HEC 2011 S 1157

Sujet S 1157 - Exercice

1) Question de cours : Estimateur sans biais et convergent d'un paramètre réel inconnu.

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$, et pour n entier supérieur ou égal à 2, soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon i.i.d. de la loi de X. On suppose que la loi de X dépend d'un paramètre réel θ non nul inconnu.

On note $\mathscr{E}_\theta$ l'ensemble des estimateurs $T_n = T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de θ sans biais et admettant une variance.

On admet l'existence d'un estimateur $\hat{T}_n$ de $\mathscr{E}_\theta$ de variance minimale : on dit que $\hat{T}_n$ est optimal dans $\mathscr{E}_\theta$.

Soit T_n et U_n deux éléments de $\mathscr{E}_\theta$.

On pose, pour tout réel α : $S_\alpha(T_n, U_n) = T_n + \alpha(U_n - T_n)$.

2) Montrer que $S_\alpha(T_n, U_n)$ appartient à $\mathscr{E}_\theta$.
3) a) Etablir pour tout réel α, l'inégalité ($\mathbb{V}$ désigne la variance et **Cov** la covariance) :

$$\alpha^2\mathbb{V}\left(U_n - \hat{T}_n\right) + 2\alpha\,\mathbf{Cov}\left(\hat{T}_n, U_n - \hat{T}_n\right) \geqslant 0.$$

   b) En déduire que $\mathbf{Cov}\left(\hat{T}_n, U_n - \hat{T}_n\right) = 0$.
4) Réciproquement, montrer que si $\mathbf{Cov}(T_n, U_n - T_n) = 0$ pour tout U_n de $\mathscr{E}_\theta$, alors T_n est optimal dans $\mathscr{E}_\theta$.
5) On suppose l'existence de deux estimateurs optimaux $\hat{T}_n$ et T_n^* dans $\mathscr{E}_\theta$. Montrer que $T_n^* = \hat{T}_n$ presque sûrement.
6) Dans cette question, X suit la loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$.

   On pose : $\hat{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $W_n = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \hat{X}_n\right)^2$.

   a) Montrer que $\hat{X}_n$ et W_n sont des estimateurs sans biais de θ.

   b) On admet que $\hat{X}_n$ est optimal dans $\mathscr{E}_\theta$ et que W_n admet une variance.

   Montrer que : $\mathbf{Cov}\left(\hat{X}_n, W_n\right) = \dfrac{\theta}{n}$.

Sujet S 1157 - Exercice sans préparation

Soit E l'espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles.

Soit Φ l'endomorphisme de E qui, à toute suite (u_n) de E, associe la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

1) Déterminer les noyaux de Φ, de $\Phi\circ\Phi$ et de Φ^k pour $k \geqslant 3$ et leurs dimensions respectives.
2) Quelle est l'image de Φ ?

HEC 2011 S 1137 Correction de l'exercice

Q1 $(T_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'estimateurs d'un paramètre $g(\theta)$.

- T_n est sans biais si $E_\theta(T_n)=g(\theta)$ (... pour tout $\theta\in\Theta$)
- $(T_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'estimateurs, du paramètre $g(\theta)$, convergente si $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers $g(\theta)$ (... pour tout $\theta\in\Theta$)

Q2 $S_\alpha(T_n,U_n)=T_n+\alpha(U_n-T_n)=\alpha U_n+(1-\alpha)T_n$. Rappelons que U_n et T_n appartiennent à $\mathcal{E}_\theta$.

U_n et T_n possèdent une espérance et une variance. Il en est de même pour $S_\alpha(T_n,U_n)$ car $S_\alpha(T_n,U_n)$ est une combinaison linéaire de U_n & T_n.

De plus $E(S_\alpha(T_n,U_n))=\alpha E(U_n)+(1-\alpha)E(T_n)=\alpha\theta+(1-\alpha)\theta=\theta$.

Alors $E(S_\alpha(T_n,U_n))$ est un estimateur sans biais de θ qui admet une variance.

Donc $S_\alpha(T_n,U_n)\in\mathcal{E}_\theta$. **Pour tout réel α, $S_\alpha(T_n,U_n)$ appartient à $\mathcal{E}_\theta$**

Q3 a) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. U_n et $\hat{T}_n$ possèdent une variance donc $U_n-\hat{T}_n$ possède une variance.

