PARTIE I

Q1 ⚠ $\boxed{\text{Nous supposerons dans toute la suite que } f_X \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

Le texte ne le dit pas mais l'utilise.

Ainsi f_X est définie et positive sur $\mathbb{R}$. f_X est continue sur $\mathbb{R}-D$ où D est une partie finie de $\mathbb{R}$. Dans ces conditions :

1) F_X est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus D$

2) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus D,\ F'_X(x)=f_X(x)$.

a) $Y_1=\inf(X_1,X_2,\dots,X_n)$. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$F_{Y_1}(x)=P(\inf(X_1,X_2,\dots,X_n)\leqslant x)=1-P(\inf(X_1,X_2,\dots,X_n)>x)$

$F_{Y_1}(x)=1-P(\{X_1>x\}\cap\{X_2>x\}\cap\dots\cap\{X_n>x\})$. $X_1,X_2,\dots,X_n$ étant indépendantes :

$F_{Y_1}(x)=1-P(X_1>x)\,P(X_2>x)\cdots P(X_n>x)=1-(P(X>x))^n=1-(1-F_X(x))^n$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ F_{Y_1}(x)=1-(1-F_X(x))^n$. $\qquad F_{Y_1}=1-(1-F_X)^n$.

F_X est continue sur $\mathbb{R}$. Il en est alors de même pour $1-F_X$, puis pour $(1-F_X)^n$ et enfin pour $1-(1-F_X)^n$. F_{Y_1} est continue sur $\mathbb{R}$.

F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}-D$. Il en est de même pour $1-F_X$, puis pour $(1-F_X)^n$ et enfin pour $(1-(1-F_X)^n)$. F_{Y_1} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus D$ et D est fini.

Ce qui précède montre que Y_1 est une variable aléatoire à densité.

On peut également dire que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus D,\ F'_{Y_1}(x)=-n(-F'_X(x))(1-F_X(x))^{n-1}=$ $n f_X(x)(1-F_X(x))^{n-1}$

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus D,\ F'_{Y_1}(x)=n f_X(x)(1-F_X(x))^{n-1}$!

Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ f_{Y_1}(x)=n f_X(x)(1-F_X(x))^{n-1}$! f_{Y_1} est une fonction positive sur $\mathbb{R}$ qui coïncide sur $\mathbb{R}\setminus D$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points avec F'_{Y_1}.

Alors f_{Y_1} est une densité de Y_1.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_{Y_n}(x) = P(\operatorname{Sup}(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq x) = P(\{X_1 \leq x\} \cap \{X_2 \leq x\} \cap \dots \cap \{X_n \leq x\})$.

Par indépendance. $F_{Y_n}(x) = P(X_1 \leq x)\, P(X_2 \leq x) \dots P(X_n \leq x) = (P(X \leq x))^n = (F_X(x))^n$.

Donc $F_{Y_n} = F_X^n$.

F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus D$. Alors F_{Y_n} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus D$ où D est fini.

Donc Y_n est une variable aléatoire à densité.

De plus $\forall x \in \mathbb{R} \setminus D$, $F'_{Y_n}(x) = n\, F'_X(x)\, F_X^{n-1}(x) = n f_X(x) F_X^{n-1}(x)$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{Y_n}(x) = n f_X(x) F_X^{n-1}(x)$.

f_{Y_n} est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_{Y_n} sur $\mathbb{R} \setminus D$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. f_{Y_n} est une densité de Y_n.

b) Soit x dans $\mathbb{R}$. Posons $p_x = P(X \leq x)$. $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(X_k \leq x) = p_x$.

- Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $J_k(x)$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p_x.
- Notons que pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $J_k(x)$ est l'indicatrice de l'événement $\{X_k \leq x\}$.
  Les événements $\{X_1 \leq x\}, \{X_2 \leq x\}, \dots, \{X_n \leq x\}$ étant indépendants il en est de même des variables aléatoires $J_1(x), J_2(x), \dots, J_n(x)$.

Les deux points précédents permettent de dire que $\sum_{k=1}^{n} J_k(x)$ suit la loi binomiale de paramètres n et p_x.

$S_n(x)$ suit la loi binomiale de paramètres n et $P(X \leq x)$ ... ou n et $F_X(x)$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$\{Y_k \leq x\}$ se réalise si et seulement si le $k^{\text{ième}}$ élément de la suite des valeurs prises par $X_1, X_2, \dots, X_n$ rangées dans l'ordre croissant est inférieur ou égal à x.

Ainsi $\{Y_k\leq x\}$ se réalise si et seulement si au moins k des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ prennent une valeur inférieure ou égale à x.

Notons que $S_n(x)$ compte le nombre de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ prenant une valeur inférieure ou égale à x.

Alors $\{Y_k\leq x\}=\{S_n(x)\geq k\}$ ... et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}$ et tout k dans $[\![1,n]\!]$

d) Soit $x\in\mathbb{R}$. Soit $k\in[\![1,n]\!]$.

$F_{Y_k}(x)=P(Y_k\leq x)=P(S_n(x)\geq k)=\sum_{j=k}^{n}P(S_n(x)=j)=\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}p_x^j(1-p_x)^{n-j}$.

avec $p_x=P(X\leq x)=F_X(x)$.

Donc $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_{Y_k}(x)=\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}(F_X(x))^j(1-F_X(x))^{n-j}$.

Soit $k\in[\![1,n]\!]$.
F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}-D$. Pour tout $j\in[\![k,n]\!]$, F_X^j et $(1-F_X)^{n-j}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus D$. Alors pour tout $j\in[\![k,n]\!]$,
$\binom{n}{j}F_X^j(1-F_X)^{n-j}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus D$.
Ainsi F_{Y_k} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus D$ où D est fini.

Ainsi Y_k est une variable aléatoire à densité.

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus D$, $F'_{Y_k}(x)=\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}j\,F'_X(x)(F_X(x))^{j-1}(1-F_X(x))^{n-j}+\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}(F_X(x))^j(n-j)(-F'_X(x))(1-F_X(x))^{n-j-1}$

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus D$, $F'_{Y_k}(x)=\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}j\,f_X(x)(F_X(x))^{j-1}(1-F_X(x))^{n-j}-\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}(n-j)f_X(x)(F_X(x))^j(1-F_X(x))^{n-j-1}$.

Posons $\forall x\in\mathbb{R}$, $\hat{f}_{Y_k}(x)=\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}j\,f_X(x)(F_X(x))^{j-1}(1-F_X(x))^{n-j}-\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}(n-j)f_X(x)(F_X(x))^j(1-F_X(x))^{n-j-1}$

$\hat{f}_{Y_k}$ est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_{Y_k} sur $\mathbb{R}\setminus D$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Alors $\hat{f}_{Y_k}$ est une densité de Y_k. Nous allons simplifier $\hat{f}_k$ et voir que l'on retrouve pour $k=1$ et n, f_{Y_1} et f_{Y_n} (incertitude qui a motivé ce ∧ !)

Soit $x\in\mathbb{R}$. Faisons le changement d'indice $j\leftarrow j+1$ dans la première somme. On obtient alors :

n ou $\boxed{n-1}$ — $n-j=0$ si $j=n$!!

$$\hat f_{Y_\ell}(x)=\sum_{j=\ell-1}^{n-1}\binom{n}{j+1}(j+1)f_X(x)(F_X(x))^{j}(1-F_X(x))^{n-j-1}-\sum_{j=\ell}^{n}\binom{n}{j}(n-j)f_X(x)(F_X(x))^{j}(1-F_X(x))^{n-j-1}.$$

Cela donne, à un chouïa près ($\ell=n$!!) : $\hat f_{Y_\ell}(x)=$

$$\binom{n}{\ell}\ell f_X(x)(F_X(x))^{\ell-1}(1-F_X(x))^{n-\ell}+\sum_{j=\ell}^{n-1}\left[\binom{n}{j+1}(j+1)-\binom{n}{j}(n-j)\right]f_X(x)(F_X(x))^{j}(1-F_X(x))^{n-j-1}.$$

Soit $j\in[\![\ell,n-1]\!]$. $\binom{n}{j+1}(j+1)-\binom{n}{j}(n-j)=\dfrac{n!}{(j+1)!(n-j-1)!}(j+1)-\dfrac{n!}{j!(n-j)!}(n-j)$.

Donc $\binom{n}{j+1}(j+1)-\binom{n}{j}(n-j)=\dfrac{n!}{j!(n-j-1)!}-\dfrac{n!}{j!(n-j-1)!}=\underline{\underline{0}}$!!

Donc $\hat f_{Y_\ell}(x)=\binom{n}{\ell}\ell f_X(x)(F_X(x))^{\ell-1}(1-F_X(x))^{n-\ell}$ et ceci pour tout $x\in\mathbb{R}$.

$\hat f_{Y_{\underline{\underline{1}}}}(x)=nf_X(x)(1-F_X(x))^{n-1}=f_{Y_1}(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. $\hat f_{Y_1}=f_{Y_1}$!

$\hat f_{Y_n}(x)=nf_X(x)(F_X(x))^{n-1}=f_{Y_n}(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. $\hat f_{Y_n}=f_{Y_n}$!

<u>Posons alors</u> $\forall\ell\in[\![\underline{\underline{2}},\underline{\underline{n-1}}]\!]$, $f_{Y_\ell}=\hat f_{Y_\ell}$! Ainsi $\forall\ell\in[\![1,n]\!]$, $f_{Y_\ell}=\hat f_{Y_\ell}$!!

