Sujet S 109 - Exercice

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1) Question de cours : Inégalité de Bienaymé-Tchébichev. Estimateur sans biais, convergent.

Pour un entier $n \geqslant 2$, on considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de loi uniforme sur $[0, A]$, où $A \in \mathbb{R}_+^*$ est inconnu. On pose $S_n = \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ et $M_n = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$.

2) Calculer l'espérance et la variance de S_n en fonction de A et n.

3) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \quad \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|S_n - A| > \varepsilon) = 0$.

4) Calculer la fonction de répartition F_n de M_n. La variable aléatoire M_n admet-elle une densité (si oui, la donner) ?

5) Soit $\alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$; on pose $\widetilde{M_n} = \alpha_n M_n$. Calculer les espérances $\mathbb{E}\left(\widetilde{M_n}\right)$ et $\mathbb{E}\left(\widetilde{M_n}^2\right)$.

6) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour que $\widetilde{M_n}$ soit un estimateur asymptotiquement sans biais de A.

7) On suppose la condition de la question précédente réalisée. Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\widetilde{M_n} - A\right| > \varepsilon\right) = 0$.

8) Quel est le risque quadratique de $\widetilde{M_n}$? À quelle condition sur $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ s'agit-il d'un meilleur estimateur de A que S_n ?
En particulier, si on choisit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de façon à obtenir un estimateur sans biais de A, obtient-on un meilleur estimateur que S_n ?

Sujet S 109 - Exercice sans préparation

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et dont -1 et 1 sont des valeurs propres.
Démontrer que f est diagonalisable.

(Q1) • X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant un moment d'ordre 2.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $P(|X-E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$ et $P(|X-E(X)|>\varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

• Un estimateur T_n de $g(\theta)$ est sans biais si $E_\theta(T_n) = g(\theta)$ pour tout $\theta \in \Theta$

• Une suite d'estimateurs $(T_n)_{n\geqslant 1}$ de $g(\theta)$ est convergente si pour tout $\theta \in \Theta$, la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers $g(\theta)$.

(Q2) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $E(X_i)$ existe et vaut $\frac{A}{2}$.

Alors $E(\sum_{i=1}^n X_i)$ existe et vaut $\sum_{i=1}^n E(X_i)$ donc $n \times \frac{A}{2}$.

Donc $S_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ possède une espérance qui vaut A.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $V(X_i)$ existe et vaut $\dfrac{A^2}{12}$. De plus $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes

Alors $V(X_1+X_2+\dots+X_n)$ existe et vaut $V(X_1)+V(X_2)+\dots+V(X_n)$ soit $n \times \dfrac{A^2}{12}$.

Donc $S_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ possède une variance qui vaut $\dfrac{4}{n^2} \times n \times \dfrac{A^2}{12}$ c'est-à-dire $\dfrac{A^2}{3n}$.

(Q3) $V(S_n)$ existe et vaut $\dfrac{A^2}{3n}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $P(|S_n - E(S_n)|>\varepsilon) \leqslant \dfrac{V(S_n)}{\varepsilon^2}$ ou $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $P(|S_n - A| > \varepsilon) \leqslant \dfrac{A^2}{3n\varepsilon^2}$.

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{A^2}{3n\varepsilon^2} = 0$ donc par encadrement, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(|S_n - A| > \varepsilon) = 0$.

<u>Remarque</u>.. S_n est un estimateur sans biais et convergent de A.

(Q4) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i prend ses valeurs dans $[0,A]$ donc M_n prend ses valeurs dans $[0,A]$. Alors $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_n(x) = 0$ et $\forall x \in [A, +\infty[$, $F_n(x) = 1$.

$\forall x \in [0,A]$, $F_n(x) = P(M_n \leqslant x) = P(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i \leqslant x) = P(\{X_1 \leqslant x\} \cap \dots \cap \{X_n \leqslant x\}) = P(X_1 \leqslant x) \dots P(X_n \leqslant x)$

$\uparrow$ $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.

$\forall x \in [0,A[,\ F_n(x) \underset{\substack{\uparrow \\ X_1,\dots,X_n \text{ ont même loi}}}{=} (P(X_1 \leq x))^n = \left(\frac{x-0}{A-0}\right)^n = \frac{1}{A^n} x^n.$ $\quad X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([0,A])$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ \frac{1}{A^n} x^n & \text{si } x \in [0,A[\\ 1 & \text{si } x \in [A,+\infty[\end{cases}.$

Notons que $\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0] \\ \frac{1}{A^n} x^n & \text{si } x \in [0,A] \\ 1 & \text{si } x \in [A,+\infty[\end{cases}$. Or $x \mapsto 0$, $x \mapsto \frac{1}{A^n} x^n$ et $x \mapsto 1$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc F_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$, $[0,A]$, $[A,+\infty[$.

