HEC 2011 S 101

Sujet S 101 - Exercice

Dans l'exercice toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs réelles. Lorsqu'elle existe, l'espérance d'une variable aléatoire X est notée $\mathbb{E}(X)$.

1) Dans cette question X est une variable aléatoire discrète ou à densité.
   a) Question de cours : Rappeler la définition de la fonction de répartition de X et en donner les principales propriétés.
   b) On appelle médiane de X tout réel m tel que : $\mathbb{P}(X \geqslant m) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X \leqslant m) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
   Démontrer qu'un tel réel existe toujours, mais qu'il n'est pas forcément unique.

2) Dans cette question X est une variable aléatoire discrète ou à densité admettant un moment d'ordre 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \mathbb{E}((X-x)^2)$.

   a) Pour x réel, donner, en justifiant, l'expression de $f(x)$ en fonction de la variance $\mathbb{V}(X)$ de X, de $\mathbb{E}(X)$ et de x.

   b) Démontrer qu'il existe un unique réel x_0 en lequel la fonction f est minimale et déterminer x_0 et $f(x_0)$.

3) Dans cette question X est une variable aléatoire à densité et qui admet une espérance. On pose, pour x réel, $g(x) = \mathbb{E}(|X-x|)$ et $\varphi(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) - \mathbb{P}(X \geqslant x)$.

   a) Montrer que $x\mathbb{P}(X \geqslant x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Quel résultat analogue a-t-on au voisinage de $-\infty$?

   b) On suppose dans cette sous-question qu'il existe une densité de X qui est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout x réel,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathbb{P}(X \leqslant t)\, dt + \int_{x}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant t)\, dt \quad (1).$$

   Dans la suite de l'exercice, on admettra que la formule (1) reste valable même si aucune des densités de X n'est continue sur $\mathbb{R}$.

   c) Déterminer, pour a, b réels, une expression de $g(b) - g(a)$ sous la forme d'une intégrale faisant intervenir la fonction φ.
   En déduire que si m est une médiane de X, g est minimale en m.

4) a) Soit a un réel strictement positif. On note h la fonction de la variable réelle définie par :

$$h(x) = \int_{0}^{+\infty} |t-x|\, e^{-at}\, dt.$$

   Déterminer le minimum de h et préciser un réel en lequel ce minimum est atteint.

   b) Répondre aux mêmes questions pour la fonction k définie par $k(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{|t-x|}{1+t^2}\, dt.$

Sujet S 101 - Exercice sans préparation

Dans cet exercice E désigne un espace vectoriel et p, n sont deux entiers strictement positifs.

1) Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E et x un vecteur de E.
Caractériser, en le justifiant, le fait que la famille $(e_1, \ldots, e_p, x)$ soit liée.

2) Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E supposés non tous nuls. On note

$$\mathscr{A} = \left\{ \mathrm{J} \subset [\![1, n]\!],\ (x_i)_{i \in \mathrm{J}} \text{ libre} \right\}$$

Soit J_0 un élément de $\mathscr{A}$ de cardinal maximal.
Que peut-on dire de $(x_i)_{i \in \mathrm{J}_0}$ vis-à-vis de $\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots x_n)$?

3) Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E et r le rang de cette famille.
On en extrait une famille de n' vecteurs et on note r' le rang de cette famille extraite.
Montrer que $n - r \geqslant n' - r'$.

HEC 2011 S101 Correction de l'exercice

(Q1) a) X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

La fonction de répartition de X est l'application F_X de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leq x)$.

- P1 F_X est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$
- P2 F_X est croissante
- P3 $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} F_X(x) = 1$
- P4 F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

▼ <u>Remarques</u> 1.. P1 est contenue dans "P2 ∪ P3".

2.. P1, P2, P3 et P4 caractérisent les fonctions de répartition des variables aléatoires réelles. P2, P3 et P4 également... ▲

- P5 $\forall a \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x \mapsto a^-} F_X(x) = P(X<a) = F_X(a) - P(X=a)$. ← nous sera utile dans Q2.

b) Posons $A = \{x \in \mathbb{R} \mid P(X \leq x) \geq \frac{1}{2}\}$. Nous allons montrer que A possède une borne inférieure et que cette borne inférieure est une médiane de X. F_X désigne la fonction de répartition de X.

