Sujet S 112 - Exercice

Dans cet exercice toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1) Question de cours : Rappeler la définition de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires.

2) Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On considère deux suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires convergeant en probabilité, la première vers u, la seconde vers v.

   Démontrer que la suite de variables aléatoires $(U_n + V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $u + v$.

3) Dans cette question, on suppose les réels u et v supérieurs ou égaux à 1.

   a) Établir l'inégalité : $|\ln(u) - \ln(v)| \leqslant |u - v|$.

   b) En déduire que si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires ne prenant que des valeurs supérieures ou égales à 1, convergeant en probabilité vers u, la suite de variables aléatoires $\big(\ln(U_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\ln(u)$.

4) Dans cette question, x désigne un nombre réel strictement compris entre 0 et 1.

   a) Établir, pour tout $t \in [0, x]$, l'inégalité : $\dfrac{x - t}{1 - t} \leqslant x$.

   b) En déduire la limite de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t$ quand l'entier n tend vers l'infini.

   c) Démontrer l'égalité : $\ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.

5) Dans cette question, p désigne un paramètre strictement compris entre 0 et 1.
   Soit X une variable aléatoire discrète telle que, pour tout entier k strictement positif, la probabilité que la variable X prenne la valeur k soit donnée par : $\mathbb{P}[X = k] = \dfrac{(1-p)^k}{k \ln(\frac{1}{p})}$
   Le résultat de la question précédente, appliqué à $x = 1 - p$, prouve que X ne peut pas prendre d'autres valeurs.

   a) Établir l'égalité : $\dfrac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[X^2]} = p$, où $\mathbb{E}$ désigne l'espérance.

   b) Démontrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X, alors

$$\widehat{p_n}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (X_i)^2}$$ est un estimateur convergent du paramètre p.

Sujet S 112 - Exercice sans préparation

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On admet que $A^2 + I_3 = 2A$ où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

1) Montrer que A admet une seule valeur propre λ. A est-elle diagonalisable ?

2) Déterminer le sous-espace associé à λ.

3) Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

HEC 2011 S 112 Correction de l'exercice

Q1 Soit $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. La suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers X si

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0$;

ou $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$;

ou $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \leqslant \varepsilon) = 1$;

ou $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$.

Q2 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\omega \in \Omega$.

$|(U_n+V_n)(\omega) - (u+v)| = |(U_n(\omega) - u) + (V_n(\omega) - v)| \leqslant |U_n(\omega) - u| + |V_n(\omega) - v|$.

Ainsi si $|U_n(\omega) - u| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|V_n(\omega) - v| < \frac{\varepsilon}{2}$: $|(U_n+V_n)(\omega) - (u+v)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Alors $\{|U_n - u| < \frac{\varepsilon}{2}\} \cap \{|V_n - v| < \frac{\varepsilon}{2}\} \subset \{|(U_n+V_n) - (u+v)| < \varepsilon\}$

donc $\overline{\{|(U_n+V_n) - (u+v)| < \varepsilon\}} \subset \overline{\{|U_n - u| < \frac{\varepsilon}{2}\} \cap \{|V_n - v| < \frac{\varepsilon}{2}\}}$

Alors $\{|(U_n+V_n) - (u+v)| \geqslant \varepsilon\} \subset \overline{\{|U_n - u| < \frac{\varepsilon}{2}\}} \cup \overline{\{|V_n - v| < \frac{\varepsilon}{2}\}} = \{|U_n - u| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|V_n - v| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\}$

Par croissance de P il vient :

$0 \leqslant P(|(U_n+V_n) - (u+v)| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(\{|U_n - u| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|V_n - v| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\})$.

$0 \leqslant P(|(U_n+V_n) - (u+v)| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|U_n - u| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}) + P(|V_n - v| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}) - P(\{|U_n - u| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\} \cap \{|V_n - v| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\})$.

Alors $0 \leqslant P(|(U_n-V_n) - (u+v)| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|U_n - u| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}) + P(|V_n - v| \geqslant \frac{\varepsilon}{2})$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers u ⊙ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers v ⊙.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|U_n - u| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}) = \lim P(|V_n - v| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} [P(|U_n - u| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}) + P(|V_n - v| \geqslant \frac{\varepsilon}{2})] = 0$

Ainsi par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|(U_n+V_n) - (u+v)| \geqslant \varepsilon) = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $(U_n+V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $u+v$ ⊙.