$\hat{T}_n$ et $U_n-\hat{T}_n$ possèdent un moment d'ordre 2 donc $cov(\hat{T}_n,U_n-\hat{T}_n)$ existe.

$S_\alpha(T_n,U_n)\in\mathcal{E}_\theta$ et $\hat{T}_n$ est un élément de $\mathcal{E}_\theta$ de variance minimale.

Alors $V(\hat{T}_n)\leq V(S_\alpha(T_n,U_n))=V(T_n+\alpha(U_n-T_n))=V(T_n)+V(\alpha(U_n-T_n))+2cov(T_n,\alpha(U_n-T_n))$.

$V(\hat{T}_n)\leq V(T_n)+\alpha^2V(U_n-T_n)+2\alpha\, cov(T_n,U_n-T_n)$ ... et ceci pour tout $T_n\in\mathcal{E}_\theta$.

Comme $\hat{T}_n\in\mathcal{E}_\theta$ en remplaçant dans ce qui précède T_n par $\hat{T}_n$ il vient :

$V(\hat{T}_n)\leq V(\hat{T}_n)+\alpha^2V(U_n-\hat{T}_n)+2\alpha\, cov(\hat{T}_n,U_n-\hat{T}_n)$.

Donc **$\alpha^2V(U_n-\hat{T}_n)+2\alpha\, cov(\hat{T}_n,U_n-\hat{T}_n)\geq 0$ et ceci pour tout α dans $\mathbb{R}$**

b) Alors $\forall\alpha\in]0,+\infty[$, $\alpha V(U_n-\hat{T}_n)+2cov(\hat{T}_n,U_n-\hat{T}_n)\geq 0$ (1)

et $\forall\alpha\in]-\infty,0[$, $\alpha V(U_n-\hat{T}_n)+2cov(\hat{T}_n,U_n-\hat{T}_n)\leq 0$ (2)

En faisant tendre α vers 0 par valeurs supérieures (resp. inférieures) dans (1) (resp. (2))

...

il vient $2\,cov(\hat{T}_n, U_n - \hat{T}_n) \geq 0$ (resp. $2\,cov(\hat{T}_n, U_n - \hat{T}_n) \leq 0$).

Ainsi $2\,cov(\hat{T}_n, U_n - \hat{T}_n) = 0$.

donc $cov(\hat{T}_n, U_n - \hat{T}_n) = 0$. et ceci pour tout U_n dans $\mathcal{E}_\theta$.

Q4 Soit $T_n \in \mathcal{E}_\theta$ tel que : $\forall U_n \in \mathcal{E}_\theta$, $cov(T_n, U_n - T_n) = 0$.

Soit $U_n \in \mathcal{E}_\theta$. $0 = cov(T_n, U_n - T_n) = cov(T_n, U_n) - cov(T_n, T_n) = cov(T_n, U_n) - V(T_n)$.

Alors $V(T_n) = cov(T_n, U_n)$.

$(V(T_n))^2 = (cov(T_n, U_n))^2 \overset{\text{cauchy}}{\leq} V(T_n)\,V(U_n)$. (3)

1er cas.. $V(T_n) = 0$. Alors $V(T_n) = 0 \leq V(U_n)$.

2e cas.. $V(T_n) \neq 0$. Alors $V(T_n) > 0$. En divisant (3) par $V(T_n)$ il vient $V(T_n) \leq V(U_n)$.

Finalement $\forall U_n \in \mathcal{E}_\theta$, $V(T_n) \leq V(U_n)$.

Alors T_n est optimal dans $\mathcal{E}_\theta$... si $T_n \in \mathcal{E}_\theta$ et si $\forall U_n \in \mathcal{E}_\theta$, $cov(T_n, U_n - T_n) = 0$.

Q5 Soient $\hat{T}_n$ et T_n^* deux estimateurs optimaux dans $\mathcal{E}_\theta$

Alors $cov(\hat{T}_n, T_n^* - \hat{T}_n) = cov(T_n^*, \hat{T}_n - T_n^*) = 0$ d'après Q3.

donc $0 = cov(\hat{T}_n, T_n^* - \hat{T}_n) + cov(T_n^*, \hat{T}_n - T_n^*) = cov(\hat{T}_n, T_n^* - \hat{T}_n) - cov(T_n^*, T_n^* - \hat{T}_n)$.

donc $0 = cov(\hat{T}_n - T_n^*, T_n^* - \hat{T}_n) = -cov(\hat{T}_n - T_n^*, \hat{T}_n - T_n^*) = -V(\hat{T}_n - T_n^*)$.

