

Les sujets suivants, posés aux candidats des options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L, constituent un échantillon des sujets proposés lors des épreuves orales du concours 2014.

## 1. SUJETS DE L'OPTION SCIENTIFIQUE

### Exercice principal S 49

Les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

1. Question de cours : Définition de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires.
2. Dans cette question, on note  $Z$  une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et  $\Phi$  la fonction de répartition de  $Z$ .  
Pour tout réel  $\theta$ , on note  $P_\theta$  la loi de la variable aléatoire  $Y_\theta = (Z + \theta)^2$ .
  - a) Exprimer la fonction de répartition de  $Y_\theta$  à l'aide de  $\Phi$ .
  - b) La variable aléatoire  $Y_\theta$  possède-t-elle une densité ?
  - c) Reconnaître la loi  $P_0$ .
  - d) Montrer que pour tout réel  $\theta \geq 0$ , les lois  $P_\theta$  et  $P_{-\theta}$  sont identiques.
- 3.a) Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles. Établir pour tout couple  $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ , l'inégalité :

$$P(|\sqrt{X} - a| \geq b) \leq P(|X - a^2| \geq ab)$$

- b) Soit  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite convergente d'estimateurs d'un paramètre positif inconnu  $\theta$ , ne prenant tous que des valeurs positives ou nulles.  
Déduire de la question précédente que  $(\sqrt{T_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite convergente d'estimateurs du paramètre  $\sqrt{\theta}$ .
4. Dans cette question,  $\theta$  désigne un paramètre positif inconnu et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune  $P_\theta$  définie dans la question 2.
  - a) Trouver une suite convergente d'estimateurs sans biais  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (\varphi_n(X_1, \dots, X_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  du paramètre  $\theta^2$ .
  - b) En déduire une suite convergente d'estimateurs du paramètre  $\theta$ . Sont-ils sans biais ?

### Exercice sans préparation S 49

1. Montrer que la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  est diagonalisable si et seulement si la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est diagonalisable.
2. Soit  $f$  un endomorphisme diagonalisable d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension 3 et soit  $D$  une droite vectorielle de  $E$  stable par  $f$ .
  - a) Montrer que  $D$  admet un supplémentaire stable par  $f$ .
  - b) Montrer que si  $P$  est un supplémentaire de  $D$  stable par  $f$ , la restriction de  $f$  à  $P$  définit un endomorphisme diagonalisable de  $P$ .

### Exercice principal S 50

1. Question de cours : Formule du binôme négatif.

2. Soit  $p \in ]0, 1[$ . Pour tout couple  $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ , on note  $p_{n,k}$  la probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  soit égale à  $k$ .

Calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} p_{n,0}$  et montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $\sum_{n=1}^{+\infty} p_{n,k} = \frac{1}{p}$ .

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$  définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , mutuellement indépendantes et de même loi.

On pose :  $S_0 = 0$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Pour tout  $(a, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}$ , on pose :  $F_n(a) = P[S_n \leq a]$ .

3. Soit  $a > 0$ . On note  $N(a) = \text{Card}\{n \in \mathbb{N} ; S_n \leq a\}$  (pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $N_a(\omega)$  est le nombre, éventuellement égal à  $+\infty$ , des entiers  $n$  pour lesquels  $S_n(\omega) \leq a$ ).

a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $[N(a) = n] \in \mathcal{A}$  et que  $P[N(a) = n] = F_{n-1}(a) - F_n(a)$ .

b) Exprimer l'événement  $[N(a) < \infty]$  en fonction des événements  $([N(a) = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ , et en déduire que  $[N(a) < \infty] \in \mathcal{A}$ .

c) Montrer que la suite  $(F_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite finie et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(a) = 0$  si et seulement si  $P[N(a) < \infty] = 1$ .

d) On suppose dans cette question que la série de terme général  $F_n(a)$  est convergente.

Montrer que la variable aléatoire  $N(a)$  admet une espérance et que  $E(N(a)) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(a)$ .

4. Soit  $p$  et  $q$  deux réels vérifiant  $0 < q < p < 1$ . Dans cette question, on suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $P(X_n = 0) = 1 - p$  et  $P(X_n = 1) = q$ .