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid P(X \leq x) \geq \frac{1}{2}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq \frac{1}{2}\}$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} F_X(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} F_X(x) = 0$.

Alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists B \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > B \Rightarrow |F_X(x) - 1| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists B' \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x < -B' \Rightarrow |F_X(x) - 0| < \varepsilon$.

En particulier $\exists B \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > B \Rightarrow |F_X(x) - 1| < \frac{1}{2}$.

$\exists B' \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x < -B' \Rightarrow |F_X(x)| < \frac{1}{2}$.

Posons $x_1 = A+1$ et $x_2 = -B-1$. $x_1 > A$ et $x_2 < -B$ donc $|F_X(x_1) - 1| < \frac{1}{2}$ et $|F_X(x_2)| < \frac{1}{2}$.

Alors $-\frac{1}{2} < F_X(x_1) - 1 < \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2} < F_X(x_2) < \frac{1}{2}$. $F_X(x_1) > \frac{1}{2}$ et $F_X(x_2) < \frac{1}{2}$; $F_X(x_1) \geq \frac{1}{2}$ et $F_X(x_2) < \frac{1}{2}$.

Alors $x_1 \in A$ et $x_2 \notin A$.

<u>A est une partie non vide de $\mathbb{R}$</u>. Montrons qu'elle est minorée par x_2

Soit $x \in A$. $F(x_2) < \frac{1}{2} \leq F(x)$. Alors $F(x_2) < F(x)$. Comme F_X est croissante, $x_2 < x$ (en effet $x_2 \geq x$ donne $F(x_2) \geq F(x)$). $\forall x \in A$, $x_2 < x$. A est minorée par x_2.

Alors A est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ donc A possède une borne inférieure α.

Soit x un élément de $]\alpha, +\infty[$. x ne minore pas A car α est le plus grand minorant de A. Alors il existe un élément x' appartenant à A tel que $x' < x$.

Alors $\underbrace{\frac{1}{2} \leq}_{x' \in A} F_X(x') \underbrace{\leq}_{F_X \text{ est croissante}} F_X(x)$. donc $x \in A$. Finalement $]\alpha, +\infty[\subset A$.

$\forall x \in]\alpha, +\infty[$, $\frac{1}{2} \leq F_X(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha^+} F_X(x) = F_X(\alpha)$ car F_X est continue à droite en α.

Alors $\frac{1}{2} \leq \lim\limits_{x \to \alpha^+} F_X(x) = F_X(\alpha)$. Ainsi $\alpha \in A$. Retenons que $P(X \leq \alpha) \geq \frac{1}{2}$ et montrons que $P(X \geq \alpha) \geq \frac{1}{2}$.

$\forall x \in]-\infty, \alpha[$, $x \notin A$ donc $\forall x \in]-\infty, \alpha[$, $F_X(x) < \frac{1}{2}$. De plus $\lim\limits_{x \to \alpha^-} F_X(x) \overset{\text{P5 de Q1}}{=} P(X < \alpha)$.

Alors $P(X < \alpha) = \lim\limits_{x \to \alpha^-} F_X(x) \leq \frac{1}{2}$. donc $1 - P(X \geq \alpha) \leq \frac{1}{2}$. Ainsi $P(X \geq \alpha) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Finalement : $P(X \leq \alpha) \geq \frac{1}{2}$ et $P(X \geq \alpha) \geq \frac{1}{2}$. α est une médiane de X.

X possède au moins une médiane.

Supposons que X suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \in]-\infty, 0[$: $P(X \leq x) = 0$ et $P(X \geq x) = 1$.
- Si $x \in]0, 1[$: $P(X \leq x) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$ et $P(X \geq x) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$.
- Si $x \in]1, +\infty[$: $P(X \leq x) = 1$ et $P(X \geq x) = 0$.
- Si $x = 0$: $P(X \leq x) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$ et $P(X \geq x) = 1$.
- Si $x = 1$: $P(X \leq x) = 1$ et $P(X \geq x) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

Alors $\left(P(X \leq x) \geq \frac{1}{2} \text{ et } P(X \geq x) \geq \frac{1}{2}\right) \iff x \in [0, 1]$.

L'ensemble des médianes de X est $[0, 1]$. X possède une infinité de médianes.

X possède toujours une médiane qui n'est pas nécessairement unique.

