Sujet S 1155 - Exercice

1) Question de cours : Rappeler la définition d'un espace vectoriel euclidien.
2) On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.

   Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant comme matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   a) Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R}^3,\ \left\|f(u)\right\| \leqslant \|u\|$.
   b) Vérifier que f est un projecteur.
   c) Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sans calcul.
   Montrer que $\operatorname{Ker} f = \left(\operatorname{Im} f\right)^{\perp}$.
3) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, et p un projecteur de E.
   a) Montrer que si $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont orthogonaux, alors : $\forall u \in E,\ \left\|p(u)\right\| \leqslant \|u\|$.
   b) Montrer que si $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ ne sont pas orthogonaux, alors : $\exists u \in E,\ \left\|p(u)\right\| > \|u\|$.
   c) Montrer qu'un projecteur p non nul est une projection orthogonale si et seulement si :

$$\sup_{u \neq 0} \frac{\left\|p(u)\right\|}{\|u\|} = 1.$$

Sujet S 1155 - Exercice sans préparation

Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de même loi et admettant un moment d'ordre 2.
On suppose que l'espérance $\theta = \mathbb{E}(X_1)$ est non nulle et inconnue.
Trouver l'estimateur sans biais de l'espérance $\theta = \mathbb{E}(X_1)$ qui soit de variance minimale dans l'ensemble des estimateurs sans biais de la forme $\tilde{\theta}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \quad \left((a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n\right)$.

Q1 On appelle espace vectoriel euclidien tout couple $(E, <\cdot,\cdot>)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et $<\cdot,\cdot>$ un produit scalaire sur E.

Q1 Nous notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a) Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3$. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\|f(u)\|^2 \underset{\uparrow}{=} \|AX\|^2 = \left\| \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{9}\left[(x+y+z)^2 + (x+y+z)^2 + (x+y+z)^2\right] = \frac{1}{3}(x+y+z)^2.$$

(e_1, e_2, e_3) est orthonormée

$$\|f(u)\|^2 = \frac{1}{3}(1\times x + 1\times y + 1\times z)^2 \leq \frac{1}{3}(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2) = x^2+y^2+z^2 = \|u\|^2$$

↑ Cauchy-Schwarz

Alors $\|f(u)\| \leq \|u\|$ car $\|f(u)\| \geq 0$ et $\|u\| \geq 0$

$\forall u \in \mathbb{R}^3,\ \|f(u)\| \leq \|u\|.$

b) $$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1&1&1\\1&1&1\\1&1&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&1&1\\1&1&1\\1&1&1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3&3&3\\3&3&3\\3&3&3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1&1&1\\1&1&1\\1&1&1 \end{pmatrix} = A.$$

Alors $f^2 = f$. Comme f est linéaire : f est un projecteur.

c) $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}^3) = f(\operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3)) = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \operatorname{Vect}\left(\frac{1}{3}(e_1+e_2+e_3)\right) = \operatorname{Vect}(e_1+e_2+e_3)$

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1+e_2+e_3).$

Notons que $\dim \operatorname{Im} f = 1$ alors $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.

$f(e_1) = f(e_2)$ et $f(e_2) = f(e_3)$. Alors $f(e_1 - e_2) = 0_E$ et $f(e_2 - e_3) = 0_E$.

Ainsi $(e_1 - e_2, e_2 - e_3)$ est une famille clairement libre de $\operatorname{Ker} f$ qui est de dimension 2.

Donc $(e_1 - e_2, e_2 - e_3)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.

Comme f est un projecteur : $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.

De plus $<e_1+e_2+e_3, e_1 - e_2> = 1-1 = 0$ et $<e_1+e_2+e_3, e_2 - e_3> = 1-1 = 0$.

Ceci suffit pour dire que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont orthogonaux.

Alors $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^\perp$. f est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} f$.

Q3 a) $E = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont orthogonaux.

