Sujet S 108 - Exercice

Dans l'exercice toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs réelles.

1) Soit X une variable aléatoire.
   a) Rappeler la définition de la fonction de répartition F de X et en donner des propriétés.
   b) Dans cette sous-question, on suppose que X est à densité. Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ si et seulement si F est strictement croissante.
   c) Soit Y une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Soit X définie sur Ω par :

$$X(\omega) = \begin{cases} Y(\omega)+1, & \text{si } Y(\omega) < -1\,; \\ 0, & \text{si } -1 \leqslant Y(\omega) \leqslant 1\,; \\ Y(\omega)-1, & \text{si } Y(\omega) > 1. \end{cases}$$

   Montrer que X est une variable aléatoire, et représenter sa fonction de répartition. Quel commentaire peut-on faire ?

   Dans la suite de l'exercice X désigne une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition F est strictement croissante. On envisage plusieurs méthodes pour simuler la loi de X conditionnellement à $(X > m)$ pour un réel m donné.

2) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et m un réel fixé.
   a) Montrer que l'événement $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X_n \leqslant m)$ est de probabilité nulle.
   b) Soit Z l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall\, \omega \in \Omega$, $Z(\omega) = X_p(\omega)$ où p est le plus petit indice n tel que $X_n(\omega) > m$ si $\omega \notin A$ et $Z(\omega) = m$ si $\omega \in A$.
   Montrer que Z est une variable aléatoire et que pour tout x réel, $\mathbb{P}(Z \leqslant x) = \mathbb{P}_{(X>m)}(X \leqslant x)$.
   c) Quel commentaire peut-on faire sur cette méthode de simulation lorsque m est très grand ?

3) Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1[$ de loi uniforme et $m \in \mathbb{R}$. On pose

$$V = F^{-1}(F(m) + (1-F(m))U) \qquad (1)$$

   a) Montrer que V est une variable aléatoire et que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(V \leqslant x) = \mathbb{P}_{(X>m)}(X \leqslant x)$.
   b) Comparer cette méthode à celle envisagée à la question précédente.
   c) Déterminer F et F^{-1} lorsque X a pour densité $f_X : x \mapsto \frac{1}{2} e^{-|x|}$. Expliciter dans ce cas la variable V en fonction de U lorsque $m = 0$. Quelle est alors la loi de V ?
   d) Si a et b sont deux réels tels que $a < b$, proposer, par analogie avec la formule (1), une variable aléatoire W simulant la loi de X conditionnellement à $(a < X < b)$.

Sujet S 108 - Exercice sans préparation

Soit $(E, \langle .\,, . \rangle)$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E pour lequel il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

1) Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure (*on pourra penser au procédé d'orthonormalisation de Schmidt*).
2) On suppose de plus que pour tout x de E, $\langle u(x), x\rangle = 0$.
   Montrer que $\forall\, (x, y) \in E^2$, $\langle u(x), y\rangle = -\langle u(y), x\rangle$. Que peut-on dire de u ?

HEC 2011 S 108 Correction de l'exercice

Q1 a) $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X^{-1}(]-\infty, x])) = P(X \leq x)$.

P1 F_X est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$

P2 F_X est croissante

P3 $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

P4 F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$

<u>Remarques</u> 1.. P2 et P3 entraînent P1

2.. P1, P2, P3, P4 (resp. P2, P3, P4) caractérisent les fonctions de répartition des variables aléatoires réelles.

3.. X est une variable aléatoire à densité si et seulement si F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Q b) * Supposons que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

Supposons que F ne soit pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Alors $\exists (x,x') \in \mathbb{R}^2$, $x < x'$ et $F(x) \geq F(x')$.

Or F est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $F(x) \leq F(x')$. Ainsi $x < x'$ et $F(x) = F(x')$.

Donc $x \neq x'$ et $F(x) = F(x')$. F n'est pas injective. Ceci contredit l'hypothèse.

Si F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$: F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

* Réciproquement supposons que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme F est continue sur $\mathbb{R}$ et que, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$, le théorème de la bijection montre que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

<u>F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ si et seulement si F est strictement croissante sur $]0,1[$.</u>

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $A_x = X^{-1}(]-\infty, x])$ et notons que $A_x \in \mathcal{B}$.