En utilisant les questions précédentes et en considérant les variables aléatoires  $Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } X_n = 0 \\ 1 & \text{si } X_n \geq 1 \end{cases}$ , montrer

que pour tout  $a > 0$ , on a :  $E(N(a)) \leq \frac{\lfloor a \rfloor + 1}{p}$ .

### Exercice sans préparation S 50

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 2$  ; on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire et  $\| \cdot \|$  la norme associée.

1. Soit  $x \in E$ . Montrer que  $\|x\| = \sqrt{n}$  si et seulement si il existe une base orthonormale  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n) \in E$  vérifiant  $x = \sum_{k=1}^n e_k$ .

2. Soit  $x$  et  $y$  deux vecteurs de  $E$ . Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une base orthonormale  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n) \in E$  vérifiant  $x = \sum_{k=1}^n e_k$  et  $y = \sum_{k=1}^n k e_k$ .

### Exercice principal S 56

Dans tout l'exercice,  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Question de cours : Soit  $h$  une fonction numérique de classe  $C^1$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ .

a) Qu'appelle-t-on point critique de  $h$  ?

b) Qu'appelle-t-on point critique pour l'optimisation de  $h$  sous contraintes d'égalités linéaires

$$\mathcal{C} \begin{cases} g_1(X) = b_1 \\ \dots \\ g_p(X) = b_p \end{cases}$$

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^n$  par :  $f(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n u_i^2$ .

2. Soit  $x_1, \dots, x_n$  des réels donnés non tous égaux, de moyenne  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ .

On pose :  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2$ , et pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :  $\alpha_i = \frac{x_i - \bar{x}}{ns^2}$ .

a) Montrer que  $s^2$  est strictement positif.

b) Exprimer en fonction de  $s^2$ , le minimum global de la fonction  $\phi : t \mapsto f(x_1 - t, \dots, x_n - t)$ .

c) Soit  $\rho$  et  $\theta$  deux réels donnés.

Montrer qu'il n'existe qu'un seul point critique  $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$  pour l'optimisation de  $f$  sous les contraintes

$$\sum_{i=1}^n u_i = \rho \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i u_i = \theta, \text{ donné par : } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_i^* = \frac{\rho}{n} + (\theta - \rho \bar{x}) \alpha_i.$$

3. Soit  $n$  variables aléatoires  $Y_1, \dots, Y_n$  discrètes, mutuellement indépendantes, admettant des moments d'ordre 1 et 2 telles que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $E(Y_i) = ax_i + b$  et  $V(Y_i) = 1$ , où  $a$  et  $b$  sont des paramètres réels.

On considère les variables aléatoires de la forme  $A_n^{(r)} = \sum_{i=1}^n r_i Y_i$ , où  $(r_i)_{1 \leq i \leq n}$  est un élément de  $\mathbb{R}^n$  indépendant de  $a$  et de  $b$  (mais qui peut dépendre de  $x_1, \dots, x_n$ ).

a) Trouver, parmi les variables aléatoires  $A_n^{(r)}$  qui vérifient pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $E(A_n^{(r)}) = a$ , celles qui ont la plus petite variance.

Proposer une interprétation de ce résultat en terme d'estimation du paramètre  $a$ .

b) Énoncer et démontrer un résultat similaire pour le paramètre  $b$ .

### Exercice sans préparation S 56

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est  $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $f - \text{id}_{\mathbb{R}^3}$  est un projecteur.

2. Quelles sont les valeurs propres de  $f$  ?

3. Combien existe-t-il de droites vectorielles de  $\mathbb{R}^3$  stables par  $f$  ?

4. Combien existe-t-il de plans vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  stables par  $f$  ?

### Exercice principal S 61

1. Question de cours : Densité de la somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes.
2. Soit  $U$  et  $V$  deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendantes et suivant la loi uniforme sur le segment  $[0, 1]$ .  
Déterminer une densité  $g$  de  $U + V$ . Donner l'allure du graphe de  $g$ .