1) $\underline{\underline{\forall x\in\mathbb{R},\ f_{Y_\ell}(x)=\binom{n}{\ell}\ell f_X(x)(F_X(x))^{\ell-1}(1-F_X(x))^{n-\ell}.}}$

2) $\underline{\underline{f_{Y_\ell}\text{ est une densité de }Y_\ell.}}$

f) Soit $r\in\mathbb{N}^*$ et $\ell\in[\![1,n]\!]$. X possède un moment d'ordre r donc $\int_{-\infty}^{+\infty}t^r f_X(t)\,dt$ est convergente. Mieux elle est absolument convergente car $t\mapsto t^r f_X(t)$ garde un signe constant sur $[0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0]$.

Rappelons que $\forall t\in\mathbb{R}$, $F_X(t)\in[0,1]$.

Alors $\forall t\in\mathbb{R}$, $0\leq(F_X(t))^{\ell-1}(1-F_X(t))^{n-\ell}\leq 1$.

$\forall t\in\mathbb{R},\ 0\leq |t^r f_{Y_k}(t)| = \binom{n}{k} k\, |t^r|\, f_X(t)\,(F_X(t))^{k-1}(1-F_X(t))^{n-k} \leq \binom{n}{k} k\, |t^r| f_X(t) = \binom{n}{k} k\, |t^r f_X(t)|$

$\begin{cases} \binom{n}{k} k\, |t^r| f_X(t) \geq 0 \\ 0 \leq (F_X(t))^{k-1}(1-F_X(t))^{n-k} \leq 1 \end{cases}$

De plus $\int_{-\infty}^{+\infty} \binom{n}{k} k\, |t^r f_X(t)|\,dt$ converge.

Alors les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives doivent pouvoir montrer (!!) que $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^r f_{Y_k}(t)|\,dt$ converge.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_{Y_k}(t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

Finalement Y_k possède un moment d'ordre r pour tout k dans $[\![1,n]\!]$

... ceci lorsque X possède un moment d'ordre r.

Q2 a) Notons que $\forall x\in\mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 1-\frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x\in[1,+\infty[\\ 0 & \text{si } x\in]-\infty,1[\end{cases}$. $x\mapsto 0$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x\mapsto 1-\frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Alors F_X est continue sur $]-\infty,1]$ et sur $[1,+\infty[$ donc F_X est continue sur $\mathbb{R}$.

$x\mapsto 1-\frac{1}{\sqrt{x}}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $x\mapsto 0$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Alors F_X est de classe C^1 sur $]-\infty,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

Donc F_X est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{1\}$.

$\forall x\in]-\infty,1[,\ F_X'(x)=0$ et $\forall x\in]1,+\infty[,\ F_X'(x)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{3/2}}$.

F_X est continue sur $[1,+\infty[$ et $\forall x\in]1,+\infty[,\ F_X'(x)>0$. Alors F_X est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

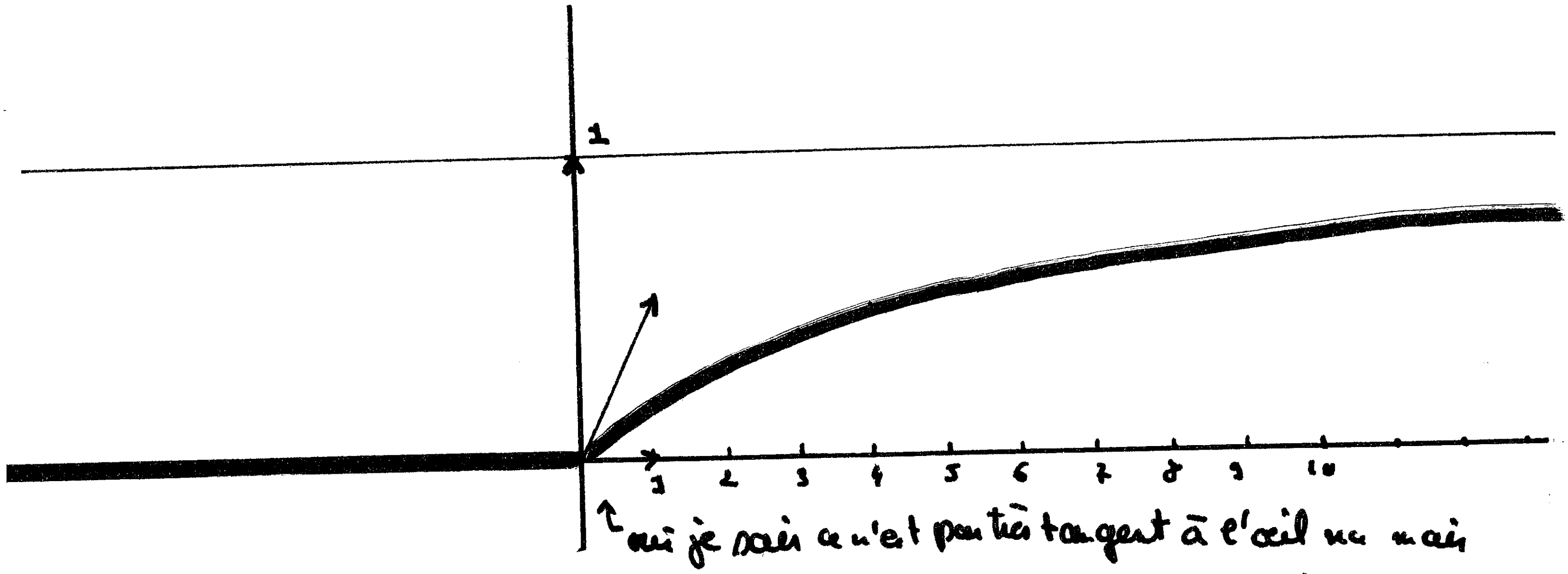
Notons que F_X' est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x\in]1,+\infty[,\ F_X''(x) = -\frac{3}{4}\,\frac{1}{x^{5/2}}$

F_X est continue sur $[1,+\infty[$ et $\forall x\in]1,+\infty[,\ F_X''(x)\leq 0$.

Alors F_X est concave sur $[1,+\infty[$.

Notons encore que F_X est dérivable à droite en 1 et $(F_X)'_d(1)=\frac{1}{2}$.

(F_X est également dérivable à gauche en 1 et $(F_X)'_g(1)=0$)



↑ ici je sais ce n'est pas très tangent à l'œil nu mais au microscope il n'y a plus de doute ! Pourtant les valeurs sont justes...

Nous avons vu que F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{1\}$.

Ceci suffit pour dire que <u>X est une variable aléatoire à densité</u> (... mais on le disait au départ que ...)

$\forall x \in]-\infty, 1[$, $F'_X(x)=0$ et $\forall x \in]1,+\infty[$, $F'_X(x)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{3/2}}$

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\,\frac{1}{x\sqrt{x}} & \text{si } x\in[1,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

f_X est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_X sur $\mathbb{R}-\{1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. <u>f_X est une densité de X.</u>

<u>b)</u> X possède quand même un moment d'ordre 0 !

$\forall t \in [1,+\infty[$, $t f_X(t)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{t^{1/2}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1/2}}\,dt$ diverge.

Alors $\int_1^{+\infty} t f_X(t)\,dt$ diverge. $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,dt$ diverge également !

Ainsi X ne possède pas de moment d'ordre 1.

Alors <u>pour tout r dans $\mathbb{N}^*$, X ne possède pas de moment d'ordre r.</u>

(Si X possède un moment d'ordre r, X possède un moment d'ordre r' pour tout $r' \in [\![0, r]\!]$ ...)

c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x \in]-\infty, 1[$, $F_X(x) = 0 \neq \frac{1}{2}$.

Supposons que $x \in [1, +\infty[$. $F_X(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$

$F_X(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$.

Ainsi $\exists! \, m \in \mathbb{R},\ F_X(m) = \frac{1}{2}$. $m = 4$.

d) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{Y_k}(x) = k\binom{n}{k} f_X(x) \left(F_X(x)\right)^{k-1} \left(1 - F_X(x)\right)^{n-k}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in]-\infty, 1[$, $f_{Y_k}(x) = 0$. Supposons que $x \in [1, +\infty[$.

$f_{Y_k}(x) = k\binom{n}{k} \frac{1}{2} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{k-1} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)^{n-k}$.

$f_{Y_k}(x) = \frac{k}{2}\binom{n}{k} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{n-k} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{k-1}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{Y_k}(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{n-k+3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{k-1} & \text{si } x \in [1, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{k-1} = 1$ donc $f_{Y_k}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{k}{2}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{n-k+3} = \frac{k}{2}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-k+3}{2}}$.

Q3 a) Soit $k \in [\![1, n-2]\!]$.

• $x f_{Y_k}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{k}{2}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-k+3}{2} - 1} = \frac{k}{2}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-k+1}{2}}$.

• $\forall x \in [1, +\infty[,\ x f_{Y_k}(x) \geqslant 0$.

Alors $\int_1^{+\infty} x f_{Y_k}(x)\,dx$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{k}{2}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-k+1}{2}} dx$ ou que

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{n-k+1}{2}}}\,dx$. $k \leq n-2$ donc $n-k \geqslant 2$; $n-k+1 \geqslant 3$; $\frac{n-k+1}{2} \geqslant \frac{3}{2} > 1$.

Alors $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{n-\ell+1}{2}}}$ converge donc $\int_1^{+\infty} x f_{Y_\ell}(x)\,dx$ converge.