Nous noterons φ la fonction de répartition de Y. Soit $\omega \in \Omega$.

$$\omega \in A_x \iff X(\omega) \leq x \iff \begin{cases} Y(\omega) \leq x \text{ et } Y(\omega) < -1 \\ \text{ou} \\ 0 \leq x \text{ et } -1 \leq Y(\omega) \leq 1 \\ \text{ou} \\ Y(\omega) - 1 \leq x \text{ et } Y(\omega) > 1 \end{cases} \iff \begin{cases} Y(\omega) \leq x-1 \text{ et } Y(\omega) < -1 \\ \text{ou} \\ 0 \leq x \text{ et } -1 \leq Y(\omega) \leq 1 \\ \text{ou} \\ Y(\omega) \leq x+1 \text{ et } Y(\omega) > 1 \end{cases}.$$

1er cas. $x<0$. $\omega \in A_x \Leftrightarrow \begin{cases} Y(\omega)\leq x-1 \text{ et } Y(\omega)<-1 \\ \text{ou} \\ Y(\omega)\leq x+1 \text{ et } Y(\omega)>1 \end{cases} \Leftrightarrow Y(\omega)\leq x-1.$

2ème cas. $x>0$. $\omega \in A_x \Leftrightarrow \begin{cases} Y(\omega)\leq x-1 \text{ et } Y(\omega)<-1 \\ \text{ou} \\ -1\leq Y(\omega)\leq 1 \\ \text{ou} \\ Y(\omega)\leq x+1 \text{ et } Y(\omega)>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y(\omega)<-1 \\ \text{ou} \\ -1\leq Y(\omega)\leq 1 \\ \text{ou} \\ 1<Y(\omega)\leq x+1 \end{cases} \Leftrightarrow Y(\omega)\leq x+1.$

3ème cas. $x=0$ $\omega \in A_x \Leftrightarrow \begin{cases} Y(\omega)\leq -1 \text{ et } Y(\omega)<-1 \\ \text{ou} \\ 0\leq 0 \text{ et } -1\leq Y(\omega)\leq 1 \\ \text{ou} \\ Y(\omega)\leq 1 \text{ et } Y(\omega)>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y(\omega)<-1 \\ \text{ou} \\ -1\leq Y(\omega)\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow Y(\omega)\leq 1$

Y est une variable aléatoire donc $\forall z\in \mathbb{R}$, $Y^{-1}(]-\infty,z])\in \mathcal{A}$.

Si $x\in]-\infty,0[$, $A_x = Y^{-1}(]-\infty,x-1])\in\mathcal{A}$ et $P(A_x)=P(Y^{-1}(]-\infty,x-1]))=\phi(x-1)$.

Si $x\in]0,+\infty[$, $A_x=Y^{-1}(]-\infty,x+1])\in\mathcal{A}$ et $P(A_x)=P(Y^{-1}(]-\infty,x+1]))=\phi(x+1)$.

Si $x=0$, $A_x=Y^{-1}(]-\infty,1])\in\mathcal{A}$ et $P(A_x)=P(Y^{-1}(]-\infty,1]))=\phi(1)$.

donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $A_x=X^{-1}(]-\infty,x])\in\mathcal{A}$. Alors <u>$X$ est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$.</u>

Notons F_X sa fonction de répartition.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $F_X(x)=P(X^{-1}(]-\infty,x]))=P(A_x)=\begin{cases} \phi(x-1) & \text{si } x\in]-\infty,0[\\ \phi(1) & \text{si } x=0 \\ \phi(x+1) & \text{si } x\in]0,+\infty[\end{cases}$

En encore <u>$\forall x\in\mathbb{R}$, $F_X(x)=\begin{cases} \phi(x-1) \text{ si } x\in]-\infty,0[\\ \phi(x+1) \text{ si } x\in[0,+\infty[\end{cases}$</u>

▲ <u>Remarques.</u> 1. ϕ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus $x\mapsto x-1$ et $x\mapsto x+1$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Par composition F_X est alors continue sur $]-\infty,0[$ et sur $[0,+\infty[$. $F_X(0)=\phi(0+1)=\phi(1)$ et $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} F_X(x)=\lim\limits_{x\mapsto 0^-}\phi(x-1)=\phi(-1)$