Soit $u \in E$. $\exists!\, (u_1, u_2) \in \mathrm{Ker}\, p \times \mathrm{Im}\, p$, $u = u_1 + u_2$. $u_2 = p(u)$

u_1 et u_2 sont orthogonaux donc $\|u_1+u_2\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 \geq \|u_2\|^2$.

Donc $\|u\|^2 \geq \|p(u)\|^2$. Comme $\|u\| \geq 0$ et $\|p(u)\| \geq 0$: $\|u\| \geq \|p(u)\|$.

$\forall u \in E, \ \|p(u)\| \leq \|u\|$.

b) Supposons que $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ ne sont pas orthogonaux.

$\exists (v, w) \in \mathrm{Ker}\, p \times \mathrm{Im}\, p$, $\langle v, w \rangle \neq 0$. Supposons que $\forall u \in E$, $\|p(u)\| \leq \|u\|$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $p(w + \lambda v) = w$ car $w \in \mathrm{Im}\, p$ et $\lambda v \in \mathrm{Ker}\, p$.

$\|w\|^2 = \|p(w+\lambda v)\|^2 \leq \|w + \lambda v\|^2 = \|w\|^2 + 2\lambda \langle w, v\rangle + \lambda^2\|v\|^2$.

Ainsi $0 \leq 2\lambda\langle w, v\rangle + \lambda^2 \|v\|^2 = \lambda\left[2\langle w, v\rangle + \lambda \|v\|^2\right]$.

Alors $\forall \lambda \in]0, +\infty[$, $0 \leq 2\langle w, v\rangle + \lambda\|v\|^2$ ① et $\forall \lambda \in]-\infty, 0[$, $0 \geq 2\langle w, v\rangle + \lambda \|v\|^2$ ②.

En faisant tendre λ vers 0 par valeurs supérieures (resp. inférieures) dans ① (resp. ②) il vient : $2\langle w, v\rangle \geq 0$ (resp. $2\langle w, v\rangle \leq 0$).

Ainsi $2\langle w, v\rangle = 0$. Donc $\langle v, w\rangle = 0$. Cela contredit l'hypothèse $\langle v, w\rangle \neq 0$.

Alors $\exists u \in E$, $\|p(u)\| > \|u\|$.

c) Soit p un projecteur non nul. Posons $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}\, p$. $E = F \oplus G$.

F n'est pas réduit à $\{0_E\}$ car dans le cas contraire $G = E$ donc $\mathrm{Ker}\, p = E$ et $p = 0_{\mathcal{L}(E)}$!

Alors $\exists u_0 \in F - \{0_E\}$. Alors $u_0 \neq 0_E$ et $p(u_0) = u_0$. Alors $\dfrac{\|p(u_0)\|}{\|u_0\|} = 1$.

- Supposons que p soit une projection orthogonale. $\forall u \in E$, $\|p(u)\| \leq \|u\|$.

$\forall u \in E - \{0_E\}$, $\dfrac{\|p(u)\|}{\|u\|} \leq 1 = \dfrac{\|p(u_0)\|}{\|u_0\|}$. Alors $\displaystyle\sup_{u \neq 0_E} \frac{\|p(u)\|}{\|u\|} = \max_{u\neq 0_E} \frac{\|p(u)\|}{\|u\|} = 1$.

- Supposons que $\displaystyle\sup_{u\neq 0_E} \frac{\|p(u)\|}{\|u\|} = 1$. Alors $\forall u \in E - \{0_E\}$, $\|p(u)\| \leq \|u\|$.

mieux : $\forall u \in E$, $\|p(u)\| \leq \|u\|$. Alors p est une projection orthogonale.

Question 3 HEC 2011 S 1155

Soient X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi et admettant un moment d'ordre 2.

On suppose que l'espérance $\theta = E(X_1)$ est non nulle et inconnue.

Trouver l'estimateur sans biais de l'espérance $\theta = E(X_1)$, qui soit de variance minimale dans l'ensemble des estimateurs de la forme $\tilde{\theta_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \quad ((a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n)$.

