HEC 2011 S 1150

Sujet S 1150 - Exercice

Les variables aléatoires de cet exercice sont toutes définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Soit λ un réel strictement positif donné et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles à valeurs dans $\{-1, 1\}$ de même loi définie par :

$$\mathbb{P}(X_0 = 1) = \frac{1}{\lambda+1}.$$

1) Question de cours : Enoncer le théorème de l'espérance totale.
2) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les moments d'ordre 1 et 2 de la variable aléatoire X_n.
3) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire

$$U = X_0X_3 - X_1X_2.$$

4) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $Y_n = \prod_{i=0}^{n} X_i$.
   a) Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$ en fonction de λ et de n. En déduire la loi de Y_n.
   b) Etudier la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5) Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les variables aléatoires $T, X_0, .., X_n$ sont mutuellement indépendantes.
   Soit $V = \prod_{i=0}^{T} X_i$ l'application définie sur Ω par : $\forall \omega \in \Omega, \quad V(\omega) = \prod_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega)$.
   a) En admettant que V est une variable aléatoire, déterminer pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant l'événement $(T = n)$.
   b) En déduire l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(V / [T = n])$.
   c) Montrer que $\mathbb{E}(V) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \exp\left(-\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)$.
6) Quelle est la loi de la variable aléatoire $S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$?

Sujet S 1150 - Exercice sans préparation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré $\leqslant n$.

1) Montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ unique tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \; P_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}.$$

2) Décomposer P_n en un produit de polynômes de degré 1.

Q1 X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements de cet espace probabilisé.

$I' = \{i \in I \mid P(A_i) \neq 0\}$.

X possède une espérance si et seulement si $\begin{cases} 1°\ \text{Pour tout } i \in I',\ E(|X| \mid A_i) \text{ existe} \\ 2°\ \sum_{i\in I'} E(|X| \mid A_i)\, P(A_i) \text{ existe} \end{cases}$

En cas d'existence : $E(X) = \sum_{i\in I'} E(X \mid A_i)\, P(A_i)$

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}$. X_n est une variable aléatoire finie donc X_n possède un moment d'ordre 1 et un moment d'ordre 2.

$m_1(X_n) = E(X_n) = P(X_0=1) - P(X_0=-1) = \frac{1}{\lambda+1} - \left(1 - \frac{1}{\lambda+1}\right) = \frac{2}{\lambda+1} - 1 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$.

$m_2(X_n) = E(X_n^2) = P(X_0=1) + P(X_0=-1) = 1$. Normal, $X_n^2 = 1$!!

$m_1(X_n) = E(X_n) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ et $m_2(X_n) = 1$.

Q3 X_0 et X_3 possèdent une espérance et sont indépendantes donc $E(X_0X_3)$ existe et vaut $E(X_0)E(X_3)$ donc $(E(X_0))^2$.

De même $E(X_1X_2)$ existe et vaut $(E(X_0))^2$. Alors U possède une espérance qui vaut $E(X_0X_3) - E(X_1X_2)$ donc 0.

$E(U) = 0$.

X_0, X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes donc X_0X_3 et $-X_1X_2$ sont indépendantes.

X_0X_3 et $-X_1X_2$ étant des variables aléatoires finies elles possèdent une variance.

Par somme U possède une variance qui vaut $V(X_0X_3) + V(-X_1X_2)$ car X_0X_3 et $-X_1X_2$ sont indépendantes.

$V(U) = V(X_0X_3) + V(-X_1X_2) = V(X_0X_3) + V(X_1X_2)$.

$V(X_0X_3) = E((X_0X_3)^2) - (E(X_0X_3))^2 = E(X_0^2X_3^2) - (E(X_0)E(X_3))^2$.

X_0^2 et X_3^2 sont indépendantes et possèdent une espérance donc $E(X_0^2X_3^2) = E(X_0^2)E(X_3^2)$.

Alors $V(X_0X_3) = E(X_0^2)E(X_3^2) - (E(X_0)E(X_3))^2 = (E(X_0^2))^2 - (E(X_0))^4 = 1 - \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^4$.

De même $V(X_1 X_2) = 1 - \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^4$.

Alors $\underline{V(U) = 2\left(1 - \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^4\right)}$.

Q4 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Y_n prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$.

$X_0, X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et possèdent une espérance qui vaut $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$.

Alors $E(Y_n)$ possède une espérance qui vaut $\prod_{i=0}^{n} E(X_i)$ ou $\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1}$.

$\underline{\forall n \in \mathbb{N},\quad E(Y_n) = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\alpha_n = P(Y_n = 1)$. $P(Y_n = -1) = 1 - \alpha_n$.

Alors $\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1} = E(Y_n) = \alpha_n - (1-\alpha_n) = 2\alpha_n - 1$. $\alpha_n = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1}\right]$ et

$1 - \alpha_n = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1}\right]$.