$\phi(-1)=\phi(1)\Leftrightarrow 1-\phi(1)=\phi(1)\Leftrightarrow \phi(1)=\frac{1}{2}$

$\phi(-1)=\phi(1) \underset{\substack{\uparrow \\ \phi(0)=\frac{1}{2}}}{\Leftrightarrow} \phi(1)=\phi(0) \Leftrightarrow 1=0$!! . donc $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} F_X(x)=\phi(-1)\neq\phi(1)=F_X(0)$

↑ ϕ est injective

Alors F_X n'est pas continue en 0. Donc X n'est pas une variable aléatoire à densité.

F_X est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ donc $\forall z \in \mathbb{R}^*$, $F_X(z) = \lim_{t \to z^-} F_X(t) = P(X<z) = F_X(z) - P(X=z)$.

Alors $\forall z \in \mathbb{R}^*$, $P(X=z)=0$.

Or $P(X=0) \leq P(X \leq 0) = F_X(0) = \varphi(1) < 1$.

Donc X n'est pas une variable aléatoire discrète !

2. La courbe ne pose aucun problème avec les données suivantes.

$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$. $F_X(0) = \varphi(1) \simeq 0,84134$. $\lim_{x\to 0^-} F_X(x) = \varphi(-1) = 1-\varphi(1) \simeq 0,15869$

F_X est dérivable à droite en 0 et $(F_X)'_d(0) = \varphi'(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0,24197$

F_X ~~est de classe~~ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'_X(x) = \begin{cases} \varphi'(x-1) & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \varphi'(x+1) & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$.

$\lim_{x\to 0^-} F'_X(x) = \varphi'(-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2} \simeq 0,24197$.

3. φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $x \mapsto x-1$ et $x \mapsto x+1$ sont aussi strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.
Alors 1) F_X est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$
2) F_X est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$ comme nous l'avons déjà vu.
3) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^-} F_X(x) = \varphi(-1)$, $F_X(0) = \varphi(1)$ et $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

Alors F_X définit une bijection de $]-\infty, 0[$ sur $]0, \varphi(-1)[$ et de $[0, +\infty[$ sur $[\varphi(1), 1[$.

Donc $F_X(]-\infty, 0[) =]0, \varphi(-1)[$ et $F_X([0, +\infty[) = [\varphi(1), 1[$. $F_X(\mathbb{R}) =]0, \varphi(-1)[\cup [\varphi(1), 1[$.

Comme $\varphi(-1) < \varphi(1)$: F_X n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

Nous avons vu que F_X est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$.

Soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < x'$.

$x < x' < 0$ donne $F_X(x) < F_X(x')$. $x < 0 \leq x'$ donne $F_X(x) \underset{\lim_{x\to 0^-} F_X(x) = \varphi(-1)}{<} \varphi(-1) < \varphi(1) \leq F_X(x')$ donc $F_X(x) < F_X(x')$.

$0 \leq x < x'$ donne $F_X(x) < F_X(x')$. Ceci montre que F_X est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Le résultat Q1 b) ne vaut pas pour toute variable aléatoire.

Q2 a) le corollaire naturel du théorème de la limite monotone (en probabilité) montre que $P(A) = P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{X_n \leq x\}) = P(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \{X_n \leq x\}) = \lim_{r\to+\infty} P(\bigcap_{n=0}^{r} \{X_n \leq x\})$.

Or $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et ayant même loi que X

donc $P(A) = \lim_{r\to+\infty} \left(\prod_{n=0}^{r} P(X_n \leq x)\right) = \lim_{r\to+\infty} (F(x))^r$.

X est une variable à densité et sa fonction de répartition F est strictement croissante.

Alors F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

Ainsi $F(x) \in]0,1[$. Alors $P(A) = \lim_{r\to+\infty} (F(x))^r = 0$.

L'événement $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{X_n \leq x\}$ est de probabilité nulle.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $B_x = Z^{-1}(]-\infty, x])$ et montrons que $B_x \in \mathcal{B}$.

Notons que si $\omega \in A$, $Z(\omega) = x$ et si $\omega \notin A$, $Z(\omega) > x$.