Notons que $\int_{-\infty}^{1} x f_{Y_\ell}(x)\,dx$ existe et vaut 0.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{Y_\ell}(x)\,dx$ converge.

Y_ℓ possède une espérance qui vaut $\int_1^{+\infty} x f_{Y_\ell}(x)\,dx$.

Soit $k \in [\![1, n-2]\!]$

b) Soit $A \in [1, +\infty[$. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$. Cela justifie le changement de variable $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$ dans ce qui suit.

$$\int_1^A x f_{Y_k}(x)\,dx = \frac{k}{2}\binom{n}{k}\int_1^A x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{n-k+3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{k-1}dx.$$

$$\int_1^A x f_{Y_k}(x)\,dx \underset{\uparrow}{=} \frac{k}{2}\binom{n}{k}\int_1^{1/\sqrt{A}} \frac{1}{t^2}\, t^{n-k+3}(1-t)^{k-1}\left(-\frac{2}{t^3}\right)dt.$$

$$\left|\begin{array}{l} t = \frac{1}{\sqrt{x}}. \\ x = \frac{1}{t^2}.\ dx = -\frac{2}{t^3}dt. \end{array}\right.$$

$$\int_1^A x f_{Y_k}(x)\,dx = k\binom{n}{k}\int_{1/\sqrt{A}}^{1} t^{n-k-2}(1-t)^{k-1}\,dt. \qquad (*)$$

$n-k-2 \in \mathbb{N}$ et $k-1 \in \mathbb{N}$. Alors $t \mapsto t^{n-k-2}(1-t)^{k-1}$ est continue sur $[0,1]$

donc $\int_0^1 t^{n-k-2}(1-t)^{k-1}\,dt$ converge !

Or $\int_1^{+\infty} x f_{Y_k}(x)\,dx$ converge et $\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{A}} = 0$.

Dans ces conditions en faisant tendre A vers $+\infty$, $(*)$ donne :

$$\int_1^{+\infty} x f_{Y_k}(x)\,dx = k\binom{n}{k}\int_0^1 t^{n-k-2}(1-t)^{k-1}\,dt.$$

Pour tout $k \in [\![1, n-2]\!]$, $E(Y_k) = k\binom{n}{k}\int_0^1 t^{n-k-2}(1-t)^{k-1}\,dt.$

c) Montrons par récurrence sur r que :

$$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \underline{\underline{\forall s}} \in \mathbb{N}^*,\ I_{r,s} = \frac{(r-1)!\,(s-1)!}{(r+s-1)!}$$

* Soit $s \in \mathbb{N}^*$.

$$I_{1,s} = \int_0^1 (1-t)^{s-1}dt = \left[\frac{-(1-t)^s}{s}\right]_0^1 = \frac{1}{s} = \frac{0!\,(s-1)!}{s!} = \frac{(1-1)!(s-1)!}{(1+s-1)!}.$$

$\forall s \in \mathbb{N}^*,\ I_{1,s} = \dfrac{(1-1)!(s-1)!}{(1+s-1)!}$. La propriété est vraie pour $r=1$.

* Supposons la propriété vraie pour r dans $\mathbb{N}^*$ et montrons-la pour $r+1$.

L'hypothèse de récurrence indique que : $\forall s \in \mathbb{N}^*,\ I_{r,s} = \dfrac{(r-1)!\,(s-1)!}{(r+s-1)!}$.

Soit $s \in \mathbb{N}^*$.

$$I_{r+1,s} = \int_0^1 t^r (1-t)^{s-1} dt.$$

$u : t \mapsto t^r$ et $v \mapsto -\dfrac{(1-t)^s}{s}$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$.

$\forall t \in [0,1],\ u'(t) = r\,t^{r-1}$ et $v'(t) = (1-t)^{s-1}$.

En intégrant par parties il vient alors :

$$I_{r+1,s} = \int_0^1 t^r (1-t)^{s-1} dt = \underbrace{\left[t^r\left(-\frac{(1-t)^s}{s}\right)\right]_0^1}_{=0 \text{ car } r \in \mathbb{N}^* \text{ et } s \in \mathbb{N}^*} - \int_0^1 r\,t^{r-1}\left(-\frac{(1-t)^s}{s}\right)dt.$$

Donc $I_{r+1,s} = \dfrac{r}{s}\displaystyle\int_0^1 t^{r-1}(1-t)^s\,dt = \dfrac{r}{s} I_{r,s+1}$.

L'hypothèse de récurrence donne : $I_{r+1,s} = \dfrac{r}{s} I_{r,s+1} = \dfrac{r}{s}\,\dfrac{(r-1)!\,(s+1-1)!}{(r+s+1-1)!}$

$$I_{r+1,s} = \frac{r!\,s!}{s\,(r+s)!} = \frac{r!\,(s-1)!}{(r+s)!} = \frac{(r+1-1)!\,(s-1)!}{(r+1+s-1)!}$$

$\forall s \in \mathbb{N}^*,\ I_{r+1,s} = \dfrac{(r+1-1)!\,(s-1)!}{(r+1+s-1)!}$; la propriété est vraie pour $r+1$ et la récurrence s'achève.

Alors $\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \forall s \in \mathbb{N}^*,\ I_{r,s} = \displaystyle\int_0^1 t^{r-1}(1-t)^{s-1}dt = \frac{(r-1)!\,(s-1)!}{(r+s-1)!}.$

d) Soit $\ell \in [\![1, n-2]\!]$. $E(Y_\ell) = \ell \binom{n}{\ell} \int_0^1 t^{n-\ell-2}(1-t)^{\ell-1}\,dt = \ell \binom{n}{\ell} I_{n-\ell-1,\ell}$.

$$E(Y_\ell) = \ell \times \frac{n!}{\ell!\,(n-\ell)!}\;\frac{(n-\ell-2)!\,(\ell-1)!}{(n-\ell-1+\ell-1)!} = \frac{n!}{(n-\ell)!}\;\frac{(n-\ell-2)!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{(n-\ell)(n-\ell-1)}$$

$$\forall \ell \in [\![1, n-2]\!],\quad E(Y_\ell) = \frac{n(n-1)}{(n-\ell)(n-\ell-1)}.$$

e) $n \geqslant 5$ et n est impair.

Alors $\exists \ell \in [\![2, +\infty[\![$, $n = 2\ell+1$; $\ell+1 \geqslant 3$.

$n - \ell = n - \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2} \geqslant \frac{5+1}{2} = 3$; $n - (\ell+1) \geqslant 2$; $\ell+1 \leqslant n-2$.

Ainsi $3 \leqslant \ell+1 \leqslant n-2$

En particulier $\ell+1 \in [\![1, n]\!]$. ce qui justifie la définition de la médiane empirique $Y_{\ell+1}$.

$1 \leqslant \ell+1 \leqslant n-2$ donc $E(Y_{\ell+1})$ existe et vaut $\dfrac{n(n-1)}{(n-\ell-1)(n-\ell-2)} \overset{n=2\ell+1}{=} \dfrac{(2\ell+1)(2\ell)}{\ell(\ell-1)}$

$$E(Y_{\ell+1}) = \frac{4\ell+2}{\ell-1} = \frac{4(\ell-1)+6}{\ell-1} = 4 + \frac{6}{\ell-1}.$$

$$E(Y_{\ell+1}) = 4 + \frac{6}{\ell-1}. \qquad \lim_{\ell \to +\infty} E(Y_{\ell+1}) = 4.$$

Observons que si n tend vers $+\infty$ alors ℓ tend vers $+\infty$ et $E(Y_{\ell+1})$ tend vers 4 qui est la médiane théorique de X.

$\lim\limits_{\ell \to +\infty} E(Y_{\ell+1}) = 4$ et 4 est la médiane théorique de X ; la suite $(Y_{\ell+1})_{\ell \geqslant 2}$ est une suite d'estimateurs asymptotiquement sans biais de la médiane empirique de X ... Bof ... ℓ dépend de n !

(Q4) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leq x) = P\left(\frac{1}{n^2} Y_n \leq x\right) = P(Y_n \leq n^2 x) = F_{Y_n}(n^2 x)$.

$$F_{Y_n}(n^2x) = \left(F_X(n^2x)\right)^n = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 x}}\right)^n & \text{si } n^2 x \in [1, +\infty[. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z_n}(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{n\sqrt{x}}\right)^n & \text{si } x \in [\frac{1}{n^2}, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}}.$$

b) • $\underline{\lim_{x \to +\infty} \varphi_2(x) = 1}$ car $\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$.

$\underline{\lim_{x \to -\infty} \varphi_2(x) = 0}$ car φ_2 est nulle sur $]-\infty, 0]$.

• Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

1er cas.. $a < b \leq 0$. Alors $\varphi_2(a) = 0 \leq 0 = \varphi_2(b)$; $\varphi_2(a) \leq \varphi_2(b)$.

2e cas.. $a \leq 0 < b$. Alors $\varphi_2(a) = 0 \leq e^{-\frac{1}{\sqrt{b}}} = \varphi_2(b)$; $\varphi_2(a) \leq \varphi_2(b)$.

3e cas.. $0 < a < b$. Alors $\frac{1}{\sqrt{b}} < \frac{1}{\sqrt{a}}$; $-\frac{1}{\sqrt{a}} < -\frac{1}{\sqrt{b}}$.

Ainsi $\varphi_2(a) = e^{-\frac{1}{\sqrt{a}}} < e^{-\frac{1}{\sqrt{b}}} = \varphi_2(b)$; on a encore $\varphi_2(a) \leq \varphi_2(b)$.