⊙ Nous devrions dire vers la variable aléatoire certaine égale à ...

(Q3) a) ln est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$ et $\forall t \in [1,+\infty[$, $|\ln' t| = \left|\frac{1}{t}\right| = \frac{1}{t} \leq 1$.

Alors l'inégalité des accroissements finis montre que :

$\forall (u,v) \in [1,+\infty[\times [1,+\infty[$, $|\ln u - \ln v| \leq 1 \times |u-v|$.

$\forall (u,v) \in [1,+\infty[\times [1,+\infty[$, $|\ln u - \ln v| \leq |u-v|$.

b) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires ne prenant que des valeurs supérieures ou égales à 1 qui converge en probabilité vers u.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall \omega \in \Omega$, $|\ln U_n(\omega) - \ln u| \leq |U_n(\omega) - u|$ (*) ← Voir la remarque dans la suite.

$U_n(\omega) \geq 1$ et $u \geq 1$

Ainsi si $|\ln U_n(\omega) - \ln u| \geq \varepsilon$: $|U_n(\omega) - u| \geq \varepsilon$.

Alors $\{|\ln U_n - \ln u| \geq \varepsilon\} \subset \{|U_n - u| \geq \varepsilon\}$.

Donc $0 \leq P(|\ln U_n - \ln u| \geq \varepsilon) \leq P(|U_n - u| \geq \varepsilon)$ et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Or $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers u donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|U_n - u| \geq \varepsilon) = 0$.

Alors par encadrement on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|\ln U_n - \ln u| \geq \varepsilon) = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $(\ln U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\ln u$.

Remarque.- Pour justifier (*) :

1) Observons que $\forall \omega \in \Omega$, $U_n(\omega) \geq 1$ par hypothèse.

2) Notons que $u \geq 1$. Supposons $u < 1$ et posons $\varepsilon = 1 - u$. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$\forall \omega \in \Omega$, $U_n(\omega) \geq 1 = u + \varepsilon$. $\forall \omega \in \Omega$, $U_n(\omega) - u \geq \varepsilon > 0$.

Alors $\forall \omega \in \Omega$, $|U_n(\omega) - u| \geq \varepsilon$. Donc $P(|U_n - u| \geq \varepsilon) = 1$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Il est alors impossible d'avoir $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|U_n - u| \geq \varepsilon) = 0$! Donc $u \geq 1$.

(Q4) $x \in]0,1[$.

$1 - x > 0$, $t \in [0,x]$ donc $t \in [0,1]$.

a) Soit $t \in [0,x]$. $x - \dfrac{x-t}{1-t} = \dfrac{x - xt - x + t}{1-t} = \dfrac{t(1-x)}{1-t} \geq 0$; $\dfrac{x-t}{1-t} \leq x$.

$\forall t \in [0,x]$, $\dfrac{x-t}{1-t} \leq x$. Mieux $\forall t \in [0,x]$, $0 \leq \dfrac{x-t}{1-t} \leq x$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0,x]$, $0 \leq \dfrac{x-t}{1-t} \leq x$

Donc $\forall t \in [0,x]$, $0 \leq \left(\dfrac{x-t}{1-t}\right)^n \leq x^n$. Alors $0 \leq \displaystyle\int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt \leq \int_0^x x^n \underline{dt} = x^{n+1}$.

Comme $0 < x < 1$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$.

Alors par encadrement il vient $\displaystyle\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt = 0}}$.

c) Posons $\forall u \in]-\infty, 1[$, $\varphi(u) = \ln \dfrac{1}{1-u}$. $\forall u \in]-\infty, 1[$, $\varphi(u) = -\ln(1-u)$.

φ est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et $\forall u \in]-\infty, 1[$, $\varphi'(u) = \dfrac{1}{1-u}$.

φ' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$ donc φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$.

$\forall u \in]-\infty, 1[$, $\varphi'(u) = (1-u)^{-1}$, $\varphi''(u) = (1-u)^{-2}$, $\varphi'''(u) = 2(1-u)^{-3}$, $\varphi^{(4)}(u) = 2\times3(1-u)^{-4}$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall u \in]-\infty, 1[$, $\varphi^{(n)}(u) = (n-1)!\,(1-u)^{-n}$.