Exercice. Q1 Montrer que l'ensemble m_X des médianes de X est un segment de $\mathbb{R}$.

Q2. Montrer que si X est une variable aléatoire à densité,

$m_X = \{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) = \frac{1}{2}\}$.

Q3 Déterminer m_X lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. (resp. $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$; resp. $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$).

(Q2) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. X possède un moment d'ordre 2 donc X possède une espérance.
$(X-x)^2 = X^2 - 2xX + x^2$. $(X-x)^2$ est alors combinaison linéaire de trois variables aléatoires qui ont une espérance. Alors :

1) $(X-x)^2$ possède une espérance

2) $E((X-x)^2) = E(X^2) - 2xE(X) + x^2 = E(X^2) - (E(X))^2 + (E(X))^2 - 2xE(X) + x^2 = V(X) + (E(X)-x)^2$

Ainsi $f : x \mapsto E((X-x)^2)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = V(X) + (E(X)-x)^2$.

b) Posons $x_0 = E(X)$. $\forall x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$, $f(x) = V(X) + (E(X)-x)^2 > V(X) = f(x_0)$.

$(E(X)-x)^2 > 0$ car $x \neq x_0 = E(X)$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$, $f(x) > f(x_0)$ et $f(x_0) = V(X)$.

Il existe un unique élément x_0 de $\mathbb{R}$ en lequel la fonction f est minimal. $x_0 = E(X)$ et $f(x_0) = V(X)$.

(Q3) Remarque.. dans la suite f_X est une densité de X définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u_x(t) = |t-x|$.

X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et u_x est continue sur $\mathbb{R}$. Alors $u_x(X)$ possède une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} u_x(t) f_X(t)\,dt$ est absolument convergente.

Or $\forall t \in \mathbb{R}$, $u_x(t) f_X(t) \geq 0$. Donc $u_x(X) = |X-x|$ possède une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} u_x(t) f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |t-x| f_X(t)\,dt$ converge.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $0 \leq |t-x| f_X(t) \leq [|t| + |x|] f_X(t) = |t| f_X(t) + |x| f_X(t)$.

$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq |t-x| f_X(t) \leq t f_X(t) + |x| f_X(t)$ (1)

$\forall t \in \mathbb{R}^-$, $0 \leq |t-x| f_X(t) \leq -t f_X(t) + |x| f_X(t)$ (2)

Or $\int_0^{+\infty} f_X(t)\,dt$, $\int_0^{+\infty} t f_X(t)\,dt$, $\int_{-\infty}^0 f_X(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^0 t f_X(t)\,dt$ convergent.

Alors $\int_0^{+\infty}(tf_X(t)+|x|f_X(t))dt$ et $\int_{-\infty}^0(-tf_X(t)+|x|f_X(t))dt$ convergent.

(1) et (2) et les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^{+\infty}|t-x|f_X(t)dt$ et $\int_{-\infty}^0|t-x|f_X(t)dt$ convergent. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty}|t-x|f_X(t)dt$ converge.

ce qui achève de montrer l'existence de $E(|X-x|)$.

<u>Pour tout réel x, $E(|X-x|)$ existe.</u> <u>g est définie sur $\mathbb{R}$.</u>

<u>a)</u> Soit $x\in\mathbb{R}$. $\begin{cases}\forall t\in[x,+\infty[, & t\geq x \text{ et } f_X(t)\geq 0\\ \forall t\in]-\infty,x], & t\leq x \text{ et } f_X(t)\geq 0\end{cases}$

$\forall t\in[x,+\infty[,\ tf_X(t)\geq xf_X(t)$ et $\forall t\in]-\infty,x],\ tf_X(t)\leq xf_X(t)$.

Alors $\int_x^{+\infty}tf_X(t)dt\geq x\int_x^{+\infty}f_X(t)dt=xP(X\geq x)$ et $\int_{-\infty}^x tf_X(t)dt\leq x\int_{-\infty}^x f_X(t)dt\leq xP(X\leq x)$.

(toutes les intégrales convergent car $E(X)$ existe).

Alors $\forall x\in[0,+\infty[,\ 0\leq xP(X\geq x)\leq\int_x^{+\infty}tf_X(t)dt$

et $\forall x\in]-\infty,0],\ \int_{-\infty}^x tf_X(t)dt\leq xP(X\leq x)\leq 0$.