Ce qui précède montre que $\underline{\varphi_2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}}$.

<u>Remarque</u>.. Notons que les deux points précédents montrent que

$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_2(x) \in [0,1]$.

• $x \mapsto 0$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc φ_2 est de classe $\underline{C^1 \text{ sur }]-\infty, 0]}$

$x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{x}}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $u \mapsto e^u$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Par composition $\underline{\varphi_2 \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[}$

...Alors 1) φ_Z est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points

2) φ_Z est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ et φ_Z est continue à gauche en 0.

$\varphi_Z(0)=0$. $\lim_{x\mapsto 0^+}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=-\infty$ donc $\lim_{x\mapsto 0^+}\varphi_Z(x)=\lim_{x\mapsto 0^+} e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}=0=\varphi_Z(0)$

Alors φ_Z est continue à droite en 0.

Finalement φ_Z est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

ceci achève de montrer que φ_Z est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité Z !

c) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_{Z_n}(x)=\begin{cases}\left(1-\frac{1}{n\sqrt{x}}\right)^n & \text{si } x\in\left[\frac{1}{n^2},+\infty\right[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Soit $x\in\,]-\infty,0]$. $\lim_{n\mapsto+\infty}F_{Z_n}(x)=0$; $\lim_{n\mapsto+\infty}F_{Z_n}(x)=\varphi_Z(x)$.

Soit $x\in\,]0,+\infty[$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $x\geqslant\frac{1}{n^2}\Leftrightarrow n^2\geqslant\frac{1}{x}\Leftrightarrow n\geqslant\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Posons $n_0=\mathrm{Ent}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+1$. $n_0\in\mathbb{N}^*$. $n_0>\frac{1}{\sqrt{x}}$ donc $x>\frac{1}{n_0^2}$; $x\geqslant\frac{1}{n_0^2}$.

$\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{1}{n_0^2}\leqslant x$.

Alors $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $x\in\left[\frac{1}{n^2},+\infty\right[$.

$\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $F_{Z_n}(x)=\left(1-\frac{1}{n\sqrt{x}}\right)^n=e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n\sqrt{x}}\right)}$

$\uparrow\ 1-\frac{1}{n\sqrt{x}}>1$

$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(-\frac{1}{n\sqrt{x}}\right)=0$; $n\ln\left(1-\frac{1}{n\sqrt{x}}\right)\underset{n\mapsto+\infty}{\sim}n\left(-\frac{1}{n\sqrt{x}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Par continuité de la fonction exponentielle : $\lim_{n\mapsto+\infty}F_{Z_n}(x)=\lim_{n\mapsto+\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n\sqrt{x}}\right)}=e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

Donc $\lim_{n\mapsto+\infty}F_{Z_n}(x)=e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

Finalement $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\mapsto+\infty}F_{Z_n}(x)=\varphi_Z(x)$. $(Z_n)_{n\geqslant1}$ converge en loi vers Z.

PARTIE II Existence et unicité d'un estimateur optimal

Q5 • $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(\theta, 1)$.

Alors $X_1+X_2+\dots+X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(n\theta, (\sqrt{1^2+1^2+\dots+1^2})^2)$

donc $X_1+X_2+\dots+X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(n\theta, n)$.

• Alors $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1+X_2+\dots+X_n) \hookrightarrow \mathcal{N}(\frac{1}{n} \times n\theta, (\sqrt{\frac{1}{n^2} \times n})^2)$.

$\overline{X}_n \hookrightarrow \mathcal{N}(\theta, \frac{1}{n})$ ou $\overline{X}_n \hookrightarrow \mathcal{N}(\theta, (\sqrt{\frac{1}{n}})^2)$.

1) les variables aléatoires X_k sont indépendantes.

2) elles possèdent la même espérance θ et la même variance 1.

la loi faible des grands nombres montre que la suite de terme général

$\overline{X}_n = \frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine

égale à θ.

De plus $E(\overline{X}_n) = \theta$. Alors $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais et convergent

du paramètre θ.

⚠ voir a) à la fin de Q5

Q6 b) $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\theta, 1)$ et $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est un n-échantillon i.i.d. de X.

le cours indique alors que $[\overline{X}_n - t_\alpha \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + t_\alpha \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n}}]$ est un

intervalle de confiance de θ au risque α ou à la confiance $1-\alpha$,

t_α étant l'unique réel tel que $2\phi(t_\alpha)-1 = 1-\alpha$ ou $\phi(t_\alpha) = \frac{2-\alpha}{2}$.

Notons que le milieu de cet intervalle de confiance est $\overline{X}_n$.

$\phi(t_\alpha) = \frac{2-\alpha}{2}$ et $\frac{2-\alpha}{2} \in]\frac{1}{2}, 1[$. Alors $t_\alpha > 0$.

$\phi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$; $\frac{\alpha}{2} = 1 - \phi(t_\alpha) = \phi(-t_\alpha)$; $\phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}) = -t_\alpha$; $t_\alpha = -\phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})$.

$\left[\overline{X}_n - \left(\frac{-\phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n}}\right), \overline{X}_n + \left(\frac{-\phi^{-1}(\alpha/2)}{\sqrt{n}}\right)\right]$ est un intervalle de confiance du paramètre θ au risque α dont le milieu est $\overline{X}_n$.

De plus $f(\alpha) = -\frac{\phi^{-1}(\alpha/2)}{\sqrt{n}}$.

Si $\beta \in]0,1[$ (au moins on le suppose). $f(\beta) = b f(\alpha)$ avec $0 < b < 1$.

$-\frac{\phi^{-1}(\beta/2)}{\sqrt{n}} = -b \frac{\phi^{-1}(\alpha/2)}{\sqrt{n}}$; $\phi^{-1}(\beta/2) = b\,\phi^{-1}(\alpha/2)$.

Alors $\frac{\beta}{2} = \phi(\phi^{-1}(\beta/2)) = \phi(b\,\phi^{-1}(\alpha/2))$; $\beta = 2\phi(b\,\phi^{-1}(\alpha/2))$.

$b < 1$ mais $\boxed{\phi^{-1}(\alpha/2) < 0}$ car $\frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}$.

Donc $b\,\phi^{-1}(\alpha/2) > \phi^{-1}(\alpha/2)$.

Alors $\beta = 2\phi(b\,\phi^{-1}(\alpha/2)) > 2\phi(\phi^{-1}(\alpha/2)) = 2 \times \frac{\alpha}{2} = \alpha$ car ϕ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\beta > \alpha$

* Réciproquement supposons que $\beta > \alpha$. Comme ϕ^{-1} est strictement croissante sur $]0,1[$, $\phi^{-1}(\beta/2) > \phi^{-1}(\alpha/2)$. Alors $-\frac{\phi^{-1}(\beta/2)}{\sqrt{n}} < -\frac{\phi^{-1}(\alpha/2)}{\sqrt{n}}$.

Donc $f(\beta) < f(\alpha)$. Mieux $0 < f(\beta) < f(\alpha)$.

Alors $0 < \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} < 1$. Posons $b = \frac{f(\beta)}{f(\alpha)}$. $b \in]0,1[$ et $f(\beta) = b f(\alpha)$.

Finalement les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $\mu(\beta) < \mu(\alpha)$

i') $\exists\, b \in]0,1[,\ \mu(\beta) = b\,\mu(\alpha)$

ii) $\beta > \alpha$

Notons que μ est strictement décroissante sur $]0,1[$.

Réalité si l'on veut "réduire" l'intervalle de confiance il faut "augmenter le risque ou diminuer la confiance ...

Retour sur a)

a) Nous savons que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ \phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$

Alors ϕ est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x \to -\infty} \phi(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = 1$. Alors ϕ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

Notons que ϕ^{-1} est continue et strictement croissante sur $]0,1[$ (elle est même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ \phi'(x) \neq 0$).

$\phi(0) = \frac{1}{2}$. Alors $\phi^{-1}(\frac{1}{2}) = 0$, $\forall x \in]0, \frac{1}{2}[,\ \phi^{-1}(x) < 0$ et $\forall x \in]\frac{1}{2}, 1[,\ \phi^{-1}(x) > 0$.

Q7 a) Nous avons déjà vu que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de θ.

$\overline{X}_n \hookrightarrow \mathcal{N}(\theta, \frac{1}{n})$ donc $\overline{X}_n$ possède une variance.

Alors $\overline{X}_n$ appartient à $\mathcal{E}_\theta$ et ainsi $\mathcal{E}_\theta$ n'est pas vide.

b) Soit U_n appartenant à $\mathcal{E}_\theta$.

Notons que $V(\bar{X}_n) \leq V(U_n)$.

$cov(\bar{X}_n, U_n - \bar{X}_n) = 0$; $cov(\bar{X}_n, U_n) = cov(\bar{X}_n, \bar{X}_n)$ (les deux covariances existent car $\bar{X}_n$ et U_n possèdent un moment d'ordre 2).

Alors $V(\bar{X}_n) = cov(\bar{X}_n, U_n)$; $(V(\bar{X}_n))^2 = (cov(\bar{X}_n, U_n))^2$.

$V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \neq 0$. Supposons $V(U_n) \neq 0$. $\rho_{\bar{X}_n, U_n}$ existe et $|\rho_{\bar{X}_n, U_n}| \leq 1$ d'après le cours.

Donc $1 \geq \rho^2_{\bar{X}_n, U_n} = \frac{(cov(\bar{X}_n, U_n))^2}{V(\bar{X}_n) V(U_n)} = \frac{(V(\bar{X}_n))^2}{V(\bar{X}_n) V(U_n)} = \frac{V(\bar{X}_n)}{V(U_n)}$.

