HEC 2011 S 1152

Sujet S 1152 - Exercice

1) Question de cours : Théorème de d'Alembert-Gauss.
2) On considère l'équation (1) dont l'inconnue x est réelle :

$$x^3 - x^2 + k = 0 \quad (1).$$

Donner en fonction de $k \in \mathbb{R}$, le nombre de racines de (1).
3) On suppose que (1) possède trois racines (éventuellement confondues) que l'on note α, β et γ. On pose :

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma,\ \tau = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma \text{ et } \pi = \alpha\beta\gamma.$$

Montrer que $\sigma = 1$, $\tau = 0$, $\pi = -k$.
Réciproquement, si on suppose $\sigma = 1$, $\tau = 0$, $\pi = -k$, peut-on en déduire que les nombres α, β et γ sont les trois solutions de (1) ?
4) Soit a, b et c, trois réels donnés. On note $s = a + b + c$, $t = ab + ac + bc$ et $p = abc$.
On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant A pour matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
a) Montrer que s est une valeur propre de A et donner un vecteur propre associé à s.
b) Montrer que le plan vectoriel P d'équation $x + y + z = 0$ est stable par f.
c) On suppose qu'il existe une autre valeur propre $\lambda \neq s$. Montrer que le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ est inclus dans P.

Dans la suite, on suppose que : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $t = ab + ac + cb = 0$ et $a + b + c > 0$.

5) a) Montrer que a, b, c sont racines de (1) et $k \in [0, \frac{4}{27}]$.
b) Justifier l'existence d'une base orthonormée $\mathscr{V}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & v \\ 0 & w & r \end{pmatrix}$.
c) Montrer que $u = r$, $v = -w$ et $u^2 + w^2 = 1$. En déduire l'existence de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u = r = \cos\theta$ et $w = -v = \sin\theta$. L'endomorphisme f admet-il d'autres valeurs propres que 1 ?

Sujet S 1152 - Exercice sans préparation

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ i.i.d.. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k suit une loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.
On pose $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Etudier la convergence de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

HEC 2011 S 1152 correction de l'exercice

Q1 Théorème de d'Alembert-Gauss. et ses corollaires.

- Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine.
- Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé donc produit de polynômes de degré 1
- Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré r supérieur ou égal à 1 possède r racines comptées avec leurs ordres de multiplicité.

Q2

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - x^2$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2 - 2x = 3x\left(x - \frac{2}{3}\right)$.

$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]\frac{2}{3}, +\infty[$, $g'(x) > 0$; $\forall x \in]0, \frac{2}{3}[$, $g'(x) < 0$; $g'(0) = g'(\frac{2}{3}) = 0$.

Alors g est continue et strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]\frac{2}{3}, +\infty[$.

De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}^+} g(x) = -\frac{4}{27}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Ainsi g réalise une bijection de $]-\infty, 0[$ sur $]-\infty, 0[$ et de $]\frac{2}{3}, +\infty[$ sur $]-\frac{4}{27}, +\infty[$.

Donc $\forall \alpha \in]-\infty, 0[$, $\exists ! \, x \in]-\infty, 0[$, $g(x) = \alpha$

$\forall \alpha \in]-\frac{4}{27}, +\infty[$, $\exists ! \, x \in]\frac{2}{3}, +\infty[$, $g(x) = \alpha$.

g est strictement décroissante et continue sur $[0, \frac{2}{3}]$. De plus $g(0) = 0$ et $g(\frac{2}{3}) = -\frac{4}{27}$.

g définit alors une bijection de $[0, \frac{2}{3}]$ sur $[-\frac{4}{27}, 0]$.

$\forall \alpha \in [-\frac{4}{27}, 0]$, $\exists ! \, x \in [0, \frac{2}{3}]$, $g(x) = \alpha$.

Soit α un élément de $\mathbb{R}$.