On note  $\mathcal{E}$  l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout élément  $f \in \mathcal{E}$ , on note  $T(f)$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(t) dt.$$

3. Montrer que l'application  $T$  qui, à tout  $f \in \mathcal{E}$  associe  $T(f)$ , est un endomorphisme de  $\mathcal{E}$ .
4. Montrer que si un élément  $f \in \mathcal{E}$  est une densité de probabilité, alors  $T(f)$  est également une densité de probabilité.
5. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ , identifiés à des fonctions polynômes.
  - a) Montrer que la restriction de  $T$  à  $\mathbb{R}_n[X]$  définit un endomorphisme  $T_n$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
  - b) L'endomorphisme  $T_n$  est-il bijectif ? Est-il diagonalisable ?
6. L'endomorphisme  $T$  est-il injectif ? Est-il surjectif ?

### Exercice sans préparation S 61

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose :  $u_n = \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$ .

1. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que la série de terme général  $u_n$  soit convergente.
2. Calculer alors la somme de cette série.

### Exercice principal S 75

1. Question de cours : Théorème de d'Alembert-Gauss. Application à la factorisation de polynômes dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$ .
2. Soit  $a, b$  et  $c$  des réels et  $T$  le trinôme  $T(X) = aX^2 + bX + c$ . On note  $T'$  et  $T''$  respectivement, les dérivées première et seconde de la fonction  $T$ .
  - a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels  $a, b$  et  $c$  pour que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on ait :  $T(x) \geq 0$ .
  - b) On suppose que  $T$  possède deux racines réelles distinctes. Dédurre de la question précédente que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(x)T''(x) \leq (T'(x))^2.$$

Dans la suite de l'exercice, on note  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  de degré  $n$  ayant  $n$  racines réelles distinctes.

On pose :  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ . On note  $P'$  et  $P''$  respectivement, les dérivées première et seconde de  $P$ .

3. Montrer que  $P'$  possède  $(n - 1)$  racines réelles distinctes.
- 4.a) Montrer que la fonction  $x \mapsto \frac{P'(x)}{P(x)}$  est décroissante sur chaque intervalle de son ensemble de définition.
- b) En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $P(x)P''(x) \leq (P'(x))^2$ .
5. À l'aide des questions précédentes, établir pour tout  $k \in \llbracket 0, n - 2 \rrbracket$ , l'inégalité :  $a_k a_{k+2} \leq a_{k+1}^2$ .

### Exercice sans préparation S 75

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telles que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{(i + j + 1)!}.$$

Déterminer le réel  $a$ . Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

### Exercice principal S 91

1. Question de cours : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On rappelle que  $\mathbb{R}_n[T]$  est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ . Que peut-on dire d'un polynôme de  $\mathbb{R}_n[T]$  qui admet plus de  $n$  racines ?

2. On confond vecteur de  $\mathbb{R}^n$  et matrice-colonne de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Soit  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $n$  réels tous distincts.

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ . Soit  $U = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $AU = 0$ .

a) Montrer que le polynôme  $Q(T) = \sum_{j=1}^n \alpha_j T^{j-1}$  est nul.

b) En déduire que la matrice  $A$  est inversible.

3. Dans cette question,  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs  $p$  et  $p'$  ( $0 < p < 1$  et  $0 < p' < 1$ ) et telles que la covariance de  $X$  et  $Y$  est nulle.

Montrer que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

4. Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires réelles discrètes finies définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , et soit  $n$  et  $m$  deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

On suppose que  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  et  $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ .

On pose pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et tout  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$  :

$$p_i = P(X = x_i), \quad q_j = P(Y = y_j), \quad \pi_{i,j} = P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \quad \text{et} \quad \delta_{i,j} = \pi_{i,j} - p_i q_j$$

On suppose que pour tout  $h \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et tout  $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ , la covariance de  $X^h$  et  $Y^k$  est nulle.

a) Soit  $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ . Montrer que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :  $\sum_{j=1}^m \delta_{i,j} y_j^k = 0$ .

b) En déduire que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

### Exercice sans préparation S 91

Soit  $\alpha$  un réel donné. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^\alpha}$ .

1. Étudier suivant les valeurs de  $\alpha$ , la convergence de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ . En cas de convergence, on précisera la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ .

2. Étudier la nature de la série de terme général  $u_n$ .

