HEC 2011 S 1163

Sujet S 1163 - Exercice

1) Question de cours : Rappeler la définition de la continuité en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ ($n \geqslant 2$). Donner un exemple d'une fonction non continue sur $\mathbb{R}^2$.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. On définit la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y-x}\displaystyle\int_x^y f(t)\,dt & \text{si} \quad x \neq y \\ f(x) & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

2) Exemple.
Dans cette question seulement, on suppose que f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.
Déterminer la fonction g correspondante et montrer que g admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

3) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \neq y\}$. Montrer que g est de classe C^1 sur D et calculer ses dérivées partielles du premier ordre sur D.

4) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que g admet des dérivées partielles du premier ordre en (a, a) et les exprimer en fonction de $f'(a)$, où f' désigne la dérivée de f.

5) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(x,y) \in D$.
   a) Montrer que :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a,a) = \frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y (y-t)\left(f'(t) - f'(a)\right)dt.$$

   b) En déduire que : $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\sup\left\{\left|f'(t) - f'(a)\right|,\ t \in S\right\}$ où S désigne le segment d'extrémités x et y.

6) Déduire des questions précédentes que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Sujet S 1163 - Exercice sans préparation

Un joueur effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce qui donne Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité $q = 1 - p$, $p \in]0,1[$.
On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On définit la variable aléatoire N égale au rang d'apparition du premier Pile s'il existe et égale à 0 si Pile n'apparait jamais.
On définit une variable aléatoire X de la façon suivante :
Si $N = n > 0$, le joueur dispose dans une urne n boules numérotées de 1 à n ; Il tire une boule de cette urne et X prend comme valeur le numéro de la boule tirée ;
Si $N = 0$, on pose $X = 0$.

1) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer $\mathbb{P}(X = k)$ sous forme de somme.

2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{p}{q} \lim\limits_{M \to +\infty} \displaystyle\int_0^q \Big(\sum_{n=k}^{M} t^{n-1}\Big) dt$.

3) Etudier la limite de $\displaystyle\int_0^q \frac{t^M}{1-t}\,dt$ lorsque M tend vers $+\infty$. Déterminer $\mathbb{P}(X = 1)$.

Q1 • f est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. $A \in D_f$.

f est continue en A si $\lim_{X \mapsto A} f(X) = f(A)$.

f est continue en A si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall X \in D_f, \|X-A\| < \eta \Rightarrow |f(X) - f(A)| < \varepsilon$.

• Posons $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Supposons que f est continue en $A=(0,0)$. Alors $\lim_{(x,y)\to A} f(x,y) = f(A) = 0$

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t$ et $v(t) = t$.

$\lim_{t\mapsto 0} u(t) = \lim_{t \mapsto 0} v(t) = 0$. Alors par composition $\lim_{t\mapsto 0} f(u(t), v(t)) = 0$.

Or $\lim_{t\mapsto 0} f(u(t),v(t)) = \lim_{t\mapsto 0} f(t,t) = \lim_{t\mapsto 0} \dfrac{t^2}{t^2+t^2} = \dfrac{1}{2}$!

<u>Remarque</u>.. $(x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ n'a pas de limite en $A=(0,0)$ donc n'est pas prolongeable par continuité en A.

Q2 Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Supposons $x \neq y$. $g(x,y) = \dfrac{1}{y-x}\displaystyle\int_x^y f(t)\,dt = \dfrac{1}{y-x}\int_x^y t^2\,dt = \dfrac{1}{y-x}\left[\dfrac{t^3}{3}\right] = \dfrac{y^3-x^3}{3(y-x)} = \dfrac{1}{3}(x^2+xy+y^2)$.

Si $x=y$: $g(x,y) = f(x) = x^2 = \dfrac{1}{3}(x^2+xy+x^2) = \dfrac{1}{3}(x^2+xy+y^2)$.