$V(U_n) \geq 0$. Alors : $V(\bar{X}_n) \leq V(U_n)$.

Supposons maintenant $V(U_n) = 0$. Alors U_n est presque sûrement constante et ainsi $cov(\bar{X}_n, U_n) = 0$. Cela donne alors $0 = V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}$!!

Finalement si U_n appartient à $\mathcal{E}_\theta$ alors $V(\bar{X}_n) \leq V(U_n)$.

<u>$\bar{X}_n$ est optimal dans $\mathcal{E}_\theta$.</u>

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $A_n(\lambda) = (1-\lambda) Z_n + \lambda U_n$.

Z_n et U_n possèdent une variance alors <u>$A_n(\lambda)$ possède une variance et</u> également une espérance.

$E(A_n(\lambda)) = (1-\lambda) E(Z_n) + \lambda E(U_n) = (1-\lambda)\theta + \lambda\theta = \theta$. <u>$E(A_n(\lambda)) = \theta$.</u>

Ainsi <u>$A_n(\lambda)$ appartient à $\mathcal{E}_\theta$.</u>

$A_n(\lambda) = Z_n + \lambda(U_n - Z_n)$. $A_n(\lambda)$, Z_n et $U_n - Z_n$ possèdent une variance.

Alors $V(A_n(\lambda)) = V(Z_n) + V(\lambda(U_n - Z_n)) + 2\, cov(Z_n, \lambda(U_n - Z_n))$.

$V(A_n(\lambda)) - V(Z_n) = 2\lambda \operatorname{cov}(Z_n, U_n - Z_n) + \lambda^2 V(U_n - Z_n)$.

Or $V(A_n(\lambda)) - V(Z_n) \geqslant 0$ car Z_n est optimal.

Donc $\lambda [2 \operatorname{cov}(Z_n, U_n - Z_n) + \lambda V(U_n - Z_n)] \geqslant 0$ et ceci pour tout λ dans $\mathbb{R}$.

Alors 1) $\forall \lambda \in]0, +\infty[$, $2\operatorname{cov}(Z_n, U_n - Z_n) + \lambda V(U_n - Z_n) \geqslant 0$

2) $\forall \lambda \in]-\infty, 0[$, $2\operatorname{cov}(Z_n, U_n - Z_n) + \lambda V(U_n - Z_n) \leqslant 0$

En faisant tendre λ vers 0 par valeurs supérieures (resp. inférieures) dans 1) (resp. 2)) il vient : $2\operatorname{cov}(Z_n, U_n - Z_n) \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$).

Ainsi $2\operatorname{cov}(Z_n, U_n - Z_n) = 0$. $\underline{\underline{\operatorname{cov}(Z_n, U_n - Z_n) = 0}}$.

d) D'après ce qui précède $\operatorname{cov}(Z_n, \overline{X}_n - Z_n) = 0$ car $\overline{X}_n$ appartient à $\mathcal{E}_\Theta$ et Z_n est optimal (c)).

On a également : $\operatorname{cov}(\overline{X}_n, Z_n - \overline{X}_n) = 0$.

En ajoutant il vient $0 = \operatorname{cov}(Z_n, \overline{X}_n - Z_n) + \operatorname{cov}(\overline{X}_n, Z_n - \overline{X}_n)$.

On a encore $0 = -\operatorname{cov}(Z_n, \overline{X}_n - Z_n) - \operatorname{cov}(\overline{X}_n, Z_n - \overline{X}_n)$.

Alors $0 = \operatorname{cov}(-Z_n, \overline{X}_n - Z_n) + \operatorname{cov}(\overline{X}_n, \overline{X}_n - Z_n)$.

Alors $0 = \operatorname{cov}(\overline{X}_n - Z_n, \overline{X}_n - Z_n)$.

Donc $V(\overline{X}_n - Z_n) = 0$. Ainsi $\overline{X}_n - Z_n$ est presque sûrement constante. $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $P(\overline{X}_n - Z_n = \alpha) = 1$.

Dans ces conditions $E(\overline{X}_n - Z_n) = \alpha$. $\alpha = E(\overline{X}_n) - E(Z_n) = \theta - \theta = 0$.

Alors $P(\overline{X}_n - Z_n = 0) = 1$. $P(\overline{X}_n = Z_n) = 1$. $\underline{\underline{Z_n = \overline{X}_n \text{ presque sûrement}}}$

Ainsi
- 1) $\overline{X}_n$ appartient à $\mathcal{E}_\Theta$ et est optimal dans $\mathcal{E}_\Theta$
- 2) si Z_n appartient à $\mathcal{E}_\Theta$ et est optimal dans $\mathcal{E}_\Theta$, $Z_n = \overline{X}_n$ presque sûrement.

Q8 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\theta, 1)$ donc $X-\theta \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

$F_X(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(X \leq x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(X-\theta \leq x-\theta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \phi(x-\theta) = \phi(0)$

comme ϕ est injective.

$F_X(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x-\theta = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

X possède une médiane théorique m et une seule. $m = \theta$.

b) calculer $f_X(m)$ t'as dit !! mais cela dépend de f_X !!

Nous comprendrons qu'ici $\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}$.

Ainsi $f_X(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_X(2m-x) = P(X \leq 2m-x) = P(X \leq 2\theta - x) = P(X-\theta \leq \theta - x) = \phi(\theta - x)$.

$1 - F_X(x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - P(X-\theta \leq x-\theta) = 1 - \phi(x-\theta) = \phi(\theta - x)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(2m-x) = 1 - F_X(x)$.

La densité f_X que nous avons choisi est continue sur $\mathbb{R}$. Alors F_X est de

classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (de toute manière $F_X : x \mapsto \phi(x-\theta) \ldots$) et $\forall x \in \mathbb{R}, F_X'(x) = f_X(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(2m-x) = 1 - F_X(x)$.

En dérivant on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, -f_X(2m-x) = -f_X(x)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f_X(2m-x) = f_X(x)$.

c) X possède une espérance donc un moment d'ordre 1. Alors d'après Q1 f

pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, Y_k possède un moment d'ordre 1 donc une espérance.

Ainsi pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, Y_k possède une espérance.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$f_{Y_k}(2m-x) = k\binom{n}{k} f_X(2m-x)\left(F_X(2m-x)\right)^{k-1}\left(1-F_X(2m-x)\right)^{n-k}$.

$f_{Y_k}(2m-x) = k\binom{n}{k} f_X(x)\left(1-F_X(x)\right)^{k-1}\left(1-(1-F_X(x))\right)^{n-k}$.

$f_{Y_k}(2m-x) = k\binom{n}{k} f_X(x)\left(F_X(x)\right)^{(n-k+1)-1}\left(1-F_X(x)\right)^{n-(n-k+1)}$.

$k\binom{n}{k} = k\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = (n-k+1)\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = (n-k+1)\binom{n}{n-k+1}$.

$f_{Y_k}(2m-x) = (n-k+1)\binom{n}{n-k+1} f_X(x)\left(F_X(x)\right)^{(n-k+1)-1}\left(1-F_X(x)\right)^{n-(n-k+1)} = f_{Y_{n-k+1}}(x)$.

$\uparrow_{\ n-k+1 \in [\![1,n]\!]\,!}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{Y_k}(2m-x) = f_{Y_{n-k+1}}(x)$ ... « $-Y_k+2m$ a même loi que Y_{n-k+1} » ce qui n'est pas une grosse surprise car $-X+2m$ et X ont même loi !

$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{Y_k}(t)dt$ converge et vaut $E(Y_k)$. Soit $(A,B)\in\mathbb{R}^2$. $t \mapsto 2m-t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ce qui autorise le changement de variable $u = 2m-t$ dans ce qui suit.

$\int_A^B t f_{Y_k}(t)dt = \int_{2m-A}^{2m-B}(2m-u) f_{Y_k}(2m-u)(-du) = \int_{2m-B}^{2m-A}(2m-u) f_{Y_{n-k+1}}(u)\,du$.

$\int_A^B t f_{Y_k}(t)dt = 2m\int_{2m-B}^{2m-A} f_{Y_{n-k+1}}(u)du - \int_{2m-B}^{2m-A} u f_{Y_{n-k+1}}(u)du$. $(\blacktriangle)$

$\lim_{A\to-\infty}(2m-A) = +\infty$, $\lim_{B\to+\infty}(2m-B) = -\infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{Y_k}(t)\,dt$ converge et vaut $E(Y_k)$,

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_{n-k+1}}(u)du$ converge et vaut 1 et $\int_{-\infty}^{+\infty} u f_{Y_{n-k+1}}(u)du$ converge et vaut $E(Y_{n-k+1})$.

En faisant tendre A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$ dans $(\blacktriangle)$ il vient :

$E(Y_k) = 2m - E(Y_{n-k+1})$. Alors $E(Y_k - m) = E(Y_k) - m = m - E(Y_{n-k+1}) = E(m - Y_{n-k+1})$.

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ E(Y_k - m) = E(m - Y_{n-k+1})$.

d) $n = 2\ell + 1$ avec $\ell \in \mathbb{N}$. Alors $1 \leq \ell+1 \leq n$.

Donc $E(Y_{\ell+1} - m) = E(m - Y_{n-(\ell+1)+1})$.