- La propriété est vraie pour $n = 1$
- Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.
  $\forall u \in]-\infty, 1[$, $\varphi^{(n)}(u) = (n-1)!\,(1-u)^{-n}$ donc $\forall u \in]-\infty, 1[$, $\varphi^{(n+1)}(u) = (n-1)!\,(-n)(-1)(1-u)^{-n-1}$.
  Alors $\forall u \in]-\infty, 1[$, $\varphi^{(n+1)}(u) = n!\,(1-u)^{-(n+1)}$ ce qui achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall u \in]-\infty, 1[$, $\varphi^{(n)}(u) = (n-1)!\,(1-u)^{-n} = \dfrac{(n-1)!}{(1-u)^n}$.

Notons encore que $\varphi(0) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^{(n)}(0) = (n-1)!$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons à φ la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n sur $[0,x]$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-0)^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t)\, dt.$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \times (k-1)! + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \times \frac{n!}{(1-t)^{n+1}}\, dt$$

$$\varphi(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{dt}{1-t}.$$

$\forall t \in [0,x],\ 0 \leqslant \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x}$ et $\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \geqslant 0$.

Alors $\forall t \in [0,x],\ 0 \leqslant \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{1-t} \leqslant \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{1-x}$. En intégrant il vient :

$0 \leqslant \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{dt}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt$ car $0 \leqslant x$.

Or $\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1-x}\int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt\right) = 0$.

Par encadrement il vient alors $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{dt}{1-t} = 0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} \left(\varphi(x) - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}\right) = 0$

donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = \varphi(x) = \ln \frac{1}{1-x}$.

Alors $\boxed{\begin{array}{l} \text{1) la série de terme général } \frac{x^k}{k} \text{ converge.} \\ \text{2) } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = \ln \frac{1}{1-x}. \end{array}}$

Q5 a) $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k\,P(X=k) = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{p}\right)} (1-p)^k$ et $0 < 1-p < 1$ $(p \in]0,1[)$.

Alors la série de terme général $(1-p)^k$ converge. Ainsi la série de terme général $k\,P(X=k)$ converge. De plus $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k\,P(X=k) \geqslant 0$.

Alors la série de terme général $k\,P(X=k)$ est absolument convergente.

Donc <u>$E(X)$ existe</u> et $E(X) = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{p}\right)} \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^k = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{p}\right)} \times (1-p) \times \frac{1}{1-(1-p)}$.

$E(X) = \frac{1-p}{p} \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{p}\right)}$

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k^2 P(X=k) = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{p}\right)} k(1-p)^k = \frac{1-p}{\ln\left(\frac{1}{p}\right)} \times k(1-p)^{k-1}$

La série de terme général $k(1-p)^{k-1}$ converge car $0 < 1-p < 1$.

Remarque.. On aurait gagné du temps en montrant que pour tout r dans $\mathbb{N}$, X possède un moment d'ordre r...

Ainsi la série de terme général $k^2 P(X=k)$ est convergente et même absolument convergente car elle est à termes positifs.

Ainsi $E(X^2)$ existe. De plus $E(X^2) = \frac{1-p}{\ln(\frac{1}{p})} \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1-p}{\ln(\frac{1}{p})} \frac{1}{(1-(1-p))^2}$.

$E(X^2) = \frac{1-p}{\ln(\frac{1}{p})} \frac{1}{p^2} = E(X) \times \frac{1}{p}$. De plus $E(X^2) \neq 0$.

Alors $\frac{E(X)}{E(X^2)} = p$.

b) Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2$.

- $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n)$ existe et vaut $\frac{1}{\ln(\frac{1}{p})} \frac{1-p}{p}$.
- Les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ possèdent un moment d'ordre deux donc une variance qui est commune car ces variables aléatoires ont même loi.

La loi faible des grands nombres montre alors que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\frac{1}{\ln(\frac{1}{p})} \frac{1-p}{p}$ ou vers $E(X)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, U_n qui est égale à $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$ prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$.

Alors Q3 b montre que $(\ln U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\ln(E(X))$.