1er cas.. $x < x$. $B_x = Z^{-1}(]-\infty, x]) = \emptyset$ est. Notons que $P(B_x) = 0$

2e cas.. $x = x$. $B_x = Z^{-1}(]-\infty, x]) = Z^{-1}(\{x\}) = A \in \mathcal{B}$. Notons que $P(B_x) = P(A) = 0$.

3e cas.. $x > x$. Soit $\omega \in \Omega$.

$$\omega \in B_x \Leftrightarrow Z(\omega) \leq x \Leftrightarrow \begin{cases} \omega \in A \\ \text{ou} \\ \omega \in \bar{A} \text{ et } x < X_0(\omega) \leq x \\ \text{ou} \\ \omega \in \bar{A} \text{ et } \exists p \in \mathbb{N}^*, X_0(\omega) \leq x, X_1(\omega) \leq x, \dots, X_{p-1}(\omega) \text{ et } x < X_p(\omega) \leq x \end{cases}$$

$$B_x = A \cup (\bar{A} \cap X_0^{-1}(]x,x])) \cup \left(\bar{A} \cap \bigcup_{p=1}^{+\infty} \left(X_0^{-1}(]-\infty,x]) \cap \dots \cap X_{p-1}^{-1}(]-\infty,x]) \cap X_p^{-1}(]x,x])\right)\right)$$

On peut encore écrire :

$$B_x = X_0^{-1}(]x,x]) \cup \bigcup_{p=1}^{+\infty} \left(X_0^{-1}(]-\infty,x]) \cap \dots \cap X_{p-1}^{-1}(]-\infty,x]) \cap X_p^{-1}(]x,x])\right) \cup A$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k^{-1}(]x,x]) \in \mathcal{B}$ et $X_k^{-1}(]-\infty,x]) \in \mathcal{B}$ car pour tout $k \in \mathbb{N}$, X_k est une variable aléatoire. De plus $A \in \mathcal{B}$.

Comme $\mathcal{B}$ est stable par réunion finie ou dénombrable et par intersection finie (ou dénombrable) on peut dire que B_x appartient à $\mathcal{B}$. Calculons $P(B_x)$.

▼ <u>Remarque</u>.. Soit $B \in \mathcal{B}$. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ car $P(A) = 0$.
Or $A \cap B \subset A$ donc $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) = 0$. $P(A \cap B) = 0$. Alors $P(A \cup B) = P(B)$.
$\forall B \in \mathcal{B}$, $P(A \cup B) = P(B)$. ▲

Ainsi $P(B_x) = P\left(X_0^{-1}(]m,x]) \cup \bigcup_{p=1}^{+\infty}\left(X_0^{-1}(]-\infty,m]) \cap \dots \cap X_{p-1}^{-1}(]-\infty,m]) \cap X_p^{-1}(]m,x])\right)\right)$.

Par incompatibilité il vient : $P(B_x) = P(X_0^{-1}(]m,x])) + \sum_{p=1}^{+\infty} P(X_0^{-1}(]-\infty,m]) \cap \dots \cap X_{p-1}^{-1}(]-\infty,m]) \cap X_p^{-1}(]m,x]))$.

donc $P(B_x) = P(m < X_0 \leq x) + \sum_{p=1}^{+\infty} P(\{X_0 \leq m\} \cap \dots \cap \{X_{p-1} \leq m\} \cap \{m < X_p \leq x\})$.

Or $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.

Ainsi $P(B_x) = P(m < X \leq x) + \sum_{p=1}^{+\infty} (P(X \leq m))^p \, P(m < X \leq x)$ ← card $[\![0, p-1]\!] = p$!

$F(m) \in]0,1[$.

Alors $P(B_x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (P(X \leq m))^p \, P(m < X \leq x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (F(m))^p \, (F(x) - F(m)) = \dfrac{F(x) - F(m)}{1 - F(m)}$.