$\underline{Y_n(\Omega) = \{-1, 1\},\ P(Y_n = 1) = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1}\right] \text{ et } P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1}\right]}$.

b) $1 - \frac{1-\lambda}{1+\lambda} = \frac{2\lambda}{1+\lambda} > 0$. $\frac{1-\lambda}{1+\lambda} + 1 = \frac{2}{1+\lambda} > 0$. Alors $-1 < \frac{1-\lambda}{1+\lambda} < 1$

donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1} = 0$. Ainsi $\lim_{n \to +\infty} P(Y_n = 1) = \lim_{n \to +\infty} P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$.

<u>La suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.</u>

Q5 a) Notons que V prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. $P(T = n) \neq 0$. Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$

$P_{\{T=n\}}(V = \varepsilon) = \frac{1}{P(T=n)} P\left(\{T = n\} \cap \left\{\prod_{\ell=0}^{n} X_\ell = \varepsilon\right\}\right) = \frac{1}{P(T=n)} P\left(\{T=n\} \cap \left\{\prod_{\ell=0}^{n} X_\ell = \varepsilon\right\}\right)$.

$X_0, X_1, \dots, X_n, T$ sont indépendantes donc $\prod_{\ell=0}^{n} X_\ell$ et T sont indépendantes.

Alors $P_{\{T=n\}}(V = \varepsilon) = \frac{1}{P(T=n)} P(T=n)\, P\left(\prod_{\ell=0}^{n} X_\ell = \varepsilon\right) = P(Y_n = \varepsilon)$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, la loi de V sachant l'événement $\{T=n\}$ est la loi de Y_n.

b) $\forall n\in\mathbb{N},\ E(V \mid \{T=n\}) = E(Y_n) = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1}$.

c) • $(\{T=n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

• $\forall n\in\mathbb{N},\quad P(T=n) = \frac{e^{-1}}{n!} \neq 0.$

• $E(|V| \mid \{T=n\}) = E(V \mid \{T=n\})$ existe et vaut $\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

• $\forall n\in\mathbb{N},\quad E(|V| \mid \{T=n\})\, P(T=n) = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right) e^{-1}\left(\frac{1}{n!}\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n}\right)$ et la

série de terme général $\frac{1}{n!}\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n}$ converge.

Alors la série de terme général $E(|V| \mid \{T=n\})\, P(T=n)$ converge.

donc 1) $E(V)$ existe

2) $E(V) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(V \mid \{T=n\}) P(T=n) = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right) e^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n}\right) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} e^{-1} e^{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}.$

$E(V) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} e^{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}-1} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\, e^{-\frac{2\lambda}{1+\lambda}}.$

V possède une espérance qui vaut $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\, e^{-\frac{2\lambda}{1+\lambda}}$.

Q6 Soit $n\in\mathbb{N}$. Posons pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, $Z_i = \frac{1}{2}(X_i+1)$

$\forall i\in[\![0,n]\!],\ Z_i(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(Z_i=1) = P(X_i=1) = \frac{1}{1+\lambda}$.

Donc Z_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{1+\lambda}$ pour tout $i\in[\![0,n]\!]$.

$X_0, X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes donc $Z_0, Z_1, \dots, Z_n$ le sont aussi.

Le cours indique alors que $\hat{S}_n = \sum_{i=0}^{n} Z_i$ suit la loi binomiale de paramètres $n+1$ et $\frac{1}{1+\lambda}$.

$\hat{S}_n(\Omega) = [\![0,n+1]\!]$ et $\forall k\in[\![0,n+1]\!],\ P(\hat{S}_n = k) = \binom{n+1}{k}\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{k}\left(1-\frac{1}{1+\lambda}\right)^{n+1-k}.$

Notons que $S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i = \sum_{i=0}^{n}(2Z_i-1) = 2\hat{S}_n - (n+1)$.

Alors $S_n(\Omega) = \{2k-(n+1) ;\ k\in[\![0,n+1]\!]\}$ et $\forall k\in[\![0,n+1]\!],\ P(S_n = 2k-(n+1)) = \binom{n+1}{k}\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{k}\left(1-\frac{1}{1+\lambda}\right)^{n+1-k}.$

R.

Question 1 HEC 2011 S 1150

n appartient à $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

Q1. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de $\mathbb{R}_n[X]$ et un seul tel que $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_n\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}\cdot$

Q2. Décomposer P_n comme un produit de polynômes de degré 1 lorsque $n \geqslant 1$.

Cours *Énoncer le théorème de l'espérance totale.*

(Q1) Remarquons que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right) = z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}} + z^n + \frac{1}{z^n}\cdot$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}} = \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$.

Ceci suggère une preuve par récurrence au moins pour l'existence.

Montrons par récurrence "d'ordre 2" que, pour tout n dans $\mathbb{N}$ il existe un élément P_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ z^n + \frac{1}{z^n} = P_n\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

* . Posons $P_0 = 2$. $P_0 \in \mathbb{R}_0[X]$ et $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_0\left(z+\frac{1}{z}\right) = 2 = z^0 + \frac{1}{z^0}\cdot$

. Posons $P_1 = X$. $P_1 \in \mathbb{R}_1[X]$ et $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_1\left(z+\frac{1}{z}\right) = z + \frac{1}{z}\cdot$

Ainsi la propriété est vraie pour $n=0$ et $n=1$

* Supposons la propriété vraie pour n et $n+1$ avec n dans $\mathbb{N}$.