Cours *Rappel de la définition d'un espace vectoriel euclidien*

Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Posons $T_n = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E(X_i)$ existe et vaut θ.

Alors $E(T_n)$ existe et vaut $\sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$ donc $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\theta$

Alors T_n est un estimateur sans biais de θ si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ car $\theta \neq 0$

Posons $\sigma^2 = V(X_1)$ ($V(X_1)$ existe car X_1 possède un moment d'ordre 2.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et possèdent une variance.

Alors $V(T_n)$ existe et $V(T_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2$.

1er cas. $\sigma^2 = 0$. $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $V\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = 0$!

Notons $\mathcal{S} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \; ; \; (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$.

Les estimateurs sans biais de θ, de variance minimale, appartenant à $\mathcal{S}$ sont les éléments $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ de $\mathcal{S}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

2e cas. $\sigma^2 \neq 0$

Le problème revient à trouver $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

1) $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$

2) $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\sigma^2$ soit minimal ce qui revient à $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ minimal.

On doit donc étudier $\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \\ \text{sc } \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \end{cases}$

* Posons $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$.

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

Posons $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $g(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i$. g est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

Posons $\mathcal{C} = \{A \in \mathbb{R}^n ; g(A) = 1\}$.

Il s'agit donc de trouver le minimum de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Posons $\mathcal{H} = \operatorname{Ker} g$. $\mathcal{H}^\perp = \operatorname{Vect}(\nabla g(x)) = \operatorname{Vect}((1, 1, \dots, 1))$.

x quelconque dans $\mathbb{R}^n$

* Soit $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

$\sum_{i=1}^{n} b_i = 1$ et $\nabla f(B) \in \mathcal{H}^\perp = \operatorname{Vect}(1, 1, \dots, 1)$. $\nabla f(B) = (2b_1, 2b_2, \dots, 2b_n)$.

Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $(2b_1, 2b_2, \dots, 2b_n) = \nabla f(B) = \lambda(1, 1, \dots, 1)$.

Donc $2b_1 = 2b_2 = \dots = 2b_n = \lambda$. $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

Alors $n b_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i = 1$. $b_1 = \frac{1}{n}$. Ainsi $B = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$.

* Posons $B = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$.

clairement $\underline{B \in \mathcal{C}}$. Soit $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathcal{C}$.

$$1^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} 1 \times a_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) = n f(A).$$

Cauchy-Schwarz.

Alors $f(A) \geq \frac{1}{n}$.

Mieux $f(A) \geq f(B)$.

Alors $\underline{\forall A \in \mathcal{C},\ f(A) \geq f(B)}$.

1) f atteint un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}$.

2) $B = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ est l'unique point de $\mathcal{C}$ qui réalise ce minimum.

Alors $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i$ est l'unique estimateur sans biais de θ de variance minimal parmi les estimateurs sans biais de θ du type $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$.

lorsque $\sigma^2 = V(X_1) \neq 0$.

Remarque.- On pouvait aller "beaucoup" plus vite pour traiter $\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \\ \text{sc } \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \end{cases}$

Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

$$1 = 1^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} 1 \times a_i\right)^2 \underset{\text{Cauchy-Schwarz dans } \mathbb{R}^n}{\overset{(*)}{\leq}} \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) = n \sum_{i=1}^{n} a_i^2 .$$ Ainsi $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \frac{1}{n}$.

Notons que $(*)$ devient égalité si et seulement si $((1,1,\dots,1),(a_1,a_2,\dots,a_n))$ est liée donc si et seulement si $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ non ? Notons aussi que $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ et $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ donne $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$.

Posons alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $b_i = \frac{1}{n}$. $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \sum \frac{1}{n^2} = n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$.

et $\sum_{i=1}^{n} b_i = 1$

et $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$.

Cela donne bien le résultat obtenu plus haut.