De plus $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}tf_X(t)dt=\lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^x tf_X(t)dt$ comme reste d'intégrales convergentes.

Alors, par encadrement, il vient : <u>$\lim_{x\to+\infty}(xP(X\geq x))=\lim_{x\to-\infty}(xP(X\leq x))=0$.</u>

<u>b)</u> Nous supposons donc ici qu'il existe une densité $\hat{f}_X$, de X, continue sur $\mathbb{R}$.

Alors F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F'_X=\hat{f}_X$. <u>Soit $x\in\mathbb{R}$.</u>

Posons $\forall t\in\mathbb{R}$, $u(t)=t$, $v(t)=F_X(t)$ et $w(t)=1-F_X(t)$.

u,v,w sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t\in\mathbb{R}$, $u'(t)=1$, $v'(t)=\hat{f}_X(t)$ et $w'(t)=-\hat{f}_X(t)$.

ceci justifie les deux intégrations par parties suivantes. Soit $B\in\mathbb{R}$.

(3) $\int_B^x P(X\leq t)dt=\int_B^x F_X(t)dt=[tF_X(t)]_B^x-\int_B^x t\hat{f}_X(t)dt=xF_X(x)-BF_X(B)-\int_B^x t\hat{f}_X(t)dt$.

(4) $\int_x^B P(X\geq t)dt=\int_x^B(1-F_X(t))dt=[t(1-F_X(t))]_x^B-\int_x^B t(-\hat{f}_X(t))dt=B(1-F_X(B))-x(1-F_X(x))+\int_x^B t\hat{f}_X(t)dt$.

$\lim_{B\mapsto-\infty}(BF_X(B))=0$ et $\int_{-\infty}^{x} t\hat{f}_X(t)dt$ converge car $E(X)$ existe. Alors ③ permet de dire que :

1) $\int_{-\infty}^{x} P(X\leq t)dt$ existe

$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\hat{f}_X(t)dt.$

2) $\int_{-\infty}^{x} P(X\leq t)dt = xF_X(x)-\int_{-\infty}^{x} t\hat{f}_X(t)dt \overset{\downarrow}{=} \int_{-\infty}^{x}(x-t)\hat{f}_X(t)dt=\int_{-\infty}^{x}|x-t|\hat{f}_X(t)dt$.

$\lim_{B\mapsto+\infty}\left(B(1-F_X(B))\right)=\lim_{B\mapsto+\infty}(BP(X\geq B))=0$ et $\int_{x}^{+\infty} t\hat{f}_X(t)dt$ converge car $E(X)$ existe. Alors ④

donne : 1) $\int_{x}^{+\infty}P(X\geq t)dt$ existe

2) $\int_{x}^{+\infty}P(X\geq t)dt=-x\underbrace{(1-F_X(x))}_{P(X\geq x)}+\int_{x}^{+\infty}t\hat{f}_X(t)dt=-x\int_{x}^{+\infty}\hat{f}_X(t)dt+\int_{x}^{+\infty}t\hat{f}_X(t)dt=\int_{x}^{+\infty}(t-x)\hat{f}_X(t)dt=$

$\int_{x}^{+\infty}|t-x|\hat{f}_X(t)dt.$

Ainsi $\int_{-\infty}^{x}P(X\leq t)dt+\int_{x}^{+\infty}P(X\geq t)dt$ existe et vaut $\int_{-\infty}^{x}|t-x|\hat{f}_X(t)dt+\int_{x}^{+\infty}|t-x|\hat{f}_X(t)dt$ ou

encore $\int_{-\infty}^{+\infty}|t-x|\hat{f}_X(t)dt$. Alors $E(|X-x|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|t-x|\hat{f}_X(t)dt=\int_{-\infty}^{x}P(X\leq t)dt+\int_{x}^{+\infty}P(X\geq t)dt$.

Pour tout réel x : $g(x)=\int_{-\infty}^{x}P(X\leq t)dt+\int_{x}^{+\infty}P(X\geq t)dt.$

c) Soient a et b deux réels.

$g(b)-g(a)=\int_{-\infty}^{b}P(X\leq t)dt+\int_{b}^{+\infty}P(X\geq t)dt-\int_{-\infty}^{a}P(X\leq t)dt-\int_{a}^{+\infty}P(X\geq t)dt$.