$\exists P_n \in \mathbb{R}_n[X],\ \exists P_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X],\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ z^n+\frac{1}{z^n} = P_n\left(z+\frac{1}{z}\right)$ et $z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}} = P_{n+1}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

Alors $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}} = \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n+\frac{1}{z^n}\right) = \left(z+\frac{1}{z}\right)P_{n+1}\left(z+\frac{1}{z}\right) - P_n\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

<u>Posons</u> $P_{n+2} = X P_{n+1} + P_n$.

Alors $P_{n+2} \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$ car $P_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$.

De plus $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}} = \left(z+\frac{1}{z}\right)P_{n+1}\left(z+\frac{1}{z}\right) - P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = P_{n+2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

Ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}\cdot$

Montrons l'unicité de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un second élément Q_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que

$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ Q_n(z+\frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.

Alors $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ (P_n - Q_n)(z+\frac{1}{z}) = P_n(z+\frac{1}{z}) - Q_n(z+\frac{1}{z}) = 0$.

En particulier $\forall x \in [1,+\infty[,\ (P_n - Q_n)(x+\frac{1}{x}) = 0$.

Posons $\forall x \in [1,+\infty[,\ \varphi(x) = x + \frac{1}{x}$. φ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et

$\forall x \in [1,+\infty[,\ \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$. $\varphi'(1)=0$ et $\forall x \in]1,+\infty[,\ \varphi'(x) > 0$. Alors :

φ est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

φ est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, φ est continue sur $[1,+\infty[$, $\varphi(1) = 2$ et

$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$. Alors φ définit une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[2,+\infty[$.

Ainsi $\varphi([1,+\infty[) = [2,+\infty[$.

$\forall x \in [1,+\infty[,\ (P_n - Q_n)(\varphi(x)) = (P_n - Q_n)(x+\frac{1}{x}) = 0$.

Alors $\forall y \in [2,+\infty[,\ (P_n - Q_n)(y) = 0$.

$P_n - Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P_n - Q_n$ admet une infinité de racines.

Alors $P_n - Q_n$ est le polynôme nul. $Q_n = P_n$.

Donc $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists!\ P_n \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_n(z+\frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}}}$.

Q2 Pour tout n dans $\mathbb{N}$ notons α_n le coefficient de X^n dans P_n.

$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

le coefficient de X^{n+2} dans P_{n+2} est α_{n+2}

" " " " XP_{n+1} est α_{n+1}

" " " " P_n est 0

Alors $\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$. Donc la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est constante.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \alpha_1$ et $\alpha_1 = 1$ car $P_1 = X$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = 1$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, le coefficient de X^n dans P_n est 1.

Ainsi pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, P_n est unitaire et de degré n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\theta \in [0, \pi]$.

$P_n(2\cos\theta) = P_n(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = P_n\left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right) = (e^{i\theta})^n + \frac{1}{(e^{i\theta})^n} = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$.

$P_n(2\cos\theta) = 0 \iff 2\cos n\theta = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$P_n(2\cos\theta) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{2n} \underset{\theta \in [0,\pi]}{\iff} \exists k \in [\![0, n-1]\!], \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{2n}$.

Posons $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\theta_k = \frac{\pi + 2k\pi}{2n}$ et $x_k = 2\cos\theta_k$.

Alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $P_n(x_k) = P_n(2\cos\theta_k) = 0$.

$0 < \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{n-1} < \pi$ et $\cos$ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

Alors $2\cos\theta_0 > \cos\theta_1 > \dots > \cos\theta_{n-1}$ donc $x_0 > x_1 > \dots > x_{n-1}$. $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ sont donc n zéros distincts de P_n.

Comme $\deg P_n = n$, $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ sont LES zéros de P_n.

$\prod_{k=0}^{n-1}(X - x_k)$ divise P_n et ces deux polynômes sont de degré n.

Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $P_n = \lambda \prod_{k=0}^{n-1}(X - x_k)$. Comme P_n est unitaire : $P_n = \prod_{k=0}^{n-1}(X - x_k)$

Ainsi $P_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)\right)$ et ceci pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Remarque.. $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$, $P_3 = X^3 - 3X = X(X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})$,

$P_4 = X^4 - 4X^2 + 2 = (X - 2\cos\frac{\pi}{8})(X + 2\cos\frac{\pi}{8})(X - 2\cos\frac{3\pi}{8})(X + 2\cos\frac{3\pi}{8})$.

$P_4 = X^4 - 4X^2 + 2 = (X - \sqrt{2+\sqrt{2}})(X + \sqrt{2+\sqrt{2}})(X - \sqrt{2-\sqrt{2}})(X + \sqrt{2-\sqrt{2}})$.