- comme $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes donc $(X_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.
- les variables de la suite $(X_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ont une espérance commune qui vaut $\frac{1-p}{\ln(\frac{1}{p})} \times \frac{1}{p^2}$.

• Notons que X^2 possède un moment d'ordre 2 donc que $E(X^4)$ existe.

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $k^4 P(X=k) = \frac{1}{\ln\frac{1}{p}}\, k^3(1-p)^k$.

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $k^2(k^4 P(X=k)) = \frac{1}{\ln\frac{1}{p}}\, k^5(1-p)^k$.

Alors $\lim\limits_{k\to+\infty}(k^2(k^4P(X=k))) = \lim\limits_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln\frac{1}{p}}\, k^5(1-p)^k\right) = 0$ par croissance comparée car $0<1-p<1$.

Donc 1) $k^4P(X=k) \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$

2) $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $k^4P(X=k)\geqslant 0$ et $\frac{1}{k^2}\geqslant 0$

3) la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge.

Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $k^4P(X=k)$ converge et elle est même absolument convergente.
Donc X possède un moment d'ordre 4. Alors X^2 possède un moment d'ordre 2.
Ainsi les variables aléatoires de la suite $(X_n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possèdent un moment d'ordre 2 donc une variance qui est commune car les variables aléatoires ont même loi.
Ceci permet de dire que $\left(\frac{X_1^2+X_2^2+\dots+X_n^2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à $\frac{1-p}{\ln(\frac{1}{p})}\,\frac{1}{p^2}$ ou à $E(X^2)$.

Donc $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à $\frac{1-p}{\ln(\frac{1}{p})}\times\frac{1}{p^2}$ ou à $E(X^2)$

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, X_n^2 prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, V_n prend ses valeurs dans $[1,+\infty[$.

Ainsi $\ln V_n$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à $\ln\left(\frac{1-p}{\ln\frac{1}{p}}\,\frac{1}{p^2}\right)$ ou à $\ln(E(X^2))$.

Il est alors clair que la suite $(-\ln V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à $-\ln(E(X^2))$. **Exercice..** Le montrer !

Donc $\mathcal{P}_2$ permet de dire que $(\ln U_n + (-\ln V_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $\ln(E(X)) + (-\ln(E(X^2)))$.

Or $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\ln U_n - (-\ln V_n) = \ln \frac{U_n}{V_n}$ et $\ln(E(X)) + (-\ln(E(X^2))) = \ln \frac{E(X)}{E(X^2)} = \ln p$.

Alors $\left(\ln \frac{U_n}{V_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à $\ln p$.

Lemme.. Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ qui converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à c.
Alors la suite $(e^{Z_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à e^c.

Preuve du lemme.. Par hypothèse $\forall \varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n\mapsto+\infty} P(|Z_n - c| \geq \varepsilon') = 0$.

Soit $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(|Z_n - c| \geq \varepsilon') = P(\{Z_n - c \geq \varepsilon'\} \cup \{Z_n - c \leq -\varepsilon'\}) = P(Z_n - c \geq \varepsilon') + P(Z_n - c \leq -\varepsilon')$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(|Z_n - c| \geq \varepsilon') = P(Z_n \geq c+\varepsilon') + P(Z_n \leq c - \varepsilon')$.

les deux événements sont incompatibles.

Alors $\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}^*, 0 \leq P(Z_n \geq c+\varepsilon') \leq P(|Z_n - c| \geq \varepsilon') \\ \text{et} \\ \forall n\in\mathbb{N}^*, 0 \leq P(Z_n \leq c-\varepsilon') \leq P(|Z_n - c| \geq \varepsilon'). \end{cases}$

Comme $\lim_{n\mapsto+\infty} P(|Z_n - c| \geq \varepsilon') = 0$ il vient par encadrement :

$\lim_{n\mapsto+\infty} P(Z_n \geq c+\varepsilon') = \lim_{n\mapsto+\infty} P(Z_n \leq c-\varepsilon') = 0$ et ceci pour tout ε' dans $\mathbb{R}_+^*$.