Cherchons le nombre de solutions de l'équation $x \in \mathbb{R}$ et $g(x) = \alpha$ (2)

<u>1er cas.-</u> $\alpha \in]-\infty, -\frac{4}{27}[$. Alors (2) admet une solution et une seule sur $]-\infty, 0[$ et pas de solution sur $[0, \frac{2}{3}]$ et sur $[\frac{2}{3}, +\infty[$

2ième cas.. $\alpha = -\frac{4}{27}$. (2) admet alors une solution et une seule sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, \frac{2}{3}]$ et pas de solution sur $]\frac{2}{3}, +\infty[$.

3ième cas.. $\alpha \in]-\frac{4}{27}, 0[$. (2) admet une solution et une seule sur $]-\infty, 0[$, $[0, \frac{2}{3}]$ et sur $]\frac{2}{3}, +\infty[$.

4ième cas.. $\alpha = 0$. (2) admet une solution et une seule sur $[0, \frac{2}{3}]$ et sur $]\frac{2}{3}, +\infty[$ et pas de solution sur $]-\infty, 0[$.

5ième cas.. $\alpha \in]0, +\infty[$. (2) admet une solution et une seule sur $]\frac{2}{3}, +\infty[$ et pas de solution sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, \frac{2}{3}]$.

Ainsi (2) admet :
- → une solution si $\alpha \in]-\infty, -\frac{4}{27}[\cup]0, +\infty[$
- → deux solutions si $\alpha \in \{-\frac{4}{27}, 0\}$
- → trois solutions si $\alpha \in]-\frac{4}{27}, 0[$

$\forall k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \ x^3 - x^2 + k = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = -k$

Soit $k \in \mathbb{R}$. L'équation $x \in \mathbb{R}$ et $x^3 - x^2 + k = 0$ admet :
- → une solution si $k \in]-\infty, 0[\cup]\frac{4}{27}, +\infty[$.
- → deux solutions si $k \in \{0, \frac{4}{27}\}$
- → trois solutions si $k \in]0, \frac{4}{27}[$

Q3 Par hypothèse $X^3 - X^2 + k = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ car $X^3 - X^2 + k$ est un polynôme unitaire de degré 3 qui admet trois racines α, β et γ.

$X^3 - X^2 + k = (X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta)(X-\gamma) = X^3 - (\alpha+\beta)X^2 + \alpha\beta X - \gamma X^2 + \gamma(\alpha+\beta)X - \gamma\alpha\beta$.

Deux polynômes égaux ont les mêmes coefficients.

Ainsi $\begin{cases} 1 = 1 \\ -1 = -(\alpha+\beta) - \gamma \\ 0 = \alpha\beta + \gamma(\alpha+\beta) \\ k = -\gamma\alpha\beta \end{cases}$. Alors $\begin{cases} \sigma = \alpha+\beta+\gamma = 1 \\ \tau = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0 \\ \pi = \alpha\beta\gamma = -k \end{cases}$

$\sigma = 1$, $\tau = 0$ et $\pi = -k$.

Réciproquement supposons que $\sigma = 1$, $\tau = 0$ et $\Pi = -k$.

$(X-\alpha)(X-\beta)(X-\delta) = X^3 - (\alpha+\beta+\delta)X^2 + (\alpha\beta+\beta\delta+\delta\alpha)X - \alpha\beta\delta$

$(X-\alpha)(X-\beta)(X-\delta) = X^3 - \sigma X^2 + \tau X - \Pi = X^3 - X^2 + k$.

Les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$ sont α, β, δ.

Ainsi les solutions de (1) sont α, β et δ.

Finalement <u>α, β et δ sont les solutions de (1) si et seulement si $\sigma = 1$, $\tau = 0$ et $\Pi = -k$.</u>

Q4 a) Posons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $U \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ et $AU = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ c+a+b \\ b+c+a \end{pmatrix} = (a+b+c)U$.

Ainsi <u>$\rho = a+b+c$ est une valeur propre de A</u> et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ <u>est un vecteur propre associé.</u>

b) Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ un élément du plan P. $x+y+z=0$.

$f(u) = (ax+by+cz)e_1 + (cx+ay+bz)e_2 + (bx+cy+az)e_3$.

Or $(ax+by+cz)+(cx+ay+bz)+(bx+cy+az) = a(x+y+z)+b(y+z+x)+c(z+x+y) = 0$

Ainsi $f(u) \in P$.