Nous avons donc montré que
1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $Z^{-1}(]-\infty, x]) = B_x \in \mathcal{B}$.
2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(Z^{-1}(]-\infty,x])) = \begin{cases} \dfrac{F(x) - F(m)}{1 - F(m)} & \text{si } x \in]m, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors <u>Z est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.</u>

<u>De plus sa fonction de répartition F_Z est définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{F(x) - F(m)}{1 - F(m)} & \text{si } x \in]m, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$</u>

<u>Exercice</u>.. Montrer que Z est une variable aléatoire à densité.

Notons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(Z \leq x) = P_{\{X > m\}}(X \leq x)$.

Observons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) \in]0,1[$ donc $P(X > m) = 1 - F(m) \in]0,1[$

Alors $P(X > m) \neq 0$. Ce qui permet de parler de $P_{\{X > m\}}(X \leq x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $P_{\{X>n\}}(X \leq x) = \dfrac{P(\{X>n\} \cap \{X \leq x\})}{P(X>n)} = \dfrac{P(\{n < X\} \cap \{X \leq x\})}{P(X>n)}$.

1er cas $x \leq n$. $P(\{X>n\} \cap \{X \leq x\}) = P(\emptyset) = 0$. $P_{\{X>n\}}(X \leq x) = 0 = F_Z(x) = P(Z \leq x)$.

2ème cas $x > n$. $P_{\{X>n\}}(X \leq x) = \dfrac{P(n < X \leq x)}{P(X>n)} = \dfrac{F(x)-F(n)}{1-F(n)} = F_Z(x) = P(Z \leq x)$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(Z \leq x) = P_{\{X>n\}}(X \leq x)$.

c) Lorsque n est très grand, la probabilité de $P(X>n)$ donc de $P(X_p > n)$, pour p quelconque dans $\mathbb{N}$, est très faible. Il sera donc assez long d'obtenir un p dans $\mathbb{N}$ tel que X_p prenne une valeur strictement supérieure à n.

Q3 a) Rappelons que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$. F^{-1} est alors une bijection de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$. De plus F^{-1} est strictement croissante sur $]0,1[$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $C_x = V^{-1}(]-\infty, x])$. Soit $\omega \in \Omega$.

$$\omega \in C_x \iff V(\omega) \leq x \iff F^{-1}(F(n) + (1-F(n))\,U(\omega)) \leq x \underset{\text{F est strictement croissante sur } \mathbb{R}}{\iff} F(n) + (1-F(n))\,U(\omega) \leq F(x)$$

$$\omega \in C_x \underset{1-F(n)>0}{\iff} U(\omega) \leq \frac{F(x)-F(n)}{1-F(n)} \iff \omega \in U^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{F(x)-F(n)}{1-F(n)}\right]\right).$$

Alors $C_x = U^{-1}\left(\left]-\infty, \dfrac{F(x)-F(n)}{1-F(n)}\right]\right)$. Or U est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ donc $U^{-1}\left(\left]-\infty, \dfrac{F(x)-F(n)}{1-F(n)}\right]\right) \in \mathcal{B}$.

Ainsi $C_x \in \mathcal{B}$ et $P(C_x) = P\left(U^{-1}\left(\left]-\infty, \dfrac{F(x)-F(n)}{1-F(n)}\right]\right)\right) = P\left(U \leq \dfrac{F(x)-F(n)}{1-F(n)}\right)$.

1er cas $x \leq n$. Alors $\dfrac{F(x)-F(n)}{1-F(n)} \leq 0$. Comme U suit la loi uniforme sur $]0,1[$:

$$P(C_x) = P\left(U \leq \frac{F(x)-F(n)}{1-F(n)}\right) = 0.$$

2ième cas.. $x > m$. Alors $F(m) < F(x) < 1$. donc $0 < F(x)-F(m) < 1-F(m)$.

Ainsi $0 < \dfrac{F(x)-F(m)}{1-F(m)} < 1$.

donc $P(C_x) = P\left(U \leq \dfrac{F(x)-F(m)}{1-F(m)}\right) = \dfrac{F(x)-F(m)}{1-F(m)}$.