3. Soit  $x$  un réel vérifiant  $|x| < 1$ . Étudier suivant les valeurs du réel  $\alpha$ , la convergence de la série de terme général  $u_n x^n$ .

e

### Exercice principal S 93

1. Question de cours : Formule de l'espérance totale pour une variable aléatoire discrète  $X$  et un système complet d'événements  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . On note  $E(X/A_n)$  l'espérance de  $X$  pour la probabilité conditionnelle  $P_{A_n}$ .

On lance indéfiniment un dé équilibré et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $X_n$  le numéro sorti au  $n$ -ième tirage. Les variables aléatoires  $X_n$ , définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , sont donc supposées indépendantes et de même loi uniforme sur  $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ , on note  $T_i$  le temps d'attente de la sortie du numéro  $i$ .

- 2.a) Donner la loi de  $T_1$  ainsi que son espérance et sa variance.
- b) Trouver l'espérance des variables aléatoires  $\text{Inf}(T_1, T_2)$  et  $\text{Sup}(T_1, T_2)$ .
3. Justifier l'existence de la covariance de  $T_1$  et de  $T_2$ , que l'on notera  $\text{Cov}(T_1, T_2)$ .
- 4.a) Établir, pour tout  $i \in \llbracket 2, 6 \rrbracket$ , la relation :  $E(T_1/[X_1 = i]) = 7$ .
- b) Montrer que pour tout  $i \in \llbracket 3, 6 \rrbracket$ , on a :  $E(T_1 T_2/[X_1 = i]) = E((1 + T_1)(1 + T_2))$ .
- c) Calculer  $E(T_1 T_2)$ .
- d) En déduire  $\text{Cov}(T_1, T_2)$  ainsi que le coefficient de corrélation linéaire de  $T_1$  et  $T_2$ .
- 5.a) Trouver un réel  $\alpha$  tel que les variables aléatoires  $T_1$  et  $T_2 + \alpha T_1$  soient non corrélées.
- b) Calculer l'espérance conditionnelle  $E(T_2 + \alpha T_1/[T_1 = 1])$ .
- c) Les variables aléatoires  $T_1$  et  $T_2 + \alpha T_1$  sont-elles indépendantes ?

### Exercice sans préparation S 93

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{n+2} dx$ .

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.
- 2.a) Calculer  $u_{n+2} + u_n$ .
- b) En déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et un équivalent de  $u_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice principal S 94

1. Question de cours : a) Convergence des séries de Riemann.

b) Établir l'encadrement strict suivant :  $1 < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < 2$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $i$  le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\pi/2$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose :  $x_k = \frac{k\pi}{2n+1}$ . On rappelle que pour tout  $x \in ]0, \pi/2[$ ,  $\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}$ .

2.a) Montrer que pour tout  $x \in ]0, \pi/2[$ , on a :  $e^{2ix} = \frac{\cotan x + i}{\cotan x - i}$ .

b) En déduire que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(\cotan x_k + i)^{2n+1}$  est un nombre réel.

3. Soit  $P_n$  le polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  défini par :  $P_n(X) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} X^{n-p}$ .

a) Préciser le degré de  $P_n$  ainsi que son terme de plus haut degré.

b) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , déterminer (sous forme de somme) la partie imaginaire de  $(t+i)^{2n+1}$ . En déduire que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\cotan^2 x_k$  est une racine de  $P_n$  et donner une factorisation de  $P_n(X)$  sous la forme d'un produit de monômes.

c) Établir la formule :  $\sum_{k=1}^n \cotan^2 x_k = \frac{n(2n-1)}{3}$ .

4.a) Montrer que pour tout  $u \in ]0, \pi/2[$ , on a :  $\cotan^2 u < \frac{1}{u^2} < 1 + \cotan^2 u$ .

b) Déduire des résultats précédents que :  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

### Exercice sans préparation S 94

Soit  $(U_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  et de même loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

Soit  $N$  une variable aléatoire définie sur  $\Omega$ , indépendante de la suite  $(U_n)_{n \geq 1}$ , suivant une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  ( $n \geq 1$  et  $0 < p < 1$ ).

On pose :  $M_n = \max(U_1, U_2, \dots, U_n)$  et  $T_n = \begin{cases} U_1 & \text{si } [N = 0] \text{ est réalisé} \\ M_k & \text{si } [N = k] \text{ est réalisé} \end{cases}$ .

Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires  $(T_n)_{n \geq 1}$ .



### Exercice principal S 101

Dans tout l'exercice,  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on munit l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  du produit scalaire usuel défini par  $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$ .

On note :

- $U$  la matrice-colonne de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1 ;
- $\mathcal{V}_n$  l'ensemble des matrices  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $U$  soit un vecteur propre de  $A$  et de  ${}^tA$  ;
- $\mathcal{W}_n$  l'ensemble des matrices  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $\forall i \geq 2, a_{1,i} = a_{i,1} = 0$ .

On admet sans démonstration que  $\mathcal{V}_n$  et  $\mathcal{W}_n$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Question de cours : Définition et propriétés de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien.

2. Déterminer la dimension de  $\mathcal{W}_n$ .

3. Soit  $A \in \mathcal{V}_n$ . On note  $\lambda$  (respectivement  $\mu$ ) la valeur propre de  $A$  (resp. de  ${}^tA$ ) associée au vecteur propre  $U$ . Exprimer la somme de tous les coefficients de  $A$  en fonction de  $\lambda$ . Comparer  $\lambda$  et  $\mu$ .

4.a) Déterminer  $\mathcal{V}_2$  ainsi que sa dimension.

b) Montrer que pour tout  $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ , il existe une unique matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$  de  $\mathcal{V}_3$  telle que  $a_{1,1} = a, a_{1,2} = b, a_{1,3} = c, a_{2,1} = d$  et  $a_{2,2} = e$ . En déduire la dimension de  $\mathcal{V}_3$ .

5. Soit  $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  une matrice orthogonale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont la première colonne est égale à  $\frac{1}{\sqrt{n}}U$ .

Pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $C_j$  la  $j$ -ième colonne de  $P$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- Justifier l'existence d'une telle matrice  $P$ .
- Montrer que la matrice  $B = {}^tPAP$  a pour terme général  $b_{i,j} = \langle C_i, AC_j \rangle$ .
- En déduire que  $A \in \mathcal{V}_n$  si et seulement si  ${}^tPAP \in \mathcal{W}_n$ .
- En déduire la dimension de  $\mathcal{V}_n$ .

### Exercice sans préparation S 101

Soit  $n_1 \in \mathbb{N}^*, n_2 \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0, 1[$ . On considère deux variables aléatoires indépendantes  $X_1$  et  $X_2$  définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  :  $X_1$  suit la loi binomiale de paramètres  $(n_1, p)$  et  $X_2$  suit la loi binomiale de paramètres  $(n_2, p)$ .

- Soit  $n \in (X_1 + X_2)(\Omega)$ . Déterminer la loi conditionnelle de  $X_1$  sachant l'événement  $[X_1 + X_2 = n]$ .
- Calculer l'espérance conditionnelle  $E(X_1/X_1 + X_2 = n)$ .

### Exercice principal S 104

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont à densité et définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Sous réserve d'existence, on note  $E(X)$  l'espérance d'une variable aléatoire  $X$ .

1. Question de cours : Rappeler la définition du rang d'une matrice. Quelle est, selon les valeurs des réels  $a, b, c$  et  $d$  le rang de la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ?

Dans tout l'exercice,  $X, Y$  et  $Z$  sont trois variables aléatoires ayant des moments d'ordre 2.

On admet que chacune des variables aléatoires  $XY, XZ$  et  $YZ$  admet une espérance et on suppose que la condition suivante est vérifiée :  $E(X^2)E(Y^2) - (E(XY))^2 \neq 0$ .

Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose :  $f(x, y) = E((Z - xX - yY)^2)$ .

2.a) Établir les inégalités strictes :  $E(X^2) > 0$  et  $E(Y^2) > 0$ .

b) Montrer que pour tout couple  $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ , on a :  $E((xX + yY)^2) > 0$ .

3.a) Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et qu'elle admet un unique point critique  $(x_0, y_0)$ .

b) Montrer que pour tout couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a :  $E((Z - x_0X - y_0Y)(xX + yY)) = 0$ .

c) En déduire l'égalité :  $E((Z - xX - yY)^2) = E((Z - x_0X - y_0Y)^2) + E([(x - x_0)X - (y_0 - y)Y]^2)$ .

d) Étudier les extremums de  $f$ .