$\forall u \in P$, $f(u) \in P$. <u>P est stable par f.</u>

c) Supposons qu'il existe une valeur propre λ pour f différente de ρ.

Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ un élément de $SEP(f, \lambda)$. $f(u) = \lambda u$.

Alors $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ cx+ay+bz \\ bx+cy+az \end{pmatrix}$. $\begin{cases} \lambda x = ax+by+cz \\ \lambda y = cx+ay+bz \\ \lambda z = bx+cy+az \end{cases}$

En ajoutant les trois équations il vient $\lambda(x+y+z) = (a+b+c)x + (a+b+c)y + (a+b+c)z$

$\lambda(x+y+z) = (a+b+c)(x+y+z)$; $(\lambda - (a+b+c))(x+y+z) = 0$.

Or $\lambda \neq \rho$ et $\rho = a+b+c$ donc $\lambda - (a+b+c) \neq 0$. Alors $x+y+z=0$ et $u \in P$.

$\forall u \in SEP(f,\lambda)$, $u \in P$. $SEP(f,\lambda) \subset P$.

<u>Si f admet une valeur propre λ distincte de ρ : $SEP(f,\lambda)$ est contenu dans P</u>

R.

Q5 a) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = 1+2\times 0 = 1$ et $a+b+c > 0$

Alors $a+b+c=1$.

Posons $\underline{k = -abc}$.

Alors $a+b+c=1$, $ab+bc+ca=0$ et $abc=-k$.

Ainsi a, b, c sont les racines de $x\in\mathbb{R}$ et $x^3-x^2+k=0$.

Supposons que $a=b=c$. Alors $ab+ac+cb = 3a^2$.

Donc $3a^2=0$. Alors $a=0$. mieux $a=b=c=0$. Ceci contredit le fait que $a^2+b^2+c^2=1$. Ainsi $x\in\mathbb{R}$ et $x^3-x^2+k=0$ admet au moins deux solutions distinctes. Ainsi d'après Q2 $\underline{\underline{k\in[0,\frac{4}{27}]}}$.

b) Comme $a+b+c=1$, $\Delta=1$. Alors 1 est valeur propre de A donc de f.

D'après Q4 a) $e_1+e_2+e_3$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.

Posons $D=\text{Vect}(e_1+e_2+e_3)$. D est une droite vectoriel de E et $\mathcal{B}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1+e_2+e_3))$ en est une base orthonormée.

$\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ étant une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, $D^\perp$ est l'hyperplan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+y+z=0$ dans la base $\mathcal{B}$ car $D=\text{Vect}(e_1+e_2+e_3)$.

Ainsi $D^\perp = P$. Alors $\mathbb{R}^3 = D\oplus P$. Soit $\mathcal{B}_2$ une base orthonormée de P.

Comme D et P sont supplémentaires et orthogonaux, $\mathcal{V}=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Posons $\mathcal{V}=(e'_1,e'_2,e'_3)$.

$f(e'_1)=e'_1$ car $e'_1\in D$ et $D=\text{Vect}(e_1+e_2+e_3)$.

P est stable par f et (e'_2,e'_3) est une base de P. Alors $f(e'_2)\in\text{Vect}(e'_2,e'_3)$ et $f(e'_3)\in\text{Vect}(e'_2,e'_3)$. Ainsi $\exists(u,w)\in\mathbb{R}^2$, $f(e'_2)=ue'_2+we'_2$ et $\exists(v,r)\in\mathbb{R}^2$, $f(e'_3)=ve'_2+re'_3$. Alors $M_{\mathcal{V}}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&u&v\\0&w&r\end{pmatrix}$.

Remarque : $e'_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1+e_2+e_3)$. On peut prendre $e'_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1-e_2)$ et $e'_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(e_1+e_2-2e_3)$.

Ainsi il existe une base orthonormée γ de $\mathbb{R}^3$ et quatre réels u, w, v, r tels que

$M_\gamma(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & v \\ 0 & w & r \end{pmatrix}$.

c) Soit Q la matrice de passage de B à γ.

1) Q est orthogonale car B et γ sont orthonormées.