$E(Y_{\ell+1}) - m = m - E(Y_{2\ell+1-(\ell+1)+1}) = m - E(Y_{\ell+1})$

Alors $2E(Y_{\ell+1}) = 2m$. $\underline{\underline{E(Y_{\ell+1}) = m.}}$

X possède un moment d'ordre 2 car $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\theta, 1)$.

Alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, Y_k possède un moment d'ordre 2 donc une variance. Ainsi $E(Y_{\ell+1}) = m$ et $Y_{\ell+1}$ possède une variance.

Donc $Y_{\ell+1}$ est un élément de $\mathcal{E}_\theta$. Donc $V(Y_{\ell+1}) \geq V(\overline{X}_n)$.

Donc $\underline{\underline{V(Y_{\ell+1}) \geq \frac{1}{n}}}$.

Ici "$(Y_{\ell+1})$" est un estimateur sans biais de la médiane empirique de X.

Partie III. Résultats asymptotiques.

Q9 a) Soit $s \in \mathbb{R}$. e^{sJ} est une variable aléatoire finie.

Alors $E(e^{sJ})$ existe et vaut, d'après le théorème de transfert : $e^{s\times 0}P(J=0)+e^{s\times 1}P(J=1)$.

$E(e^{sJ}) = 1-p+pe^{s}$ et ceci pour tout s dans $\mathbb{R}$. $\forall s \in \mathbb{R},\ L_J(s) = 1-p+pe^{s}$.

b) Pour $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ et $h(t) = e^{st}$ où s est fixé dans $\mathbb{R}$.

et c)

- T est une variable aléatoire à densité de densité φ.
- T prend ses valeurs dans $]-\infty,+\infty[$.
- h est continue sur $]-\infty,+\infty[$.

Alors $E(h\circ T)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\varphi(t)\,dt$ est absolument convergente.

Notons que $h\times\varphi$ est positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi $h\circ T$ possède une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\varphi(t)\,dt$ converge.

Notons encore qu'en cas d'existence $E(h\circ T) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\varphi(t)\,dt$.

$\forall t \in \mathbb{R},\ h(t)\varphi(t) = e^{st}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(t^2-2st)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(t-s)^2+\frac{1}{2}s^2}$.

$\forall t \in \mathbb{R},\ h(t)\varphi(t) = e^{\frac{1}{2}s^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\times 1}e^{-\frac{(t-s)^2}{2\times 1^2}}$.

$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\times 1}e^{-\frac{(t-s)^2}{2\times 1^2}}$ est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres s et 1. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\times 1}e^{-\frac{(t-s)^2}{2\times 1^2}}\,dt$ existe et vaut 1.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\varphi(t)\,dt$ converge et vaut $e^{s^2/2}$.

Ainsi $E(e^{sT})$ existe et vaut $e^{s^2/2}$.

Pour tout réel s, $L_T(s)$ existe et vaut $e^{s^2/2}$.

Soit $(\theta,\sigma) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}$. Soit $s\in\mathbb{R}$.

$e^{s(\sigma T+\theta)} = e^{s\theta} \times e^{(s\sigma)T}$. $E(e^{(s\sigma)T})$ existe et vaut $e^{(s\sigma)^2/2}$.

Alors $E(e^{s(\sigma T+\theta)})$ existe et vaut $e^{s\theta} e^{(s\sigma)^2/2}$.

Donc $L_{\sigma T+\theta}(s)$ existe et vaut $e^{\sigma^2 \frac{s^2}{2}+\theta s}$.

<u>$L_{\sigma T+\theta}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall s\in\mathbb{R}$, $L_{\sigma T+\theta}(s) = e^{\sigma^2\frac{s^2}{2}+\theta s}$.</u>

<u>Remarque</u>. $\sigma T+\theta \hookrightarrow \mathcal{N}(\theta,\sigma^2)$.

Q10 a) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $k(n)-1 \leq \frac{n}{2} < k(n)$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0< k(n)-\frac{n}{2}\leq 1$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0<\dfrac{k(n)-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}=0$ on obtient par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k(n)-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}}=0$.

Alors $k(n)-\frac{n}{2} \underset{n\to+\infty}{=} o(\sqrt{n})$ donc <u>$k(n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{2}+o(\sqrt{n})$</u>.

<u>b)</u> Soit ϕ la fonction de répartition de T. $\varphi : t\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$ est une (la !) densité de T continue sur $\mathbb{R}$.

Alors ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t\in\mathbb{R}$, $\phi'(t)=\varphi(t)$. Ce n'est pas un scoop !

Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$X\hookrightarrow\mathcal{N}(\theta,1)$ donc $X-\theta\hookrightarrow\mathcal{N}(0,1)$.

Alors $\forall \hat{x}\in\mathbb{R}$, $F_X(\hat{x}) = P(X\leq\hat{x}) = P(X-\theta\leq\hat{x}-\theta) = \phi(\hat{x}-\theta)$. Alors :

F_X est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, $\forall\hat{x}\in\mathbb{R}$, $F_X'(\hat{x}) = \phi'(\hat{x}-\theta)$ et $F_X''(\hat{x})=\phi''(\hat{x}-\theta)$.

La formule de Taylor-Young appliquée à F_X à l'ordre 2 en θ donne :

$$F_X(\hat{x}) \underset{\hat{x}\mapsto\theta}{=} F_X(\theta) + (\hat{x}-\theta)F'_X(\theta) + \frac{1}{2}(\hat{x}-\theta)^2 F''_X(\theta) + o((\hat{x}-\theta)^2)$$

$F_X(\theta) = \phi(\theta-\theta) = \phi(0) = \frac{1}{2}$. $F'_X(\theta) = \phi'(\theta-\theta) = \phi'(0) = \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et

$F''_X(\theta) = \phi''(\theta-\theta) = \phi''(0) = \varphi'(0) = 0$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}, \varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-x)e^{-x^2/2}\right)$.

Alors $\underline{F_X(\hat{x}) \underset{\hat{x}\mapsto\theta}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\hat{x}-\theta) + o((\hat{x}-\theta)^2)}$.

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{x}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} y_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\theta + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) = \theta$.

Ainsi $F_X(y_n) \underset{n\mapsto+\infty}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\theta + \frac{x}{\sqrt{n}} - \theta\right) + o\left(\left(\theta + \frac{x}{\sqrt{n}} - \theta\right)^2\right)$.

$$q_n \underset{n\mapsto+\infty}{=} F_X(y_n) \underset{n\mapsto+\infty}{=} \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{x^2}{n}\right) \underset{n\mapsto+\infty}{=} \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

qui peut le plus peut le moins...

Ainsi $\underline{\underline{q_n \underset{n\mapsto+\infty}{=} \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \overset{!!}{\underset{n\mapsto+\infty}{=}} \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}}$.

c) $\sqrt{n}\, q_n \underset{n\mapsto+\infty}{=} \frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi}} + o(1)$ d'après ce qui précède.

$\frac{1}{\sqrt{n}} \ell(n) \underset{n\mapsto+\infty}{=} \frac{\sqrt{n}}{2} + o(1)$ d'après Q10 a)

Alors $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(\ell(n) - n q_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\ell(n) - \sqrt{n}\, q_n \underset{n\mapsto+\infty}{=} -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} + o(1)$.

Donc $\underline{\underline{\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}}}$. $\underline{\underline{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et sa limite } u \text{ vaut } -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}}}$.

Q11 a) Soit $s\in\mathbb{R}$. W_n est une variable aléatoire finie donc e^{sW_n} est également une variable aléatoire finie. Ainsi $E(e^{sW_n})$ existe ; $L_{W_n}(s)$ aussi.

$$L_{W_n}(s) = E(e^{sW_n}) = E\left(e^{s\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n(y_n) - nq_n)}\right) = E\left(e^{-s\sqrt{n}q_n} \times e^{\frac{s}{\sqrt{n}}S_n(y_n)}\right).$$

$$L_{W_n}(s) = e^{-s\sqrt{n}q_n} E\left(e^{\frac{s}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} J_k(y_n)}\right) = e^{-s\sqrt{n}q_n} E\left(\prod_{k=1}^{n} e^{\frac{s}{\sqrt{n}}J_k(y_n)}\right).$$

$J_1(y_n), J_2(y_n), \dots, J_n(y_n)$ sont indépendantes.

donc $e^{\frac{s}{\sqrt{n}} J_1(y_n)}, e^{\frac{s}{\sqrt{n}} J_2(y_n)}, \dots, e^{\frac{s}{\sqrt{n}} J_n(y_n)}$ sont indépendantes.

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $J_k(y_n)$ est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $P(X \leqslant y_n)$ ou $F_X(y_n)$ ou q_n. $q_n \in]0,1[$ car F_X prend ses valeurs dans $]0,1[$ car $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Donc d'après Q9 a) $E\left(e^{\frac{s}{\sqrt{n}} J_k(y_n)}\right)$ existe et vaut $1-q_n+q_n e^{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ et ceci pour tout k dans $[\![1,n]\!]$. Alors :

$$L_{W_n}(s) = e^{-s\sqrt{n}\, q_n} E\left(\prod_{k=1}^{n} e^{\frac{s}{\sqrt{n}} J_k(y_n)}\right) = e^{-s\sqrt{n}\, q_n} \prod_{k=1}^{n} E\left(e^{\frac{s}{\sqrt{n}} J_k(y_n)}\right).$$

$$L_{W_n}(s) = e^{-s\sqrt{n}\, q_n} \prod_{k=1}^{n} \left(1-q_n+q_n e^{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right) = e^{-s\sqrt{n}\, q_n} \left(1+q_n e^{\frac{s}{\sqrt{n}}}-q_n\right)^n.$$

$$\underline{\underline{\forall s \in \mathbb{R},\ L_{W_n}(s) = e^{-s\sqrt{n}\, q_n} \left(1+q_n e^{\frac{s}{\sqrt{n}}}-q_n\right)^n.}}$$

b) Soit $s \in \mathbb{R}$. $1+q_n e^{s/\sqrt{n}} - q_n$ est strictement positif car c'est l'espérance de variables aléatoires prenant des valeurs strictement positives (voir plus haut). Ainsi $L_{W_n}(s) > 0$ et $\ln L_{W_n}(s) = -s\sqrt{n}\, q_n + n \ln\left(1+q_n e^{\frac{s}{\sqrt{n}}} - q_n\right)$.