Cela suffit pour dire que F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}-\{0,A\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Alors Π_n est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in]-\infty,0[\cup]A,+\infty[,\ F_n'(x) = 0$ et $\forall x \in]0,A[,\ F_n'(x) = \frac{n}{A^n} x^{n-1}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{A^n} x^{n-1} & \text{si } x \in [0,A] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

f_n est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec F_n' sur $\mathbb{R}-\{0,A\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. f_n est une densité de Π_n.

(Q5) Soit $r \in \mathbb{N}$. $\int_{-\infty}^{0} t^r f_n(t)\,dt$ et $\int_{A}^{+\infty} t^r f_n(t)\,dt$ existent et valent 0.

$t \mapsto t^r f_n(t)$ est continue sur $[0,A]$ donc $\int_0^A t^r f_n(t)\,dt$ existe.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_n(t)\,dt$ converge. Π_n possède un moment d'ordre r.

$E(\Pi_n^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_n(t)\,dt = \int_0^A t^r f_n(t)\,dt = \frac{n}{A^n}\int_0^A t^{n-1+r}\,dt = \frac{n}{A^n}\left[\frac{t^{n+r}}{n+r}\right]_0^A = \frac{n}{n+r} A^r.$

$E(\Pi_n^r) = \frac{n}{n+r} A^r.$ En particulier $E(\Pi_n) = \frac{n}{n+1} A$ et $E(\Pi_n^2) = \frac{n}{n+2} A^2$.

or $\tilde{\Pi}_n = \alpha_n \Pi_n$. donc $E(\tilde{\Pi}_n)$ et $E(\tilde{\Pi}_n^2)$ existent.

$E(\tilde{\Pi}_n) = \alpha_n E(\Pi_n)$ et $E(\tilde{\Pi}_n^2) = \alpha_n^2 E(\Pi_n^2)$.

$E(\tilde{\Pi}_n) = \alpha_n \frac{n}{n+1} A$ et $E(\tilde{\Pi}_n^2) = \alpha_n^2 \frac{n}{n+2} A^2$.

Q6 $\lim_{n\to+\infty} E(\tilde{\Pi}_n) = A \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\alpha_n \times \frac{n}{n+1}\right) = 1$

→ Supposons $\lim_{n\to+\infty}\left(\alpha_n \times \frac{n}{n+1}\right) = 1$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, par produit $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$.

→ Réciproquement si $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$ alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\alpha_n \times \frac{n}{n+1}\right) = 1 \times 1 = 1$.

donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\alpha_n \times \frac{n}{n+1}\right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$. $\lim_{n\to+\infty} E(\tilde{\Pi}_n) = A \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$

$\tilde{\Pi}_n$ est asymptotiquement sans biais si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$.

Q7 Supposons que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

L'inégalité de Markov montre que $P(|\tilde{\Pi}_n - A| > \varepsilon) < \frac{E(|\tilde{\Pi}_n - A|^2)}{\varepsilon^2}$ car $\tilde{\Pi}_n - A$ possède un moment d'ordre 2.

$E((\tilde{\Pi}_n - A)^2) = E(\tilde{\Pi}_n^2) - 2A E(\tilde{\Pi}_n) + A^2$.

$\lim_{n\to+\infty} E(\tilde{\Pi}_n) = A$ et $\lim_{n\to+\infty} E(\tilde{\Pi}_n^2) = \lim_{n\to+\infty}\left(\alpha_n^2 \frac{n}{n+2} A^2\right) = 1^2 \times 1 \times A^2 = A^2$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} E(|\tilde{\Pi}_n - A|^2) = A^2 - 2A^2 + A^2 = 0$. Alors par encadrement $\lim_{n\to+\infty} P(|\tilde{\Pi}_n - A| > \varepsilon) = 0$

et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$. $\tilde{\Pi}_n$ est un estimateur asymptotiquement sans biais et convergent de A.

(Q8) Le risque quadratique de $\tilde{M}_n$ est $E((\tilde{M}_n - A)^2)$.

$$E((\tilde{M}_n - A)^2) = E(\tilde{M}_n^2) - 2A\,E(\tilde{M}_n) + A^2 = \alpha_n^2 \frac{n}{n+2} A^2 - 2A\,\alpha_n \frac{n}{n+1} A + A^2.$$

$$E((\tilde{M}_n - A)^2) = \left[\frac{n}{n+2}\alpha_n^2 - \frac{2n}{n+1}\alpha_n + 1\right] A^2.$$

Rappelons que le risque quadratique de S_n est $V(S_n)$ (il est sans biais) donc $\frac{A^2}{3n}$.