4. Dans cette question, on suppose que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et suivent toutes les deux la loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$  et on pose  $Z = X^2$ .

Déterminer l'ensemble des couples  $(x_0, y_0)$  pour lesquels  $E((Z - xX - yY)^2)$  est minimale.

(on admet que le résultat relatif à l'espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes s'applique au cas où les deux variables aléatoires sont à densité)

### Exercice sans préparation S 104

Soit  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  non nulle telle que  $M^2 = 0$ .

Montrer que  $M$  est semblable à la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

### Exercice principal S 110

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 2$  sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  pour lequel il existe un entier  $m \geq 2$ , des endomorphismes  $p_1, p_2, \dots, p_m$  non nuls de  $E$  et  $m$  réels distincts  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , tels que pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ , on a :  $f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i$ , où  $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$ . On note  $\text{id}$  l'endomorphisme identité de  $E$ .

1. Question de cours : Énoncer une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'une matrice.

2. Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ . Exprimer  $P(f)$  en fonction des  $P(\lambda_i)$  et des  $p_i$  pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ .

3. Soit  $Q$  le polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  défini par  $Q(X) = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$ . Calculer  $Q(f)$ .

Qu'en déduit-on quant aux valeurs propres de  $f$  ?

4. Pour tout  $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , on pose :  $L_k(X) = \prod_{\substack{i \in \llbracket 1, m \rrbracket \\ i \neq k}} \frac{(X - \lambda_i)}{(\lambda_k - \lambda_i)}$ .

Calculer  $L_k(f)$ . En déduire que  $\text{Im}(p_k) \subset \text{Ker}(f - \lambda_k \text{id})$  ainsi que l'ensemble des valeurs propres de  $f$ .

5. Montrer que  $f$  est diagonalisable.

6. Vérifier que pour tout couple  $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2$ , on a :  $p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j \end{cases}$ .

7. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$  (ensemble des endomorphismes de  $E$ ) engendré par  $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ . Déterminer la dimension de  $F$ .

### Exercice sans préparation S 110

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite, et soit un nombre réel  $\theta \neq 0$ . On pose :  $Y_0 = X_0$  et  $\forall n \geq 1, Y_n = \theta Y_{n-1} + X_n$ .

1. Déterminer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la loi de  $Y_n$ .

2. Calculer pour tout  $h \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{Cov}(Y_n, Y_{n+h})$ .

### Exercice principal S 112

1. Question de cours : Énoncer le théorème du prolongement de la dérivée.

On cherche les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f'(x))^2 - 2f(x)f''(x) = 0 \quad (E)$$

2. Soit  $(a, b)$  un couple de réels et  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \geq 0 \\ bx^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Quelle condition doivent satisfaire  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $f$  vérifie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  la relation  $(E)$  ?

3.a) Montrer que si une fonction polynomiale non nulle  $f$  vérifie  $(E)$ , son degré est nécessairement égal à 0 ou 2.

b) Déterminer sous forme factorisée, les fonctions polynomiales qui vérifient pour tout  $x \in \mathbb{R}$  la relation  $(E)$ .

4. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$  à valeurs réelles.

On suppose que  $f$  vérifie les conditions  $(C)$  suivantes :

- la dérivée  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$  ;
- la relation  $(E)$  est vérifiée pour tout  $x \in I$ .

a) On pose pour tout  $x \in I$  :  $g(x) = \frac{f(x)}{(f'(x))^2}$ . Calculer pour tout  $x \in I$ , la dérivée  $g'(x)$  au point  $x$ .

b) Établir l'existence d'une constante réelle  $k$  strictement positive telle que pour tout  $x \in I$ , la dérivée de  $\sqrt{f(x)}$  soit égale à  $\frac{1}{2\sqrt{k}}$ .

c) En déduire que toutes les fonctions  $f$  qui vérifient les conditions  $(C)$  sont de la forme :  $f(x) = \alpha(x - r)^2$ , avec  $\alpha \neq 0$  et  $r \notin I$ .

### Exercice sans préparation S 112

On tire avec remise une boule d'une urne contenant  $n$  boules numérotées. On note  $X$  la variable aléatoire égale au numéro du tirage où pour la première fois, chaque boule a été tirée au moins une fois.