<u>$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = \dfrac{1}{3}(x^2+xy+y^2)$.</u>

g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Si g admet un extremum local en un point A de $\mathbb{R}^3$, $\nabla f(A) = 0_{\mathbb{R}^2}$

Cherchons les points critiques de g.

Soit $X=(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $\nabla g(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \dfrac{\partial g}{\partial x}(X) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}(2x+y) = 0 \\ \frac{1}{3}(x+2y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 0 = x - 4x = -3x \end{cases}$

$\nabla g(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow x = y = 0$. $O=(0,0)$ est le seul point critique de g.

$\forall X=(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(X) - g(O) = \dfrac{1}{3}(x^2+xy+y^2) = \dfrac{1}{3}\left(\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2 - \dfrac{y^2}{4} + y^2\right) = \dfrac{1}{3}\left(\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2\right) \geqslant 0$.

$\forall X \in \mathbb{R}^2$, $g(X) \geqslant g(O)$. <u>g admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ qui vaut 0 et atteint en le seul point $O=(0,0)$.</u>

Q3) Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. $\forall (x,y)\in D$, $g(x,y)=\dfrac{F(y)-F(x)}{y-x}$

$(x,y)\mapsto x$ et $(x,y)\mapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Par composition $(x,y)\mapsto F(x)$ et $(x,y)\mapsto F(y)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

Par différence $(x,y)\mapsto F(y)-F(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc sur D.

$(x,y)\mapsto \dfrac{1}{y-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D comme fraction rationnelle.

Par produit $(x,y)\mapsto \dfrac{F(y)-F(x)}{y-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

Or $\forall (x,y)\in D$, $g(x,y)=\dfrac{1}{y-x}\displaystyle\int_x^y f(t)\,dt=\dfrac{F(y)-F(x)}{y-x}$. g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

Soit $(x,y)\in D$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=-\dfrac{-1}{(y-x)^2}(F(y)-F(x))+\dfrac{1}{y-x}(-f(x))$.

$\forall (x,y)\in D$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\dfrac{1}{(y-x)^2}\displaystyle\int_x^y f(t)\,dt-\dfrac{f(x)}{y-x}$.

$\forall (x,y)\in D$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{1}{(y-x)^2}(F(y)-F(x))+\dfrac{1}{y-x}f(y)=-\dfrac{1}{(y-x)^2}\displaystyle\int_x^y f(t)\,dt+\dfrac{f(y)}{y-x}$.

Q4) a) Soit $a\in\mathbb{R}$. Posons $A=(a,a)$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $g_{A,1}(x)=g(x,a)=\begin{cases}\dfrac{1}{a-x}\displaystyle\int_x^a f(t)\,dt & \text{si } x\neq a\\ f(a) & \text{si } x=a\end{cases}$

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{a\}$, $\dfrac{g_{A,1}(x)-g_{A,1}(a)}{x-a}=\dfrac{\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt-f(a)}{x-a}=\dfrac{1}{(x-a)^2}\left[F(x)-F(a)-(x-a)f(a)\right]$

F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc

$$F(x)\underset{x\to a}{=}F(a)+(x-a)F'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}F''(a)+o((x-a)^2)$$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to a}\dfrac{F(x)-F(a)-(x-a)F'(a)-\frac{(x-a)^2}{2}F''(a)}{(x-a)^2}=0$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(\dfrac{1}{(x-a)^2}\left[F(x)-F(a)-(x-a)F'(a)\right]-\dfrac{1}{2}F''(a)\right)=0$.

Donc $\lim_{x\to a} \frac{g_{A,1}(x)-g_{A,1}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^2}\left[F(x)-F(a)-(x-a)F'(a)\right] = \frac{1}{2}F''(a) = \frac{1}{2}f'(a)$.

Alors $\frac{\partial g}{\partial x}(A)$ existe et vaut $\frac{1}{2}f'(a)$.

$\forall a\in\mathbb{R}$, $\frac{\partial g}{\partial x}(a,a)$ existe et vaut $\frac{1}{2}f'(a)$.