$g(b)-g(a)=\int_{-\infty}^{a}P(X\leq t)dt+\int_{a}^{b}P(X\leq t)dt+\int_{b}^{a}P(X\geq t)dt+\int_{a}^{+\infty}P(X\geq t)dt-\int_{-\infty}^{a}P(X\leq t)dt-\int_{a}^{+\infty}P(X\geq t)dt$

$g(b)-g(a)=\int_{a}^{b}P(X\leq t)dt-\int_{a}^{b}P(X\geq t)dt=\int_{a}^{b}(P(X\leq t)-P(X\geq t))dt=\int_{a}^{b}\varphi(t)dt.$

$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ g(b)-g(a)=\int_{a}^{b}\varphi(t)dt$.

Soit m une médiane de X.

$P(X\geq t)=1-P(X<t)=1-P(X\leq t)=1-F_X(t)$

$\forall b\in\mathbb{R},\ g(b)-g(m)=\int_{m}^{b}\varphi(t)dt=\int_{m}^{b}[P(X\leq t)-P(X\geq t)]dt\overset{\downarrow}{=}\int_{m}^{b}(2F_X(t)-1)dt.$

Posons $\forall b\in\mathbb{R}$, $\psi(b) = g(b) - g(m) = \int_m^b (2F_X(t)-1)\,dt$. sur $\mathbb{R}$

$2F_X - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc ψ est la primitive de $2F_X-1$ qui prend la valeur 0 en m. Ainsi ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall b\in\mathbb{R}$, $\psi'(b) = 2F_X(b)-1$.

$P(X>m) = P(X\geq m)$

• Soit $b\in\,]-\infty, m]$. $2F_X(b) - 1 \leq 2F_X(m) - 1 = 2P(X\leq m) - 1 = 2[1-P(X>m)-\frac{1}{2}] = 2[\frac{1}{2}-P(X\geq m)] \leq 0$

F_X est croissante sur $\mathbb{R}$ — $P(X\geq m)\geq \frac{1}{2}$

• Soit $b\in[m,+\infty[$, $2F_X(b)-1 \geq 2F_X(m)-1 = 2P(X\leq m) - 1 \geq 2\times\frac{1}{2}-1 = 0$.

Alors $\forall b\in\,]-\infty,m]$, $\psi'(b)\leq 0$ et $\forall b\in[m,+\infty[$, $\psi'(b)\geq 0$.

ψ est décroissante sur $]-\infty,m]$ et croissante sur $[m,+\infty[$.

Alors ψ admet un minimum en m. $\forall b\in\mathbb{R}$, $g(b)-g(m) = \psi(b) \geq \psi(m) = 0$.

$\forall b\in\mathbb{R}$, $g(b)\geq g(m)$.

Si m est une médiane de X g est minimale en m.

Nous avons vu dans Q1 b que X possède au moins une médiane. Alors

1) $\min_{x\in\mathbb{R}} E(|X-x|)$ existe.

2) Si m est une médiane de X : $\min_{x\in\mathbb{R}} E(|X-x|) = E(|X-m|)$.

Q4 a) Supposons ici que X suit la loi exponentielle de paramètre a. Notons que X possède une espérance.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-ax} & x\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Posons $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_X(x) = \begin{cases} a e^{-ax} & \text{si } x\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. f_X est une densité de X.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ E(|X-x|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t-x|\, f_X(t)\,dt = \int_0^{+\infty} |t-x|\, a\, e^{-at}\,dt = a\, h(x).$$

Comme nous l'avons vu plus haut $\min_{x\in\mathbb{R}} E(|X-x|)$ existe. Alors $\min_{x\in\mathbb{R}} h(x)$ existe et vaut $\frac{1}{a}\min_{x\in\mathbb{R}} E(|X-x|)$. Cherchons "les" médianes de X. Commençons par une remarque.

▼ Remarque.. Soit $m\in\mathbb{R}$. Supposons que m soit une médiane de X.

$F_X(m) = P(X\leq m)\geq\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}\leq P(X\geq m) = 1-P(X<m) = 1-P(X\leq m)$ donc $P(X\leq m)\leq 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Alors $F_X(m) \geqslant \frac{1}{2}$ et $F_X(m) = P(X \leqslant m) \leqslant \frac{1}{2}$. Donc $F_X(m) = \frac{1}{2}$.