Calculer l'espérance de  $X$  et en trouver un équivalent quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice principal S 113

Soit  $E$  un espace euclidien muni du produit scalaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme associée  $\| \cdot \|$ .  
Soit  $p$  et  $r$  deux projecteurs orthogonaux distincts de  $E$ . On note  $\text{id}$  l'endomorphisme identité de  $E$ .

1. Question de cours : Définition et propriétés d'un projecteur orthogonal.
2. Dans cette question uniquement, on suppose que  $p$  et  $r$  commutent.
  - a) Montrer que  $p \circ r$  est un projecteur orthogonal.
  - b) Dans le cas où  $p \circ r$  est non nul, déterminer ses valeurs propres.
  - c) Montrer que  $\text{Ker}(p \circ r) = \text{Ker}(p) + \text{Ker}(r)$  et  $\text{Im}(p \circ r) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(r)$ .
3. Soit  $x$  un vecteur propre de  $p \circ r$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .
  - a) Dans le cas où  $\lambda \neq 0$ , montrer que  $x \in \text{Ker}(p - \text{id})$  et  $(r(x) - \lambda x) \in \text{Ker}(p)$ .
  - b) Calculer  $\langle x, r(x) - \lambda x \rangle$ . En déduire l'encadrement :  $0 \leq \lambda \leq 1$ .
4. On suppose que l'ensemble des valeurs propres de  $p \circ r$  est inclus dans  $\{0, 1\}$ .  
On pose  $p_1 = p$ ,  $p_2 = \text{id} - p$  et pour tout  $(i, j) \in \{1, 2\}$ , on pose  $a_{i,j} = p_i \circ r \circ p_j$ .
  - a) Calculer  $a_{1,1} + a_{1,2}$ ,  $a_{1,1} + a_{2,1}$  et  $a_{1,2} \circ a_{2,1} - (\text{id} - p \circ r) \circ a_{1,1}$ .
  - b) Montrer que  $a_{1,1}$  est diagonalisable.
  - c) Montrer que  $p$  et  $r$  commutent.

### Exercice sans préparation S 113

Soit  $\mathcal{E}$  un ensemble de variables aléatoires discrètes centrées définies sur un même espace probabilisé et admettant une variance.

1. Justifier l'existence de  $V_0 = \inf\{V(X) ; X \in \mathcal{E}\}$ .
2. On suppose que pour tout  $(X_1, X_2) \in \mathcal{E}^2$ , on a  $\frac{1}{2}(X_1 + X_2) \in \mathcal{E}$ .  
Soit  $(X_1, X_2) \in \mathcal{E}^2$  avec  $V(X_1) = V(X_2) = V_0$ . Montrer que  $X_1 = X_2$  presque sûrement.

### Exercice principal S 116

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et de même loi uniforme sur l'intervalle  $]0, 1]$ . On note  $F$  la fonction de répartition de  $X_1$ .

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $Z_n = \prod_{k=1}^n X_k$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $Y_k = -\ln X_k$ .

2.a) Calculer pour tout  $s \in \mathbb{N}$ ,  $E(Z_n^s)$ .

b) Quelle est la loi de  $Y_1$  ?

c) En déduire la loi de  $T_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ .

d) Déterminer une densité  $f_{Z_n}$  de la variable aléatoire  $Z_n$ .

3. Soit  $r$  un entier naturel et  $z \in ]0, 1]$ .

a) Établir la convergence de l'intégrale  $\int_0^z (-\ln t)^r dt$ .

b) À l'aide du changement de variable  $y = -\ln t$  dont on justifiera la validité, montrer que l'on a :

$$\frac{1}{r!} \int_{-\ln z}^{+\infty} y^r e^{-y} dy = z \times \sum_{k=0}^r \frac{(-\ln z)^k}{k!}.$$

c) En déduire la fonction de répartition  $F_{Z_n}$  de  $Z_n$ .

4. Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

### Exercice sans préparation S 116

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par :  $a_{i,j} = 1$  si  $i \neq j$  et  $a_{i,i} > 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

1. Montrer que pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$  non nul, on a :  ${}^t X A X > 0$ .

2. Justifier que  $A$  est diagonalisable et inversible.