De même $\forall a\in\mathbb{R}$, $\frac{\partial g}{\partial y}(a,a)$ existe et vaut $\frac{1}{2}f'(a)$.

Q5 a) Soit $a\in\mathbb{R}$ et $(x,y)\in D$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial g}{\partial x}(a,a) = \frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y f(t)dt - \frac{f(x)}{y-x} - \frac{1}{2}f'(a) = \frac{1}{(y-x)^2}\left[\int_x^y f(t)dt - (y-x)f(x) - \frac{1}{2}f'(a)(y-x)^2\right]$$

En intégrant par parties à droite :

$$\int_x^y (y-t)(f'(t)-f'(a))dt = \int_x^y (y-t)f'(t)dt - f'(a)\int_x^y (y-t)dt = \left[(y-t)f(t)\right]_x^y - \int_x^y (-f(t))dt - f'(a)\left[-\frac{(y-t)^2}{2}\right]_x^y$$

$$\int_x^y (y-t)(f'(t)-f'(a))dt = -(y-x)f(x) + \int_x^y f(t)dt - \frac{(y-x)^2}{2}f'(a)$$

$$\int_x^y (y-t)(f'(t)-f'(a))dt = \int_x^y f(t)dt - (y-x)f(x) - \frac{(y-x)^2}{2}f'(a).$$

Ainsi $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial g}{\partial x}(a,a) = \frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y (y-t)(f'(t)-f'(a))dt$.

b) Soit $a\in\mathbb{R}$ et $(x,y)\in D$.

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| = \frac{1}{(y-x)^2}\left|\int_x^y (y-t)(f'(t)-f'(a))dt\right|.$$

1er cas $x<y$. $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| \leq \frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y (y-t)\,|f'(t)-f'(a)|dt$

$\downarrow$ $y-t\geq 0$ si $t\in[x,y]$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| \leq \frac{1}{(y-x)^2}\max_{t\in[x,y]}|f'(t)-f'(a)|\int_x^y (y-t)dt \quad \text{car } x\leq y.$$

Or $\int_x^y (y-t)dt = \left[-\frac{(y-t)^2}{2}\right]_x^y = \frac{(y-x)^2}{2}$.

Alors $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| \leq \frac{1}{(y-x)^2} \max_{t\in[x,y]} |f'(t)-f'(a)| \frac{(y-x)^2}{2} = \frac{1}{2} \max_{t\in[x,y]} |f'(t)-f'(a)|$

2ème Cas.. $x>y$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| = \frac{1}{(y-x)^2}\left|\int_x^y (y-t)(f'(t)-f'(a))\,dt\right| = \frac{1}{(y-x)^2}\left|\int_y^x (y-t)(f'(t)-f'(a))\,dt\right|$$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| \leq \frac{1}{(y-x)^2}\int_y^x |y-t||f'(t)-f'(a)|\,dt \leq \frac{1}{(y-x)^2}\max_{t\in[y,x]}|f'(t)-f'(a)|\int_y^x |y-t|\,dt \text{ car } y\leq x.$$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| \leq \frac{1}{(y-x)^2}\max_{t\in[y,x]}|f'(t)-f'(a)|\int_y^x (t-y)\,dt \leq \frac{1}{2}\max_{t\in[y,x]}|f'(t)-f'(a)|.$$

$$\int_y^x (t-y)\,dt = \left[\frac{(t-y)^2}{2}\right]_y^x = \frac{(x-y)^2}{2} = \frac{(y-x)^2}{2}$$

Dans les deux cas $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| \leq \frac{1}{2}\max_{t\in\overleftrightarrow{[x,y]}}|f'(t)-f'(a)|$ pour tout $a\in\mathbb{R}$ et

pour tout $(x,y)\in D$.

Pour pouvoir aborder Q6 allons plus loin et prenons $a\in\mathbb{R}$ et $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus D$.