$q_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc $\underline{-s\sqrt{n}\, q_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{s\sqrt{n}}{2} - \frac{sx}{\sqrt{2\pi}} + o(1).}$

$$e^{\frac{s}{\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{s}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } q_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi n}} + o\left(\underline{\underline{\frac{1}{n}}}\right)$$

par produit et après troncature il vient :

$$q_n e^{\frac{s}{\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2} + \frac{s}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{4}\frac{s^2}{n} + \frac{x}{\sqrt{2\pi n}} + \frac{xs}{\sqrt{2\pi}\, n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

donc $1+q_n e^{\frac{s}{\sqrt{n}}}-q_n \underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2}+\frac{s}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{4}\frac{s^2}{n}+\frac{x}{\sqrt{2\pi n}}+\frac{xs}{\sqrt{2\pi}\,n}-\frac{1}{2}-\frac{x}{\sqrt{2\pi n}}+o\left(\frac{1}{n}\right).$

$$1+q_n e^{\frac{s}{\sqrt{n}}}-q_n \underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{s}{2\sqrt{n}}+\frac{s^2}{4n}+\frac{sx}{\sqrt{2\pi}\,n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Rappelons que $\ln(1+\hat{x}) \underset{\hat{x}\to 0}{=} \hat{x}-\frac{\hat{x}^2}{2}+o(\hat{x}^2)$. Alors par composition et après troncature il vient : $\ln(1+q_n e^{s/\sqrt{n}}-q_n) \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{s}{2\sqrt{n}}+\frac{s^2}{4n}+\frac{sx}{\sqrt{2\pi}\,n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{2\sqrt{n}}\right)^2+o\left(\frac{1}{n}\right).$

$$\ln(1+q_n e^{\frac{s}{\sqrt{n}}}-q_n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{s}{2\sqrt{n}}+\frac{s^2}{8n}+\frac{sx}{\sqrt{2\pi}\,n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

donc $\underline{n\ln(1+q_n e^{\frac{s}{\sqrt{n}}}-q_n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{s\sqrt{n}}{2}+\frac{s^2}{8}+\frac{sx}{\sqrt{2\pi}}+o(1)}$. Alors :

$$\ln L_{W_n}(s) = -s\sqrt{n}\,q_n + n\ln(1+q_n e^{\frac{s}{\sqrt{n}}}-q_n) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{s\sqrt{n}}{2}-\frac{sx}{\sqrt{2\pi}}+\frac{s\sqrt{n}}{2}+\frac{s^2}{8}+\frac{sx}{\sqrt{2\pi}}+o(1).$$

$\underline{\underline{\ln L_{W_n}(s) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{s^2}{8}+o(1)}}$. Alors $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty}\ln L_{W_n}(s)=\frac{s^2}{8}}}$.

Par continuité de la fonction exponentielle en $\frac{s^2}{8}$ on obtient :

$\lim_{n\to+\infty} L_{W_n}(s) = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln L_{W_n}(s)} = e^{s^2/8}$; $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} L_{W_n}(s) = e^{s^2/8}}}$.

D'après Q9 c) $\forall s\in\mathbb{R}$, $L_{\frac{T}{2}}(s) = L_{\frac{1}{2}T+0}(s) = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{s^2}{2}+0\times s} = e^{s^2/8}$.

Ainsi $\underline{\underline{\forall s\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} L_{W_n}(s) = L_{\frac{T}{2}}(s)}}$.

On admet alors que $\underline{\underline{(W_n)_{n\geq 1} \text{ converge en loi vers } \frac{T}{2}}}$.

Q12 Supposons que $x=0$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $y_n=\pi=0$, $q_n=F_X(0)=\frac{1}{2}$ et

$W_n=\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n(0)-\frac{n}{2})$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n(0)\hookrightarrow\mathcal{B}(n,\frac{1}{2})$. $E(S_n(0))=\frac{n}{2}$ et $V(S_n(0))=\frac{n}{4}$.

Notons que 1.. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n(0)=J_1(0)+J_2(0)+\dots+J_n(0)$.

2.. $(J_n(0))_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes ayant même loi (loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$), ayant une espérance égale à $\frac{1}{2}$ et une variance égale à $\frac{1}{4}$ (dac normelle).

Le théorème de la limite centrée montre alors que la suite de terme général

$$S_n^*(0)=\frac{S_n(0)-E(S_n(0))}{\sqrt{V(S_n)}}$$ converge en loi vers T car T suit la loi normale centrée réduite.

$\forall\hat{x}\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} P(S_n^*(0)\leq\hat{x})=P(T\leq\hat{x})$.

Or $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n^*(0)=\frac{S_n(0)-\frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{S_n(0)-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}S_n^*(0)$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $W_n=\frac{1}{2}S_n^*(0)$.

$\forall\hat{x}\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty}P(W_n\leq\hat{x})=\lim_{n\to+\infty}P(\frac{1}{2}S_n^*(0)\leq\hat{x})=\lim_{n\to+\infty}P(S_n^*(0)\leq 2\hat{x})=\phi(2\hat{x})$.

$\forall\hat{x}\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty}P(W_n\leq\hat{x})=\phi(2\hat{x})=P(T\leq 2\hat{x})=P(\frac{T}{2}\leq\hat{x})$.

Ainsi si $x=0$ $(W_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers $\frac{T}{2}$.

Q13 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

d'après I Q1 c) $\{Y_{\ell(n)} \leqslant y_n\} = \{S_n(y_n) \geqslant \ell(n)\}$ car

$\ell(n) = \lfloor n\alpha \rfloor + 1 \in [\![1, n]\!]$ et $y_n \in \mathbb{R}$.

$\{Y_{\ell(n)} \leqslant y_n\} = \{Y_{\ell(n)} \leqslant \theta + \frac{x}{\sqrt{n}}\} = \{\sqrt{n}(Y_{\ell(n)} - \theta) \leqslant x\}$

donc $\underline{\{\sqrt{n}(Y_{\ell(n)} - \theta) \leqslant x\} = \{S_n(y_n) \geqslant \ell(n)\}}$.

$\{S_n(y_n) \geqslant \ell(n)\} = \{S_n(y_n) - nq_n \geqslant \ell(n) - nq_n\} = \left\{ \frac{S_n(y_n) - nq_n}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{\ell(n) - nq_n}{\sqrt{n}} \right\}$ car $\sqrt{n} > 0$

Alors $\underline{\{S_n(y_n) \geqslant \ell(n)\} = \{W_n \geqslant u_n\}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \{\sqrt{n}(Y_{\ell(n)} - \theta) \leqslant x\} = \{S_n(y_n) \geqslant \ell(n)\} = \{W_n \geqslant u_n\}$ et ceci pour tout réel x

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Rappelons que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}$ et $(W_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers $\frac{T}{2}$.

On a donc furieusement envie de dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} P(W_n \geqslant u_n) = P(\frac{T}{2} \geqslant -\frac{x}{\sqrt{2\pi}})$!

Or $P(\frac{T}{2} \geqslant -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}) = P(T \geqslant \frac{-2x}{\sqrt{2\pi}}) = 1 - P(T < -\frac{2x}{\sqrt{2\pi}}) = 1 - P(T \leqslant -\frac{2x}{\sqrt{2\pi}}) = P(T \leqslant \frac{2x}{\sqrt{2\pi}})$.

$T \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

Donc $P(\frac{T}{2} \geqslant -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}) = P(\frac{\sqrt{2\pi}}{2} T \leqslant x) = P(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, T \leqslant x) = P(\frac{T}{2} \leqslant \frac{x}{\sqrt{2\pi}}) = F_{\frac{T}{2}}(\frac{x}{\sqrt{2\pi}})$.

ce qui donne "bien" le résultat mais soyons sérieux... nous n'avons rien montré. Donc retournons nous nos manches. Pour faciliter les écritures nous posons $z = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}$ et $t = -z = \frac{x}{\sqrt{2\pi}}$. Nous allons montrer le résultat en utilisant la définition de la limite d'une suite.

Posons $L = F_{\frac{T}{2}}(t)$.

Attention c'est du lourd. Eloignez les enfants !

notons que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant n_0 \Rightarrow |P(W_n \geqslant u_n) - L| < \varepsilon$.

$\boxed{\text{Soit } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*.}$ Notons que $F_{\frac{T}{2}}$ est continue en $t = \frac{x}{\sqrt{2\pi}}$.

Alors $\exists h \in \mathbb{R}_+^*, \forall t' \in \mathbb{R}, |t'-t| < h \Rightarrow |F_{\frac{T}{2}}(t') - F_{\frac{T}{2}}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $\alpha = \frac{h}{2}$. $|(t+\alpha)-t| = |\alpha| = \alpha = \frac{h}{2} < h$ et $|(t-\alpha)-t| = |-\alpha| = \alpha = \frac{h}{2} < h$.