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}$, $V^{-1}(]-\infty, x]) = C_x \in \mathcal{B}$ et $P(V^{-1}(]-\infty,x])) = P(C_x) = \begin{cases} \dfrac{F(x)-F(m)}{1-F(m)} & \text{si } x > m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc 1) V est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(V \leq x) = \begin{cases} \dfrac{F(x)-F(m)}{1-F(m)} & \text{si } x \in]m, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(V \leq x) = P_{\{X > m\}}(X \leq x)$.

b) cette méthode repose sur "la simple" connaissance de la fonction de répartition de X, donc de la loi de X alors que la première exige la connaissance de X ou au moins un moyen de simuler X.

c) Soit $x \in [0, +\infty[$ $\displaystyle\int_0^x f_X(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\left[-e^{-t}\right]_0^x = \frac{1}{2}(1-e^{-x})$. (*)

Alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f_X(t)\,dt = \frac{1}{2}$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_X(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{1}{2}$.

f_X étant paire $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f_X(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{1}{2}$. Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt$ existe et vaut 1.

comme f_X est continue et positive sur $\mathbb{R}$, f_X est une densité de probabilité.

$\forall x \in [0, +\infty[$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t)\,dt + \int_0^x f_X(t)\,dt \overset{(*)}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-e^{-x}) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ f_X \text{ est paire}}}{=} \int_{-x}^{+\infty} f_X(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f_X(t)\,dt - \int_0^{-x} f_X(t)\,dt \overset{(*)\ -x>0}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-e^{x}) = \frac{1}{2}e^{x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ \frac{1}{2}e^{x} & \text{sinon} \end{cases}$

Notons que $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x\in[0,+\infty[\\ \frac{1}{2}e^{x} & \text{si } x\in]-\infty,0]\end{cases}$

$x\mapsto \frac{1}{2}e^{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc F est strictement croissante sur $]-\infty,0]$

$x\mapsto \frac{1}{2}e^{-x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $x\mapsto 1-\frac{1}{2}e^{-x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Alors F est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Comme F est strictement croissante sur $]-\infty,0]$ et sur $[0,+\infty[$, F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

Notons que $\forall x\in[0,+\infty[,\ F(x)\geqslant F(0)=\frac{1}{2}$ et $\forall x\in]-\infty,0[,\ F(x)<F(0)=\frac{1}{2}$.

Soit $y\in]0,1[$. $\exists!\, x\in\mathbb{R},\ F(x)=y$. De plus $x=F^{-1}(y)$.

1er cas.. $y\in]0,\frac{1}{2}[$. Alors $x\in]-\infty,0[$ donc $y=F(x)=\frac{1}{2}e^{x}$. $x=\ln(2y)$.

2ème cas.. $y\in[\frac{1}{2},1[$. Alors $x\in[0,+\infty[$ donc $y=F(x)=1-\frac{1}{2}e^{-x}$. $e^{-x}=2(1-y)$.

Alors $-x=\ln(2(1-y))$. $x=-\ln(2(1-y))$.

$$\forall y\in]0,1[,\ F^{-1}(y)=\begin{cases}-\ln(2(1-y)) & \text{si } y\in[\frac{1}{2},1[\\ \ln(2y) & \text{sinon}\end{cases}$$

Supposons que $m=0$. $V=F^{-1}(F(0)+(1-F(0))U)=F^{-1}\left(\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)U\right)=F^{-1}\left(\frac{1+U}{2}\right)$.

$\frac{1+U}{2}$ prend ses valeurs dans $]\frac{1}{2},1[$ donc $V=-\ln\left(2\left(1-\frac{1+U}{2}\right)\right)=-\ln\frac{1-U}{2}$.

$$V=-\ln\frac{1-U}{2}.$$

$\forall x\in\mathbb{R},\ P(V\leqslant x)=\begin{cases}\dfrac{F(x)-F(0)}{1-F(0)} & \text{si } x\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ car $m=0$.

Or $F(0)=\frac{1}{2}$ et $\forall x\in]0,+\infty[,\ F(x)=1-\frac{1}{2}e^{-x}$.

Alors $\forall x\in]0,+\infty[,\ P(V\leqslant x)=\dfrac{1-\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}(1-e^{-x})}{\frac{1}{2}}=1-e^{-x}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ P(V \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ <u>ou</u> $\forall x \in \mathbb{R},\ P(V \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

<u>V suit la loi exponentielle de paramètre 1.</u>

<u>d)</u> Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $\alpha_x = P_{\{a<X<b\}}(X \leq x)$.