Si m est une médiane de X : $F_X(m) = \frac{1}{2}$.

Réciproquement supposons que $F_X(m) = \frac{1}{2}$. $P(X \leqslant m) = \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}$!

$P(X \geqslant m) = 1 - P(X < m) = 1 - P(X \leqslant m) = 1 - F_X(m) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}$!

Ainsi m est une médiane de X.

Finalement : m est une médiane de X si et seulement si $F_X(m) = \frac{1}{2}$.
Notons que ceci vaut pour toute variable aléatoire à densité. ▲

$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & \text{si } x \in [0, +\infty[. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\forall x \in]-\infty, 0[, \ F_X(x) \neq \frac{1}{2}$. Soit $x \in [0, +\infty[$.

$F_X(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-ax} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-ax} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -ax = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{a} \ln 2$. Notons que $\frac{1}{a} \ln 2 \geqslant 0$!

Par conséquent X admet une médiane et une seule $\frac{1}{a} \ln 2$.

Alors $\min_{x \in \mathbb{R}} E(|X - x|) = E(|X - \frac{1}{a} \ln 2|)$.

Par conséquent $\min_{x \in \mathbb{R}} h(x) = \frac{1}{a} E(|X - \frac{1}{a} \ln 2|) = h(\frac{1}{a} \ln 2)$.

Finalement <u>h possède un minimum sur $\mathbb{R}$ et $\frac{1}{a} \ln 2$ est un réel qui réalise ce minimum.</u>

(*) **Exercice 1..** Vérifier que $h(\frac{1}{a} \ln 2) = \frac{1}{a^2} \ln 2$ (*) $\boxed{\text{Voir en dernière page...}}$

Exercice 2.. Montrer directement que $\forall x \in \mathbb{R}, \ h(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2} e^{-ax} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ \frac{1}{a^2} & \text{sinon} \end{cases}$

Retrouver alors le résultat demandé.

b) $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire. Alors $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2[\arctan t]_0^1 = 2 \arctan \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Posons alors $\forall t \in \mathbb{R}, \ \ell(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+t^2} & \text{si } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

ℓ est positive sur $\mathbb{R}$ et au moins continue sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ (donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points). De plus $\int_{-\infty}^{-1} \ell(t)\,dt$ et $\int_1^{+\infty} \ell(t)\,dt$ existent et valent 0.

comme $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$, $\int_{-1}^{1} \ell(t)dt = 1$. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \ell(t)dt$ existe et vaut 1.

ceci achève de montrer que ℓ est une densité de probabilité.

Alors il existe une variable aléatoire Y admettant pour densité ℓ.

Nous notons F_Y sa fonction de répartition.

Comme nous l'avons vu plus haut un réel m est médiane de Y si et seulement si $F_Y(m) = \frac{1}{2}$ (remarque de la page 6).

$\forall x \in]-\infty,-1[$, $F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x} \ell(t)dt = 0$. Y n'a pas de médiane appartenant à $]-\infty,-1[$

$\forall x \in [1,+\infty[$, $F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x} \ell(t)dt = \int_{-1}^{1} \ell(t)dt = 1$. Y n'a pas de médiane appartenant à $[1,+\infty[$.

Soit $x \in [-1,1[$. $F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x} \ell(t)dt = \int_{-1}^{x} \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{2}{\pi}\left[\arctan t\right]_{-1}^{x} = \frac{2}{\pi}\left[\arctan x - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$F_Y(x) = \frac{2}{\pi}\arctan x + \frac{1}{2}$. $F_Y(x) = \frac{1}{2} \iff \frac{2}{\pi}\arctan x = 0 \iff x = 0$.

0 est la seule médiane de Y.

$\int_{-\infty}^{-1} t\,\ell(t)\,dt$ et $\int_{1}^{+\infty} t\,\ell(t)\,dt$ existent et valent 0.

$t \mapsto t\,\ell(t)$ est continue et impaire sur $[-1,1]$ donc $\int_{-1}^{1} t\,\ell(t)dt$ existe et vaut 0.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\ell(t)dt$ existe et vaut 0. Y possède une espérance qui vaut 0.

