \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|} = \varepsilon$ et $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left( \frac{\alpha_k \lambda_k^n}{\|V_n\|} \right) = 0 .$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\| \frac{1}{\|V_n\|} V_n - \varepsilon e_1 \right\|^2 = 0$ ; $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} \left( \frac{1}{\|V_n\|} V_n \right) = \varepsilon e_1 \text{ avec } \varepsilon = \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}}} .$

Q19 **Remarques.** 1.. Le programme dit " toute rédaction de programmes relatifs à l'algèbre linéaire est exclue " !!

2°.. La procédure affecte est totalement inutile.

3°.. J'ai écrit la fonction et les deux procédures demandées.

4°.. Systématiquement je transmets aux fonctions et aux procédures la taille de la matrice.

5°.. Pour la dernière fonction je renvoie la valeur $\frac{\|V_{n+1}\|}{\|V_n\|}$.

- On calcule $V_n$ puis sa norme
- On en déduit $V_{n+1}$ (avec $V_{n+1} = AV_n$) et sa norme.

6°.. Il restait à écrire deux procédures : Entre Matrice et Entre vecteur ...

```
Program HEC_MI_2011;

Const DimMax=10;

Type vecteur=array[1..DimMax] of real;
     matrice=array[1..DimMax,1..Dimmax] of real;



function norme(p:integer;V:vecteur):real;

var k:integer;s:real;

begin

s:=0;
for k:=1 to p do s:=s+sqr(V[k]);
norme:=sqrt(s);

end;



Procedure prodmat(p:integer;A:matrice;V:vecteur;var W:vecteur);

var k,j:integer;s:real;

begin

for k:=1 to p do
        begin
        s:=0;
        for j:=1 to p do s:=s+A[k,j]*V[j];
        W[k]:=s;
        end;

end;


Procedure affecte(p:integer;V:vecteur;var W:vecteur);

var k:integer;

begin
for k:=1 to p do W[k]:=V[k];
end;

procedure puissance(p:integer;A:matrice;n:integer;VO:vecteur;var V:vecteur);

var k:integer;i:integer;

begin

V:=VO;
for k:=1 to n do prodmat(p,A,V,V);

end;
```

```
procedure vectpropre(p:integer;A:matrice;n:integer;VO:vecteur;var V:vecteur);
var k:integer;t:real;
begin
puissance(p,A,n,VO,V);
t:=norme(p,V);
for k:=1 to p do V[k]:=V[k]/t;
end;

function valpropre(p:integer;A:matrice;n:integer;VO:vecteur):real;

var V:vecteur;t:real;
begin
puissance(p,A,n,VO,V);
t:=norme(p,V);
prodmat(p,A,V,V);
valpropre:=norme(p,V)/t;

end;
```