Alors $x=y$ et $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| = \left|\frac{1}{2}f'(x)-\frac{1}{2}f'(a)\right| = \frac{1}{2}|f'(x)-f'(a)|$

Notons que $\frac{1}{2}|f'(x)-f'(a)| = \frac{1}{2}\max_{t\in\overleftrightarrow{[x,y]}}|f'(t)-f'(a)|$ car $x=y$.

Finalement $\forall a\in\mathbb{R},\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| \overset{!}{\leq} \frac{1}{2}\max_{t\in\overleftrightarrow{[x,y]}}|f'(t)-f'(a)|.$

De même $\forall a\in\mathbb{R},\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \left|\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial g}{\partial y}(a,a)\right| \leq \frac{1}{2}\max_{t\in\overleftrightarrow{[x,y]}}|f'(t)-f'(a)|.$

Q6

1) Nous avons vu que g est de classe C^1 sur (*) l'ouvert D. ← voir p.6

2) Nous avons vu que pour tout $A\notin D$, $\frac{\partial g}{\partial x}(A)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(A)$ existent.

Ne reste plus qu'à montrer la continuité de $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ aux points de $\mathbb{R}^2\setminus D$.

Soit $A=(a,a)\in\mathbb{R}^2\setminus D$. Montrons que $\frac{\partial g}{\partial x}$ est continue en A.

$\frac{\partial g}{\partial x}(A)=f'(a)$. Il convient donc de montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to A}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=f'(a)$ ou que

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-f'(a)\right)=0$. D'après Q5 b) pour obtenir ce résultat il suffit de

montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)}\ \max\limits_{t\in[\overleftrightarrow{x,y}]}|f'(t)-f'(a)|=0$. Montrons ce résultat en utilisant la

définition... et la continuité de f' en a.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ Rappelons que $\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2$, $\max(|u|,|v|)\leq\|(u,v)\|$.

f' est continue en a. $\exists\eta\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall z\in\mathbb{R}$, $|z-a|<\eta\Rightarrow|f'(z)-f'(a)|<\varepsilon$.

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\|(x,y)-A\|<\eta$. Alors $\|(x-a,y-a)\|<\eta$

Alors $\max(|x-a|,|y-a|)\leq\|(x-a,y-a)\|<\eta$.

Ainsi $|x-a|<\eta$ et $|y-a|<\eta$. Soit $t\in[\overleftrightarrow{x,y}]$

Supposons $x\leq y$. $x\leq t\leq y$; $x-a\leq t-a\leq y-a$; $-|x-a|\leq t-a\leq|y-a|$ (car

$x-a\geq-|x-a|$ et $y-a\leq|y-a|$). Ainsi $-\eta<-|x-a|\leq t-a\leq|y-a|<\eta$.

Donc $|t-a|<\eta$.

Supposons $x>y$. En échangeant x et y dans ce qui précède on obtient encore $|t-a|<\eta$.

Alors $\forall t\in[\overleftrightarrow{x,y}]$, $|t-a|<\eta$ donc $\forall t\in[\overleftrightarrow{x,y}]$, $|f'(t)-f'(a)|<\varepsilon$.

Alors $\left|\max\limits_{t\in[\overleftrightarrow{x,y}]}|f'(t)-f'(a)|\right|=\max\limits_{t\in[\overleftrightarrow{x,y}]}|f'(t)-f'(a)|<\varepsilon$.

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists\eta\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\|(x,y)-(a,a)\|<\eta\Rightarrow\left|\max\limits_{t\in[\overleftrightarrow{x,y}]}|f'(t)-f'(a)|\right|<\varepsilon$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)}\ \max\limits_{t\in[\overleftrightarrow{x,y}]}|f'(t)-f'(a)|=0$. Par encadrement on a $\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=f'(a)=\frac{\partial g}{\partial x}(a,a)$

Alors $\frac{\partial g}{\partial x}$ est continue en (a,a) et ceci pour tout $a\in\mathbb{R}$. Il en est de même pour $\frac{\partial g}{\partial y}$.