Ainsi $\min_{x\in\mathbb{R}} E(|Y-x|)$ existe et vaut $E(|Y-0|)$ car 0 est une médiane de Y.

Le théorème de transfert donne : $\forall x\in\mathbb{R}$, $E(|Y-x|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t-x|\,\ell(t)dt = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{|t-x|}{1+t^2} dt$.

Alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x) = \int_{-1}^{1} \frac{|t-x|}{1+t^2} dt = \frac{2}{\pi} E(|Y-x|)$.

Alors $\min_{x\in\mathbb{R}} h(x)$ existe et 0 est un point qui réalise ce minimum.

$h(0) = \int_{-1}^{1} \frac{|t|}{1+t^2} dt \underset{\text{par parité}}{=} 2\int_{0}^{1} \frac{t}{1+t^2} dt = \left[\ln|1+t^2|\right]_0^1 = \ln 2$.

k possède un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint en 0 et qui vaut $\ln 2$.

Exercice. montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $k(x) = \begin{cases} 2x \arctan x + \ln 2 - \ln(1+x^2) & \text{si } x \in [-1,1] \\ |x| \frac{\pi}{2} & \text{sinon} \end{cases}$

retrouver le résultat précédent.

Retour sur Q4 c]. Calcul du minimum de h.

Le minimum vaut $h(\frac{1}{a}\ln 2)$. Posons $\delta = \frac{1}{a}\ln 2$.

$$h(\delta) = \frac{1}{a} E(|X-\delta|) = \frac{1}{a} g(\delta) = \frac{1}{a}\left[\int_{-\infty}^{\delta} P(X \leq t)\,dt + \int_{\delta}^{+\infty} P(X \geq t)\,dt\right].$$

$\delta \geq 0$. $$\int_{-\infty}^{\delta} P(X \leq t)\,dt = \int_0^{\delta}(1-e^{-at})\,dt = \left[t + \frac{1}{a}e^{-at}\right]_0^{\delta} = \delta + \frac{1}{a}e^{-a\delta} - \frac{1}{a}.$$

$$\int_{\delta}^{+\infty} P(X \geq t)\,dt = \int_{\delta}^{+\infty}(1 - P(X<t))\,dt = \int_{\delta}^{+\infty}(1-P(X \leq t))\,dt = \int_{\delta}^{+\infty}(1-(1-e^{-at}))\,dt = \int_{\delta}^{+\infty} e^{-at}\,dt.$$

$$\int_{\delta}^{+\infty} P(X \geq t)\,dt = \lim_{\gamma \to +\infty} \int_{\delta}^{\gamma} e^{-at}\,dt = \lim_{\gamma \to +\infty}\left[-\frac{1}{a}e^{-at}\right]_{\delta}^{\gamma} = \lim_{\gamma \to +\infty}\left[\frac{1}{a}e^{-a\delta} - \frac{1}{a}e^{-a\gamma}\right] = \frac{1}{a}e^{-a\delta}.$$

donc $$h(\delta) = \frac{1}{a}\left[\delta + \frac{1}{a}e^{-a\delta} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a}e^{-a\delta}\right] \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{a}\left[\delta + \frac{1}{a} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \times \frac{1}{2}\right] = \frac{\delta}{a} = \frac{\ln 2}{a^2}.$$

$\delta = \frac{\ln 2}{a}$ donc $e^{-\delta a} = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$.

Le minimum de h est $\frac{1}{a^2}\ln 2$.

R...

Question 7 **HEC 2011** S 101

Dans cet exercice E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et p, n sont deux entiers strictement positifs.

Q1. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E et x un vecteur de E.

Caractériser en le justifiant le fait que $(e_1, e_2, \dots, e_p, x)$ soit liée.

Q2. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E supposés non tous nuls.

On note $\mathcal{A} = \{J \subset [\![1, n]\!] \mid (x_i)_{i \in J} \text{ est libre}\}$.

Soit J_0 un élément de $\mathcal{A}$ de cardinal maximal. Que peut-on dire de $(x_i)_{i \in J_0}$ vis à vis de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$?

Q3. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E et r le rang de cette famille. On en extrait une famille de n' vecteurs et on note r' le rang de cette famille extraite. Montrer que $n - r \geqslant n' - r'$

Cours *X est une variable aléatoire. Rappeler la définition de la fonction de répartition de X et en donner les principales propriétés.*

Q1 Montrons que $(e_1, e_2, \dots, e_p, x)$ est liée si et seulement si x est combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \dots, e_p)$.