2) ${}^tQAQ = Q^{-1}AQ = M_\gamma(f)$.

Notons que ${}^tAA = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2+b^2 & ab+ca+bc & ac+cb+ba \\ ba+ac+cb & b^2+a^2+c^2 & bc+ab+ca \\ ca+bc+ab & cb+ba+ac & c^2+b^2+a^2 \end{pmatrix}$.

Or $a^2+b^2+c^2 = 1$ et $ab+bc+ca = 0$. Ainsi ${}^tAA = I_n$. A est orthogonale.

Posons $A' = M(f)$. $A' = {}^tQAQ$.

${}^tA'A' = {}^t({}^tQAQ) \times {}^tQAQ = {}^tQ\,{}^tA\underbrace{Q\,{}^tQ}_{I_n}AQ = {}^tQ\underbrace{{}^tAA}_{I_n}Q = {}^tQQ = I_n$. A' est également orthogonale.

Alors $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^tA'A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & w \\ 0 & v & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & v \\ 0 & w & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u^2+w^2 & uv+wr \\ 0 & vu+rw & v^2+r^2 \end{pmatrix}$.

Ainsi $u^2+w^2 = v^2+r^2$ et $uv+wr = 0$.

$u^2+w^2 = 1$ donc $\exists\, \theta \in [0, 2\pi]$, $u = \cos\theta$ et $w = \sin\theta$.

$v^2+r^2 = 1$ donc $\exists\, \theta' \in [0, 2\pi]$, $r = \cos\theta'$ et $v = \sin\theta'$.

De plus $0 = uv + wr = \cos\theta \sin\theta' + \sin\theta\cos\theta' = \sin(\theta'+\theta)$.

Alors $\theta'+\theta \equiv 0\ [2\pi]$ ou $\theta'+\theta \equiv \pi\ [2\pi]$. $\theta' \equiv -\theta\ [2\pi]$ ou $\theta' \equiv \pi - \theta\ [2\pi]$.

1er cas.. $\theta' \equiv -\theta\ [2\pi]$. Alors $r = \cos\theta' = \cos(-\theta) = \cos\theta$ et $v = \sin\theta' = \sin(-\theta) = -\sin\theta$.

Alors $u = r = \cos\theta$ et $w = -v = \sin\theta$

2ème cas.. $\theta' \equiv \pi - \theta\ [2\pi]$. Alors $r = \cos\theta' = \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ et $v = \sin\theta' = \sin(\pi-\theta) = \sin\theta$

$u = -r = \cos\theta$ et $w = v = \sin\theta$

Alors $M_r(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}$.

Notons que la trace de $M_r(f)$ vaut 1. Or $M_r(f)$ et A sont semblables donc A a pour trace 1. Ainsi $3a=1$ donc $a=\frac{1}{3}$.

$$M_r(f^2)=M_r(f)\times M_r(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos^2\theta+\sin^2\theta&\cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta\\0&\sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin\theta&\sin^2\theta+\cos^2\theta\end{pmatrix}$$

Ainsi $M_r(f^2)=I_3$; $f^2=Id_{\mathbb{R}^3}$. Alors $A^2=I_3$

donc $\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Le premier coefficient de A^2 est à la fois a^2+2bc et 1.

Ainsi $a^2+2bc=1$. Alors $2bc=1-a^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$. $bc=\frac{4}{9}$.

Rappelons que $a+b+c=1$ et $ab+bc+ca=0$.

Alors $b+c=1-a=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ et $0=bc+a(b+c)=bc+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$; $bc=-\frac{2}{9}$!!

Finalement le second cas est impossible.

Par conséquent $\exists\,\theta\in[0,2\pi]$ tel que $u=r=\cos\theta$ et $w=-v=\sin\theta$.

Alors $M_r(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$.

Si $\theta\equiv0\,[2\pi]$, $M_r(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $Sp\,f=\{1\}$.

Si $\theta\equiv\pi\,[2\pi]$, $M_r(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ et $Sp\,f=\{-1,1\}$.