Finalement $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Montrons que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$. $\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$.

Posons $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = x - y$. $\overline{D} = \varphi^{-1}(\{0\})$.

φ est une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (φ est polynomiale).

Comme $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, $\varphi^{-1}(\{0\})$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Ainsi $\overline{D}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ donc <u>D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.</u>

Question 5 HEC 2011 S 1163

Un joueur effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce qui donne Pile avec la probabilité p et face avec la probabilité $q = 1 - p$, $p \in]0, 1[$.

On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On définit la variable aléatoire N égale au rang d'apparition du premier Pile s'il existe et égale à 0 si Pile n'apparaît jamais

On définit une variable aléatoire X de la façon suivante :

Si N prend la valeur 0, X prend la valeur 0.

Si n appartient à $\mathbb{N}^*$ et si N prend la valeur n, le joueur dispose dans une urne n boules numérotées de 1 à n ; il tire une boule de cette urne et X prend la valeur de la boule tirée.

Q1. Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, exprimer $P(X = k)$ sous forme de somme.

Q2. Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \dfrac{p}{q} \lim\limits_{M \to +\infty} \displaystyle\int_0^q \sum_{n=k}^{M} t^{n-1}\, \mathrm{d}t$.

Q3 Étudier la limite de $\displaystyle\int_0^q \frac{t^M}{1-t}\, \mathrm{d}t$ lorsque M tend vers $+\infty$. Déterminer $P(X = 1)$.

Cours *Rappeler la définition de la continuité en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ ($n \geqslant 2$). Donner un exemple d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.*

Pour tout i dans $\mathbb{N}^*$ notons P_i (resp. F_i) l'événement le $i^{\text{ème}}$ lancer donne pile (resp. face).

$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $P(N=n) = P(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n) \underset{\uparrow}{=} P(F_1)P(F_2)\dots P(F_{n-1})P(P_n) = q^{n-1}p$.

indépendance des lancers.

$P(N=1) = P(P_1) = p = q^{1-1}p$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{\underline{P(N=n) = q^{n-1}p = pq^{n-1}}}$.

Calculons $P(N=0)$.

incompatibilité

V1 $P(N=0) = 1 - P(N \neq 0) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{N=n\}\right) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} p q^{n-1}$

$P(N=0) = 1 - p \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = 1 - p \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 - p \times \frac{1}{1-q} = 1 - \frac{p}{p} = 1 - 1 = 0$.

V2 Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n$.

$\{N=0\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} S_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} \subset S_n$.

Le théorème de la limite monotone montre alors que $P(N=0) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} S_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(S_n)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n) = P(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n) = P(F_1)P(F_2)\dots P(F_n) = q^n$.

Donc $P(N=0) = \lim P(S_n) = \lim q^n \underset{|q|<1}{=} 0$. $P(N=0)=0$.

Finalement $\forall n \in \mathbb{N},\ P(N=n) = \begin{cases} pq^{n-1} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{si } n=0 \end{cases}$.

(Q1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $(\{N=n\})_{n\geq 0}$ est un système complet d'événements.

$$P(X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{X=k\} \cap \{N=n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\{X=k\} \cap \{N=n\})$$

$\{X=k\} \cap \{N=0\} = \emptyset$ car $k \in \mathbb{N}^*$

$$P(X=k) = \sum_{n}^{+\infty} P_{\{N=n\}}(X=k)\, P(N=n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} p q^{n-1}.$$

$P(N=n) \neq 0$ si $n \geq 1$

$\begin{cases} 1/n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = \dfrac{p}{q} \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{q^n}{n}$. Remarque.. $P(X=0)=0$ car $\{X=0\} = \{N=0\}$

(Q2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall n \in [\![k, +\infty[\![,\quad \sum_{n=k}^{n} \frac{q^n}{n} = \sum_{n=k}^{n} \int_0^q t^{n-1}\,dt = \int_0^q \sum_{n=k}^{n} t^{n-1}\,dt.$$

Alors $P(X=k) = \dfrac{p}{q} \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{q^n}{n} = \frac{p}{q} \lim_{n\to+\infty} \sum_{n=k}^{n} \frac{q^n}{n}$.