→ La condition est clairement suffisante.

→ Montrons qu'elle est nécessaire. Supposons que $(e_1, e_2, \dots, e_p, x)$ est liée.

$\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}) \in \mathbb{K}^{p+1}$, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}) \neq 0_{\mathbb{K}^{p+1}}$ et $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k + \alpha_{p+1} x = 0_E$.

Supposons $\alpha_{p+1} = 0$. Alors $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = 0_E$. Comme $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est libre, on a :

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$. Alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = \alpha_{p+1} = 0$. Donc $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}) = 0_{\mathbb{K}^{p+1}}$!!

Par conséquent α_{p+1} n'est pas nul et $x = -\frac{1}{\alpha_{p+1}} \sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{p} \left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_{p+1}}\right) e_k$

donc x est combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \dots, e_p)$.

Q2 Montrons que $(x_i)_{i \in J_0}$ est une base de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. $J_0 \neq \emptyset$ car $\exists k \in [\![1, n]\!]$, $x_k \neq 0_E$.

- $(x_i)_{i \in J_0}$ est une famille libre de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ par définition de J_0.
- Montrons que $(x_i)_{i \in J_0}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Il suffit de montrer que $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont combinaisons linéaires des éléments de la famille $(x_i)_{i \in J_0}$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Si $k \in J_0$, x_k est combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in J_0}$.

Supposons que $k \notin J_0$. Alors card $J_0 \cup \{k\} >$ card J_0.

Alors la famille " $(x_i)_{i\in J_0} \cup (x_k)$ " est liée par définition de J_0.

Comme $(x_i)_{i\in J_0}$ est libre, Q1 permet de dire que x_k est combinaison linéaire des éléments de la famille $(x_i)_{i\in J_0}$.

Ainsi $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k \in \mathrm{Vect}((x_i)_{i\in J_0})$. Alors $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n) \subset \mathrm{Vect}((x_i)_{i\in J_0})$.

L'inclusion inverse étant claire, on a : $\mathrm{Vect}((x_i)_{i\in J_0}) = \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$(x_i)_{i\in J_0}$ est une famille libre et génératrice de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

donc <u>$(x_i)_{i\in J_0}$ est une base de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.</u>

Q3 Posons $F = \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. $\dim F = r$ car la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est de rang r.

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de n' vecteurs extraite de la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et qui a pour rang r'. Si $n = n'$: $r = r'$ et le résultat est clair. <u>Nous supposons $n > n'$.</u>

<u>1er cas</u> : $r' = 0$. Alors $\forall i \in I$, $x_i = 0_E$. $F = \mathrm{Vect}\left((x_i)_{i\in [\![1,n]\!] - I}\right)$.

Donc $r = \dim F \leq \mathrm{card}([\![1,n]\!] - I) = n - n'$. Alors $n - r \geq n' = n' - r'$.

<u>2ème cas</u> : $r' = n'$. Alors $n' - r' = 0$. Comme $n \geq r$: $n - r \geq 0 = n' - r'$

<u>3ème cas</u> : $0 < r' < n'$. Soit $\tilde{\mathcal{B}} = \{J \subset I \mid (x_i)_{i\in J} \text{ libre}\}$

Soit $\tilde{J}_0$ un élément de $\tilde{\mathcal{B}}$ de cardinal maximal. D'après ce qui précède $(x_i)_{i\in \tilde{J}_0}$ est une base de $\mathrm{Vect}((x_i)_{i\in I})$ qui est de dimension r'.

Alors card $\tilde{J}_0 = r'$. Les vecteurs de la famille $(x_i)_{i\in I - \tilde{J}_0}$ sont combinaisons linéaires des éléments de la famille $(x_i)_{i\in \tilde{J}_0}$.

Alors $F = \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est encore engendré par la famille caractérisée des familles $(x_i)_{i \in \tilde{J}_0}$ et $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!] - I}$. cette famille a pour cardinal $r' + n - n'$

donc $r' + n - n' \geqslant \dim F = r$. Alors $n - r \geqslant n' - r'$.

Dans tous les cas $\underline{\underline{n - r \geqslant n' - r'}}$.