Ainsi $|F_{\frac{T}{2}}(t+\alpha) - F_{\frac{T}{2}}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|F_{\frac{T}{2}}(t-\alpha) - F_{\frac{T}{2}}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

ce qui donne :
$$\left\{\begin{array}{l} F_{\frac{T}{2}}(t) - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{F_{\frac{T}{2}}(t+\alpha) < F_{\frac{T}{2}}(t) + \frac{\varepsilon}{2}} \\ \text{et} \\ \underline{F_{\frac{T}{2}}(t) - \frac{\varepsilon}{2} < F_{\frac{T}{2}}(t-\alpha)} < F_{\frac{T}{2}}(t) + \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right. \qquad \text{(A)}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} = z = -t$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors $\underline{\underline{\exists n_1 \in \mathbb{N}^*}}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant n_1 \Rightarrow |u_n - z| < \alpha \Rightarrow z - \alpha < u_n < z + \alpha$.

Soit $n \in [\![n_1, +\infty[\![$.

$\{W_n > z+\alpha\} \subset \{W_n \geqslant u_n\} \subset \{W_n > z-\alpha\}$. Alors

$P(W_n > z+\alpha) \leqslant P(W_n \geqslant u_n) \leqslant P(W_n > z-\alpha)$.

donc $1 - F_{W_n}(z+\alpha) \leqslant P(W_n \geqslant u_n) \leqslant 1 - F_{W_n}(z-\alpha)$ et ceci pour tout n dans $[\![n_1, +\infty[\![$. (B)

$(W_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers $\frac{T}{2}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{W_n}(z+\alpha) = F_{\frac{T}{2}}(z+\alpha)$ et

$\lim\limits_{n \to +\infty} F_{W_n}(z-\alpha) = F_{\frac{T}{2}}(z-\alpha)$.

Alors $\exists n_2 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_2 \Rightarrow |F_{W_n}(z+\alpha) - F_{\frac{T}{2}}(z+\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\exists n_3 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_3 \Rightarrow |F_{W_n}(z-\alpha) - F_{\frac{T}{2}}(z-\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Notons que $\forall n \in [\![n_2, +\infty[\![$, $F_{\frac{T}{2}}(z+\alpha) - \frac{\varepsilon}{2} < \underbrace{F_{W_n}(z+\alpha) < F_{\frac{T}{2}}(z+\alpha) + \frac{\varepsilon}{2}}$ et

$\forall n \in [\![n_3, +\infty[\![$, $\underbrace{F_{\frac{T}{2}}(z-\alpha) - \frac{\varepsilon}{2} < F_{W_n}(z-\alpha)} < F_{\frac{T}{2}}(z-\alpha) + \frac{\varepsilon}{2}$ (C)

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$. Soit $n \in [\![n_0, +\infty[\![$. En utilisant (B) et (C) on obtient :

$P(W_n \geq u_n) \geq 1 - F_{W_n}(z+\alpha) > 1 - F_{\frac{T}{2}}(z+\alpha) - \frac{\varepsilon}{2}$ et

$P(W_n \geq u_n) \leq 1 - F_{W_n}(z-\alpha) < 1 - \left(F_{\frac{T}{2}}(z-\alpha) - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 - F_{\frac{T}{2}}(z-\alpha) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Remarque .. Soit $u \in \mathbb{R}$. $1 - F_{\frac{T}{2}}(u) = 1 - P(\frac{T}{2} \leq u) = 1 - P(T \leq 2u) \overset{T \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)}{=} P(T \leq -2u)$

donc $1 - F_{\frac{T}{2}}(u) = P(\frac{T}{2} \leq -u) = F_{\frac{T}{2}}(-u)$. $\underline{1 - F_{\frac{T}{2}}(u) = F_{\frac{T}{2}}(-u)}$.

Ainsi $P(W_n \geq u_n) > F_{\frac{T}{2}}(-z-\alpha) - \frac{\varepsilon}{2} = F_{\frac{T}{2}}(t-\alpha) - \frac{\varepsilon}{2}$.

Et $P(W_n \leq u_n) < F_{\frac{T}{2}}(-z+\alpha) + \frac{\varepsilon}{2} = F_{\frac{T}{2}}(t+\alpha) + \frac{\varepsilon}{2}$.

En utilisant (A) on obtient alors :

$P(W_n \geq u_n) > F_{\frac{T}{2}}(t-\alpha) - \frac{\varepsilon}{2} > F_{\frac{T}{2}}(t) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = F_{\frac{T}{2}}(t) - \varepsilon$ et

$P(W_n \leq u_n) < F_{\frac{T}{2}}(t+\alpha) + \frac{\varepsilon}{2} < F_{\frac{T}{2}}(t) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = F_{\frac{T}{2}}(t) + \varepsilon$.

donc $F_{\frac{T}{2}}(t) - \varepsilon < P(W_n \geq u_n) < F_{\frac{T}{2}}(t) + \varepsilon$ ou :

$|P(W_n \geq u_n) - L| = |P(W_n \geq u_n) - F_{\frac{T}{2}}(t)| < \varepsilon$. Nous avons donc montré que :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0 \Rightarrow |P(W_n \geq u_n) - L| < \varepsilon$. $\lim_{n \to +\infty} P(W_n \geq u_n) = L$.

Soit encore $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} P(W_n \geqslant u_n) = F_{\frac{T}{2}}(t) = F_{\frac{T}{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\right) = P\left(\frac{T}{2} \leqslant \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\right)$. Donc :

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} P(W_n \geqslant u_n) = P\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, T \leqslant x\right)$ et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}$.

c) Soit x dans $\mathbb{R}$.

$P(\sqrt{n}\,(Y_{k(n)}-\pi) \leqslant x) = P(W_n \geqslant u_n)$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} P(\sqrt{n}\,(Y_{k(n)}-\pi) \leqslant x) = P\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, T \leqslant x\right)$. Ce qui donne :

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} P\left(\sqrt{\frac{2n}{\pi}}\,(Y_{k(n)}-\pi) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x\right) = P\left(T \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x\right)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\mapsto+\infty} P\left(\sqrt{\frac{2n}{\pi}}\,(Y_{k(n)}-\pi) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x\right) = P\left(T \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x\right)$.

Comme $x \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$:

$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\mapsto+\infty} P\left(\sqrt{\frac{2n}{\pi}}\,(Y_{k(n)}-\pi) \leqslant x\right) = P(T \leqslant x)$.

Alors $\left(\sqrt{\frac{2n}{\pi}}\,(Y_{k(n)}-\pi)\right)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers T donc vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Q14 a) $k(n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1 = \lfloor \frac{2\ell}{2} \rfloor + 1 = \ell + 1$. $k(n) = \ell + 1$.

b) D'après Q8 a) $E(Y_{\ell+1}) = \theta$.

Ainsi $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} E(Y_{k(n)}) = \theta$.

Il est sans doute préférable d'écrire $\lim\limits_{r\mapsto+\infty} E(Y_{k(2r+1)}) = \theta$.

c) X possède un moment d'ordre 2. Alors pour tout k dans $[\![1,n]\!]$ Y_k possède un moment d'ordre 2 donc une variance.

En particulier $Y_{k(n)}$ possède une variance.

$$V(Y_{k(n)}) = E\left((Y_{k(n)} - E(Y_{k(n)}))^2\right) = E\left((Y_{k(n)} - \theta)^2\right) = E\left((Y_{k(n)} - \theta)^2\right).$$

Alors $E\left(\left(\sqrt{\frac{2n}{\pi}}\,(Y_{k(n)} - \theta)\right)^2\right)$ existe et vaut $\frac{2n}{\pi} V(Y_{k(n)})$.

Il est admis que $\lim\limits_{n \to +\infty} E\left(\left(\sqrt{\frac{2n}{\pi}}\,(Y_{k(n)} - \theta)\right)^2\right) = E(T^2) \underset{\uparrow}{=} 1$

$T \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ donc $V(T) = 1$ et $E(T) = 0$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2n}{\pi} V(Y_{k(n)})\right) = 1$.

donc $V(Y_{k(n)}) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$ ou $V(Y_{k(2r+1)}) \underset{r \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(2r+1)} \underset{r \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{4r}$.

d) • $E(Y_{k(n)}) = \theta$ et $Y_{k(n)}$ possède une variance donc $Y_{k(n)} \in \mathcal{E}_\theta$

• $Y_{k(n)} \in \mathcal{E}_\theta$ donc $\operatorname{cov}(\overline{X}_n, Y_{k(n)} - \overline{X}_n) = 0$.

Alors $\operatorname{cov}(\overline{X}_n, Y_{k(n)}) = \operatorname{cov}(\overline{X}_n, \overline{X}_n) = V(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}$.

$$\text{Alors } \rho_n \overset{(*)}{=} \frac{\operatorname{cov}(\overline{X}_n, Y_{k(n)})}{\sqrt{V(\overline{X}_n)}\sqrt{V(Y_{k(n)})}} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}\sqrt{V(Y_{k(n)})}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{V(Y_{k(n)})}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

Alors $\rho_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. $\lim\limits_{n \to +\infty} \rho_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ... ou $\lim\limits_{r \to +\infty} \rho_{2r+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(*) ρ_n existe car $\overline{X}_n$ et $Y_{k(n)}$ possèdent des variances non nulles ($V(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}$ et $V(Y_{k(n)}) \geqslant \frac{1}{n}$ car $Y_{k(n)} \in \mathcal{E}_\theta$).