Notons que $P(a<X<b) = P(a<X\leq b) = F(b) - F(a) > 0$ car F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $a<b$. Cela justifie la probabilité conditionnelle ...

De plus $\alpha_x = \dfrac{P(\{X\leq x\} \cap \{a<X<b\})}{P(a<X<b)} = \dfrac{P(\{X\leq x\} \cap \{a<X<b\})}{F(b)-F(a)}$.

<u>1er cas..</u> $x \leq a$. Alors $P(\{X\leq x\} \cap \{a<X<b\}) = P(\emptyset) = 0$. $\alpha_x = 0$.

<u>2ème cas..</u> $x \geq b$. Alors $P(\{X\leq x\} \cap \{a<X<b\}) = P(a<X<b) = F(b)-F(a)$. $\alpha_x = 1$.

<u>3ème cas..</u> $a<x<b$ Alors $\alpha_x = \dfrac{P(\{X\leq x\} \cap \{a<X<b\})}{F(b)-F(a)} = \dfrac{P(a<X\leq x)}{F(b)-F(a)} = \dfrac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ P_{\{a<X<b\}}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, a] \\ \dfrac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)} & \text{si } x \in]a, b[\\ 1 & \text{si } x \in [b, +\infty[\end{cases}$

$a<b$ donc $F(a)<F(b)$. Soit T une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $]F(a), F(b)[$. La fonction de répartition F_T de T vérifie :

$\forall z \in \mathbb{R},\ F_T(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in]-\infty, F(a)] \\ \dfrac{z-F(a)}{F(b)-F(a)} & \text{si } z \in]F(a), F(b)[\\ 1 & \text{si } z \in [F(b), +\infty[\end{cases}$

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(F(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } F(x) \in]-\infty, F(a)] \\ \dfrac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)} & \text{si } F(x) \in]F(a), F(b)[\\ 1 & \text{si } F(x) \in [F(b), +\infty[\end{cases}$

Comme F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: $\forall x\in\mathbb{R},\ F_T(F(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\in\,]-\infty, a] \\ \dfrac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)} & \text{si } x\in\,]a,b[\\ 1 & \text{si } x\in [b,+\infty[\end{cases}$

Alors $\forall x\in\mathbb{R},\ P_{\{a<X<b\}}(X\leq x) = F_T(F(x))$.

Or $\forall x\in\mathbb{R},\ F_T(F(x)) = P(T\leq F(x))$

Notons que T prend ses valeurs dans $]F(a),F(b)[$ et que F^{-1} est strictement croissante sur $]0,1[$. Alors $\forall x\in\mathbb{R},\ F_T(F(x)) = P(F^{-1}(T)\leq x)$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R},\ P_{\{a<X<b\}}(X\leq x) = F_T(F(x)) = P(F^{-1}(T)\leq x)$. avec T variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui suit la loi uniforme $]F(a),F(b)[$. Reste plus qu'à construire à partir de U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]F(a),F(b)[$.

Notons que $x\mapsto (F(b)-F(a))x+F(a)$ définit une bijection de $]0,1[$ sur $]F(a),F(b)[$.

Posons alors $\hat{T} = (F(b)-F(a))U+F(a)$. montrons que la variable aléatoire $\hat{T}$ suit la loi uniforme sur $]F(a),F(b)[$. Soit $F_{\hat{T}}$ sa fonction de répartition.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_{\hat{T}}(x) = P(\hat{T}\leq x) = P((F(b)-F(a))U+F(a)\leq x) \underset{F(b)<F(a)}{\uparrow=} P\left(U\leq \frac{x-F(a)}{F(b)-F(a)}\right)$$

Soit $x\in\mathbb{R}$. $\dfrac{x-F(a)}{F(b)-F(a)}$ appartient à $]-\infty,0]$ si $x\leq F(a)$, à $]0,1[$ si $x\in\,]F(a),F(b)[$, à $[1,+\infty[$ si $x\in [F(b),+\infty[$.

$$\text{Alors}\quad F_{\hat{T}}(x) = P\left(U\leq \frac{x-F(a)}{F(b)-F(a)}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\in\,]-\infty, F(a)] \\ \dfrac{x-F(a)}{F(b)-F(a)} & \text{si } x\in\,]F(a),F(b)[\\ 1 & \text{si } x\in [F(b),+\infty[\end{cases}$$

Alors $\hat{T}$ suit la loi uniforme sur $]F(a),F(b)[$. Posons $W = F^{-1}(\hat{T})$.