$\tilde{M}_n$ est un meilleur estimateur de A que S_n si et seulement si $\frac{n}{n+2}\alpha_n^2 - \frac{2n}{n+1}\alpha_n + 1 \leq \frac{1}{3n}$.

Considérons l'inéquation $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\frac{n}{n+2}x^2 - \frac{2n}{n+1}x + 1 \leq \frac{1}{3n}$ ou $x \in \mathbb{R}_+^*$ et

$\frac{n}{n+2}x^2 - \frac{2n}{n+1}x + \frac{3n-1}{3n} \leq 0$ ou $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\underbrace{x^2 - 2\frac{n+2}{n+1}x + \frac{(3n-1)(n+2)}{3n^2}}_{P(x)} \leq 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$P(x) = \left(x - \frac{n+2}{n+1}\right)^2 - \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 + \frac{(3n-1)(n+2)}{3n^2} = \left(x - \frac{n+2}{n+1}\right)^2 - \frac{(n+2)(n^2-n+1)}{3n^2(n+1)^2}$$

$$P(x) = \left(x - \frac{n+2}{n+1} + \sqrt{\frac{(n+2)(n^2-n+1)}{3n^2(n+1)^2}}\right)\left(x - \frac{n+2}{n+1} - \sqrt{\frac{(n+2)(n^2-n+1)}{3n^2(n+1)^2}}\right).$$

$$P(x) \leq 0 \iff x \in \left[\frac{n+2}{n+1} - \sqrt{\frac{(n+2)(n^2-n+1)}{3n^2(n+1)^2}}\ ,\ \frac{n+2}{n+1} + \sqrt{\frac{(n+2)(n^2-n+1)}{3n^2(n+1)^2}}\right]$$

Un calcul simple montre que la première borne de cet intervalle est strictement positive.

Alors $\tilde{M}_n$ est un meilleur estimateur de A que S_n si et seulement si

$$\alpha_n \in \left[\frac{n+2}{n+1} - \sqrt{\frac{(n+2)(3n^2-n+1)}{3n^2(n+1)^2}}\ ,\ \frac{n+2}{n+1} + \sqrt{\frac{(n+2)(n^2-n+1)}{3n^2(n+1)^2}}\right] \text{ !!}$$

Notons que si cette condition est vérifiée à partir d'un certain rang alors $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 1$ et $\tilde{M}_n$ est asymptotiquement sans biais.

$\tilde{\Pi}_n$ est sans biais ssi $E(\tilde{\Pi}_n) = A$.

$E(\tilde{\Pi}_n) = A \Longleftrightarrow \alpha_n \times \frac{n}{n+1} A = A \Longleftrightarrow \alpha_n = \frac{n+1}{n}$.

Supposons donc $\alpha_n = \frac{n+1}{n}$.

le risque quadratique de $\tilde{\Pi}_n$ est $E((\tilde{\Pi}_n - A)^2)$.

On $E((\tilde{\Pi}_n - A)^2) = \left[\frac{n}{n+2}\alpha_n^2 - \frac{2n}{n+1}\alpha_n + 1\right] A^2 = \left[\frac{n}{n+2}\times\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 - \frac{2n}{n+1}\times\frac{n+1}{n} + 1\right] A^2$

$E((\tilde{\Pi}_n - A)^2) = \left[\frac{(n+1)^2}{(n+2)n} - 1\right] A^2 = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{n(n+2)} A^2 = \frac{1}{n(n+2)} A^2$

$\frac{1}{n(n+2)} A^2 \leq \frac{1}{3n} A^2 \Longleftrightarrow \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{3} \Longleftrightarrow n \geq 1$.

Si $\tilde{\Pi}_n$ est sans biais, $\tilde{\Pi}_n$ est un meilleur estimateur que S_n.

Question 9 **HEC 2011** **S 109**

Soit f une endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et dont -1 et 1 sont des valeurs propres. Démontrer que f est diagonalisable.

Cours *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Estimateur sans biais, convergent*

1er Cas.. f n'est pas injectif. Alors 0 est valeur propre de f.

Donc f possède trois valeurs propres distinctes et f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3. Alors **f est diagonalisable**.

2ème Cas.. f est injectif. Comme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et que $\dim \mathbb{R}^3 < +\infty$: f est bijectif.

$f^4 = f^2$ donne en composant deux fois par f^{-1} : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, ou : $f^2 - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$

$X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de f dont les zéros sont -1 et 1. Alors $\mathrm{Sp}\, f \subset \{-1, 1\}$.

Comme -1 et 1 sont deux valeurs propres de f : $\underline{\mathrm{Sp}\, f = \{-1, 1\}}$. (1)

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ donc f est une symétrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

Alors $\underline{\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{SEP}(f, 1) \oplus \mathrm{SEP}(f, -1)}$ (2)

(1) et (2) montrent que **f est diagonalisable**.