Il s'agit maintenant de prouver que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n\mapsto+\infty} P(|e^{Z_n} - e^c| \geq \varepsilon) = 0$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(|e^{Z_n} - e^c| \geq \varepsilon) = P(\{e^{Z_n} \geq e^c + \varepsilon\} \cup \{e^{Z_n} \leq e^c - \varepsilon\}) = P(e^{Z_n} \geq e^c + \varepsilon) + P(e^{Z_n} \leq e^c - \varepsilon)$.

Montrons alors que $\lim_{n\mapsto+\infty} P(e^{Z_n} \geq e^c + \varepsilon) = \lim_{n\mapsto+\infty} P(e^{Z_n} \leq e^c - \varepsilon) = 0$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$

• $\{e^{Z_n} \geq e^c + \varepsilon\} = \{Z_n \geq \ln(e^c + \varepsilon)\}$. $P(e^{Z_n} \geq e^c + \varepsilon) = P(Z_n \geq \ln(e^c+\varepsilon))$.

Posons $\varepsilon' = \ln(e^c + \varepsilon) - c$. $\ln(e^c+\varepsilon) = c + \varepsilon'$ et $\varepsilon' = \ln(e^c+\varepsilon) - c > \ln(e^c) - c = 0$.

$\varepsilon > 0$

Alors $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$.

Donc $P(e^{Z_n} \geq e^c + \varepsilon) = P(Z_n \geq \ln(e^c+\varepsilon)) = P(Z_n \geq c + \varepsilon')$ et $\lim_{n\mapsto+\infty} P(Z_n \geq c+\varepsilon') = 0$

Ainsi $\lim_{n\mapsto+\infty} P(e^{Z_n} \geq e^c + \varepsilon) = 0$.

- Si $e^c - \varepsilon \leq 0$: $\lim\limits_{n \to +\infty} P(e^{Z_n} \leq e^c - \varepsilon) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(\emptyset) = 0$! Supposons $e^c - \varepsilon > 0$.

soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(e^{Z_n} \leq e^c - \varepsilon) = P(Z_n \leq \ln(e^c - \varepsilon)) = P(Z_n \leq c - (c - \ln(e^c - \varepsilon)))$.

Posons $\varepsilon' = c - \ln(e^c - \varepsilon)$. $\quad \varepsilon' = c - \ln(e^c - \varepsilon) \underset{\uparrow \ln(e^c - \varepsilon) < \ln e^c}{>} c - \ln e^c = 0$. $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} P(e^{Z_n} \leq e^c - \varepsilon) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(Z_n \leq c - \varepsilon') = 0$.

Finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} P(e^{Z_n} \geq e^c + \varepsilon) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(e^{Z_n} \leq e^c - \varepsilon) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|e^{Z_n} - e^c| \geq \varepsilon) = 0$ et

ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $(e^{Z_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à e^c.

ceci achève la preuve du lemme. ▲

Nous avions vu que $\left(\ln \frac{U_n}{V_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire

certaine égale à $\ln p$. Le lemme permet alors de dire que $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en

probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à $e^{\ln p}$ donc à p.

Finalement $\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine

égale à p.

Donc $\hat{P}_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$ est un estimateur convergent du paramètre p.

R..

Question 10 **HEC 2011** **S 112**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On admet que $A^2 + I_3 = 2A$ où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

Q1. Montrer que A admet une seule valeur propre λ. A est-elle diagonalisable ?

Q2. Déterminer le sous-espace propre associé à λ.

Q3. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cours *Rappeler la définition de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-2-2 & 6-2 & -6+2 \\ -3+1 & -2+1 & 2 \\ 3-1 & 2 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2A. \quad \underline{\underline{A^2 + I_3 = 2A}} \; !$$

Q1 $A^2 - 2A + I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de A dont le seul zéro est 1 dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$. $Sp_{\mathbb{R}} A \subset \{1\}$ et $Sp_{\mathbb{C}} A \subset \{1\}$

V1 Or A admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{C}$.

Ainsi 1 est la seule valeur propre de A.

V2 $Sp_{\mathbb{R}} A \subset \{1\}$. Supposons que 1 n'est pas valeur propre de A. Alors $A - I_3$ est inversible. Donc $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = (A - I_3)^2$ est inversible comme produit de deux matrices inversibles !