$P(X=k) = \dfrac{p}{q} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^q \sum_{n=k}^{n} t^{n-1}\,dt$ et ceci pour tout k dans $\mathbb{N}^*$

(Q3) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0,q],\ 0 < 1-q \leq 1-t$.

$\forall t \in [0,q],\ 0 \leq \dfrac{1}{1-t} \leq \dfrac{1}{1-q}$ et $t^n \geq 0$.

$\forall t \in [0,q],\ 0 \leq \dfrac{t^n}{1-t} \leq \dfrac{1}{1-q} t^n$.

En intégrant on obtient $0 \leq \displaystyle\int_0^q \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq \frac{1}{1-q}\int_0^q t^n\,dt$ car $q \geq 0$.

donc $0 \leq \displaystyle\int_0^q \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq \frac{1}{1-q}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^q = \frac{1}{1-q}\,\frac{q^{n+1}}{n+1} \underset{q\in]0,1[}{\leq} \frac{1}{1-q}\times\frac{1}{n+1}$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1-q}\times\frac{1}{n+1}\right)=0$. Par encadrement on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^q \frac{t^n}{1-t}\,dt=0$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$P(X=k) = \frac{p}{q}\lim_{n\to+\infty}\int_0^q \sum_{n=k}^{n} t^{n-1}\,dt \underset{t\in[0,q],\,t\neq 1}{=} \frac{p}{q}\lim_{n\to+\infty}\int_0^q t^{k-1}\,\frac{1-t^{n-(k-1)}}{1-t}\,dt.$$

$$P(X=k) = \frac{p}{q}\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt - \int_0^q \frac{t^n}{1-t}\,dt\right) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt.$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^q \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = \dfrac{p}{q}\displaystyle\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt.$

En particulier $P(X=1) = \dfrac{p}{q}\displaystyle\int_0^q \frac{dt}{1-t} = \frac{p}{q}\left[-\ln|1-t|\right]_0^q = -\frac{p}{q}\ln|1-q| = -\frac{p}{q}\ln p.$

$P(X=1) = -\dfrac{p}{q}\ln p.$

Remarque.. Soit $k \in [\![2,+\infty[\![$. $\displaystyle\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt \overset{u=1-t}{=} \int_1^{1-q}\frac{(1-u)^{k-1}}{u}(-du) = \int_p^1 \frac{(1-u)^{k-1}}{u}\,du.$

$$\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt = \int_p^1 \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{(-u)^i}{u}\,du = \int_p^1 \frac{1}{u}\,du + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k-1}{i}(-1)^i\int_p^1 u^{i-1}\,du.$$

$$\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt = -\ln p + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{(-1)^i}{i}(1-p^i)$$

donc $P(X=k) = -\dfrac{p}{q}\ln p + \dfrac{p}{q}\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{(-1)^i}{i}(1-p^i)$

ou encore ...

$$\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt = \int_0^q \frac{t^{k-1}-1}{1-t}\,dt + \int_0^q \frac{dt}{1-t}$$

$$\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt = -\int_0^q (t^{k-2}+t^{k-3}+\dots+t+1)\,dt + \Big[-\ln|1-t|\Big]_0^q$$

$$\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dr = -\left[\frac{t^{k-1}}{k-1}+\frac{t^{k-2}}{k-2}+\dots+\frac{t^2}{2}+t\right]_0^q - \ln p = -\sum_{i=1}^{k-1}\frac{q^i}{i} - \ln p$$

donc $P(X=k) = \frac{p}{q}\left[-\ln p - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{q^i}{i}\right].$