Supposons $\theta\not\equiv0\,[2\pi]$ et $\theta\not\equiv\pi\,[2\pi]$. $\sin\theta\neq0$.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}-\{1\}$ et u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x,y,z) dans la base r.

$$f(u)=\lambda u\iff\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff\begin{cases}(1-\lambda)x=0\\(\cos\theta-\lambda)y-\sin\theta\,z=0\\\sin\theta\,y+(\cos\theta-\lambda)z=0\end{cases}\underset{\sin\theta\neq0}{\overset{\lambda\neq1}{\iff}}\begin{cases}x=0\\z=\dfrac{\cos\theta-\lambda}{\sin\theta}y\\\sin\theta\,y+(\cos\theta-\lambda)\dfrac{\cos\theta-\lambda}{\sin\theta}y=0\end{cases}$$

$$f(u)=\lambda u \iff \begin{cases} x=0 \\ z=\dfrac{\cos\theta-\lambda}{\sin\theta}\,y \\ 0=y\,\dfrac{1}{\sin\theta}\Big[\underbrace{\sin^2\theta}_{>0}+\underbrace{(\cos\theta-\lambda)^2}_{\geq 0}\Big] \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

. λ n'est pas valeur propre de f.

<u>Ainsi f admet d'autres valeurs propres que 1 si et seulement si $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$</u>

<u>ou si et seulement si $\Pi_{\gamma}(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.</u>

<u>Exercice.</u> On revient au cas général.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Question 2 HEC 2011 S 1152

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ i.i.d..

On suppose que, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, la variable alétoire X_k suit une loi uniforme sur le segment $[0,1]$.

On pose $Y_n = \text{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Étudier la convergence de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Cours *Théorème de d'Alembert-Gauss* ↑ ??

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n.

Y_n prend ses valeurs dans $[0,1]$. Ainsi $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_{Y_n}(x) = 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $F_{Y_n}(x) = 1$.

Soit $x \in [0,1[$, $F_{Y_n}(x) = P(Y_n \leqslant x) = P(\text{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leqslant x)$.

$F_{Y_n}(x) = P(\{X_1 \leqslant x\} \cap \{X_2 \leqslant x\} \cap \ldots \cap \{X_n \leqslant x\}) = P(X_1 \leqslant x)\, P(X_2 \leqslant x) \ldots P(X_n \leqslant x)$.

↑ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes

Or $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(X_k \leqslant x) = x$ car $x \in [0,1[$ et X_k suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Donc $F_{Y_n}(x) = x^n$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x^n & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$ et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $$\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $$\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}.$$

Soit Y la variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ constante égale à 1. Soit F_Y sa fonction de répartition. $\forall x \in \mathbb{R}$, $$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}.$$

Si $x \in \mathbb{R}$, F_Y est continue en x si et seulement si $x \neq 1$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = F_Y(x)$.

Alors <u>$(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers Y c'est à dire vers la variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ constante et égale à 1.</u>

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = P(\{Y_n - 1 \geq \varepsilon\} \cup \{Y_n - 1 \leq -\varepsilon\}) = P(Y_n - 1 \geq \varepsilon) + P(Y_n - 1 \leq -\varepsilon)$.

Incompatibilité

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = P(Y_n \geq 1+\varepsilon) + P(Y_n \leq 1-\varepsilon) = 0 + P(Y_n \leq 1-\varepsilon) = P(Y_n \leq 1-\varepsilon)$.

Y_n prend ses valeurs dans $[0,1]$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1-\varepsilon < 0 \\ (1-\varepsilon)^n & \text{si } 1-\varepsilon \geq 0 \quad (\text{dans ce cas } 1-\varepsilon \in [0,1[) \end{cases}$$

Si $1-\varepsilon < 0$: $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = 0$

Si $1-\varepsilon \geq 0$: $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = \lim\limits_{n \to +\infty} (1-\varepsilon)^n = 0$ $\quad 1-\varepsilon \in [0,1[$

Donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = 0$. $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 1.

Remarque.. On aurait dû commencer par ce second point car la convergence en probabilité donne la convergence en loi !

Notons que lorsque la limite est une variable certaine il y a équivalence entre les deux convergences.

Cela étant je tenais à exposer les deux convergences !