Cette contradiction montre que $1 \in Sp_{\mathbb{R}} A$... et que $1 \in Sp_{\mathbb{C}} A$

Ainsi <u>1 est la seule valeur propre de A</u>

Supposons que A soit diagonalisable. Alors $SEP(A,1) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Donc $3 = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \dim SEP(A,1) = 3 - rg(A - I_3)$; $rg(A - I_3) = 0$.

Alors $A - I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. $A = I_3$!!

Donc <u>A n'est pas diagonalisable</u>.

Q2 Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{R})$

$$AX=X \iff \begin{cases}3x+2y-2z=x\\-x+z=y\\x+y=z\end{cases} \iff \begin{cases}2(x+y-z)=0\\-x-y+z=0\\x+y-z=0\end{cases} \iff x+y-z=0.$$

<u>$SEP(A,1)$ est le plan vectoriel de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ d'équation $x+y-z=0$ dans la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.</u>

$$SEP(A,1)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\x+y\end{pmatrix};(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\left\{x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix};(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de cardinal 2 de $SEP(A,1)$ qui est de dimension 2.

Alors <u>$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(A,1)$.</u>

Q3 Posons $E=\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $E=\mathbb{R}^3$. Posons $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$.

Soit f l'endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$.

Pour montrer que B est semblable à A il suffit de montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $M_{\mathcal{B}'}(f)=B$.

→ <u>Analyse</u>.. Supposons que $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ soit une base de E telle que $M_{\mathcal{B}'}(f)=B$.

Alors $f(e'_1)=e'_1$, $f(e'_2)=e'_2$ et $f(e'_3)=e'_2+e'_3$.

Donc $e'_1\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$, $e'_2\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$, <u>$e'_2=(f-\mathrm{Id}_E)(e'_3)\in\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)$</u>.

Ainsi $e'_1\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$, $e'_2\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)$ et $e'_2=(f-\mathrm{Id}_E)(e'_3)$.

→ <u>Synthèse</u>, $\mathrm{Sp} f=\mathrm{Sp} A=\{1\}$. Comme $SEP(A,1)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$:

$SEP(f,1)=\mathrm{Vect}(e_1+e_3,\ e_2+e_3)$.

$M_{\mathcal{B}}(f-\mathrm{Id}_E)=A-I_3=\begin{pmatrix}2&2&-2\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Vect}(2e_1-e_2+e_3,\ 2e_1-e_2+e_3,\ -2e_1+e_2-e_3)$

$\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Vect}(2e_1-e_2+e_3)$. Remarquons que $2e_1-e_2+e_3=2(e_1+e_3)-(e_2+e_3)\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$.

Posons alors <u>$e'_2=2e_1-e_2+e_3$</u>. Notons que $e'_2=(f-\mathrm{Id}_E)(e_1)$. Posons alors <u>$e'_3=e_1$</u>

Posons enfin $e'_1 = e_1 + e_3$.

$e'_1 \in \ker(f - 3Id_E)$ donc $\underline{f(e'_1) = e'_1}$.

$e'_2 \in \ker(f - 3Id_E)$ donc $\underline{f(e'_2) = e'_2}$.

$e'_2 = (f - 3d_E)(e_1) = (f - 3d_E)(e'_3)$; $\underline{f(e'_3) = e'_2 + e'_3}$.

Montrons alors que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E. Comme le cardinal de $\mathcal{B}'$ coïncide avec la dimension de E il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0_E$.

$\alpha(e_1 + e_3) + \beta(2e_1 - e_2 + e_3) + \gamma e_1 = 0_E$

$(\alpha + 2\beta + \gamma) e_1 - \beta e_2 + (\alpha + \beta) e_3 = 0_E$. Comme (e_1, e_2, e_3) est libre :

$\alpha + 2\beta + \gamma = -\beta = \alpha + \beta = 0$. Alors $\beta = 0$, $\alpha = 0$ et $\gamma = 0$.

ceci achève de montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E. De plus $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$.

$M_{\mathcal{B}}(f) = A$ et $M_{\mathcal{B}'}(f) = B$ donc $\underline{\underline{A \text{ et } B \text{ sont semblables}}}$.

<u>Remarque</u>.. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$B = M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P = P^{-1} A P$. $\underline{\underline{B = P^{-1}AP}}$

<u>Exercice 1</u>.. Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

<u>Exercice 2</u>.. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.