Alors $W = F^{-1}((F(b)-F(a))U+F(a))$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ P_{\{a<X<b\}}(X\leq x) = P(W\leq x)$.

Remarque. Si $a=m$ et $b=+\infty$ (!!) on retrouve le résultat de Q3 a)...

R..

Question 8 **HEC 2011** **S 108**

Soit $(E, <.,.>)$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E pour lequel il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Q1. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure (on pourra penser au procédé d'orthonormalisation de Schmidt)

Q2. On suppose de plus que pour tout x dans E, $< u(x), x >= 0$.

Montrer que $\forall (x,y) \in E^2$, $< u(x), y >= - < u(y), x >$. Que peut-on-dire de u ?

Cours *X est une variable aléatoire. Rappeler la définition de la fonction de répartition F de X et en donner des propriétés.*

Q1 Il existe une base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de E telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ soit triangulaire supérieure.

Pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, $u(e_k)$ est combinaison linéaire de $e_1,e_2,\dots,e_k$.

Mieux : $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $u(\text{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_k)) = \text{Vect}(u(e_1),u(e_2),\dots,u(e_k)) \subset \text{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_k)$.

Le cours sur le procédé d'orthonormalisation de Schmidt montre qu'il existe une base $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,\dots,e'_n)$ de E, orthonormée et telle que :

$\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\text{Vect}(e'_1,e'_2,\dots,e'_k)=\text{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_k)$ et $<e'_k,e_k> \geq 0$.

Soit $k\in[\![1,n]\!]$. $e'_k\in\text{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_k)$ donc $u(e'_k)\in u(\text{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_k)) \subset \text{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_k)$.

Alors $u(e'_k)\in\text{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_k)=\text{Vect}(e'_1,e'_2,\dots,e'_k)$.

Donc pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $u(e'_k)$ est combinaison linéaire de $e'_1,e'_2,\dots,e'_k$.

Cela signifie que $M_{\mathcal{B}'}(u)$ est triangulaire supérieure.

<u>Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,\dots,e'_n)$ telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ soit triangulaire supérieure.</u>

Q2 Soit $(x,y)\in E^2$. Alors $<u(x+y), x+y> =0$.

$0 = <u(x+y),x+y> = <u(x)+u(y), x+y> = \underbrace{<u(x),x>}_{=0} + <u(x),y> + <u(y),x> + \underbrace{<u(y),y>}_{=0}$.

Ainsi <u>$<u(x),y> = -<u(y),x>$ et ceci pour tout $(x,y)\in E^2$.</u>

<u>Remarque</u>.. u est antisymétrique.

Posons $A' = M_{B'}(u) = (a'_{ij})$. Montrons que A' est antisymétrique.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $u(e'_i) = \sum_{k=1}^{n} a'_{ki} e'_k$

$\langle u(e'_i), e'_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} a'_{ki} \underbrace{\langle e'_k, e'_j \rangle}_{= \begin{cases} 1 \text{ si } k=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}} = a_{ji}$. De même $\langle u(e'_j), e'_i \rangle = a_{ij}$.

$(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ est orthonormée.

Or $\langle u(e'_i), e'_j \rangle = -\langle u(e'_j), e'_i \rangle$.

Donc $a_{ji} = -a_{ij}$ et ceci pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

${}^tA' = -A'$. A' est antisymétrique.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a'_{ii} = -a'_{ii}$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a'_{ii} = 0$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

1er cas.. $i > j$. Alors $a'_{ij} = 0$ car A' est triangulaire supérieure.

2e cas.. $i < j$ Alors $a'_{ji} = 0$ toujours parce que A' est triangulaire supérieure.

Ainsi $a'_{ij} = -a'_{ji} = 0$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow a'_{ij} = 0$.

Finalement $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a'_{ij} = 0$. $A' = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Alors u est l'endomorphisme nul.