Ainsi $V(\hat{T}_n - T_n^*) = 0$. Alors $\hat{T}_n - T_n^*$ est presque sûrement constante.

mais $\hat{T}_n$ et T_n^* sont dans $\mathcal{E}_\theta$. Ainsi $E(\hat{T}_n) = E(T_n^*) = \theta$. Alors $E(\hat{T}_n - T_n^*) = 0$.

Alors $\hat{T}_n - T_n^*$ est presque sûrement égale à 0.

donc $\hat{T}_n$ et T_n^* sont presque sûrement égales ou égaux... $P(\hat{T}_n = T_n^*) = 1$.

Q6 a) $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $E(X_i) = \theta$ donc $E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta = \frac{1}{n}\,n\,\theta = \theta$.

$\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais de θ.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $V(X_i)$ existe et vaut θ.

De plus $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes. Alors $X_1+X_2+\dots+X_n$ possède une variance qui vaut $n\theta$.

Donc $\widehat{X}_n = \frac{1}{n}(X_1+X_2+\dots+X_n)$ possède une variance qui vaut $\frac{1}{n^2} \times n\theta$ c'est à dire $\frac{1}{n}\theta$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $(X_i-\widehat{X}_n)^2 = ((X_i-\theta)-(\widehat{X}_n-\theta))^2 = [(X_i-E(X_i))-(\widehat{X}_n-E(\widehat{X}_n))]^2$

$(X_i-\widehat{X}_n)^2 = (X_i-E(X_i))^2 + (\widehat{X}_n-E(\widehat{X}_n))^2 - 2(X_i-E(X_i))(\widehat{X}_n-E(\widehat{X}_n))^2$

- X_i possède une variance qui vaut θ donc $E((X_i-E(X_i))^2)$ existe et vaut θ.
- $\widehat{X}_n$ possède une variance qui vaut $\frac{1}{n}\theta$ donc $E((\widehat{X}_n-E(\widehat{X}_n))^2)$ existe et vaut $\frac{1}{n}\theta$.
- X_i et $\widehat{X}_n$ possèdent un moment d'ordre 2 donc $\mathrm{cov}(X_i,\widehat{X}_n)$ existe.

Alors $E((X_i-E(X_i))(\widehat{X}_n-E(\widehat{X}_n)))$ existe et est égal à $\mathrm{cov}(X_i,\widehat{X}_n)$.

les trois points précédents montrent que :

1) $E((X_i-\widehat{X}_n)^2)$ existe

2) $E((X_i-\widehat{X}_n)^2) = \theta + \frac{1}{n}\theta - 2\mathrm{cov}(X_i,\widehat{X}_n)$.

si $k \neq i$, X_i et X_k sont indépendantes et leur covariance est nulle.

$\mathrm{cov}(X_i,\widehat{X}_n) = \mathrm{cov}(X_i, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{cov}(X_i,X_k) \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{n}\mathrm{cov}(X_i,X_i) = \frac{1}{n}V(X_i) = \frac{1}{n}\theta$.

Alors $E((X_i-\widehat{X}_n)^2) = \theta + \frac{1}{n}\theta - 2\times\frac{1}{n}\theta = \theta - \frac{1}{n}\theta = \frac{n-1}{n}\theta$ ... et ceci pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

Ainsi 1) $W_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\widehat{X}_n)^2$ possède une espérance

2) $E(W_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n E(X_i-\widehat{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \frac{n-1}{n}\theta = \frac{1}{n-1}\times n \times \frac{n-1}{n}\theta = \theta$.

<u>W_n est un estimateur sans biais de θ.</u>

<u>b)</u> Par hypothèse W_n admet une variance. Comme W_n est un estimateur sans biais de θ, alors W_n est un élément de $\mathcal{E}_\theta$. Or $\widehat{X}_n$ est optimal dans $\mathcal{E}_\theta$ donc $\mathrm{cov}(\widehat{X}_n, W_n-\widehat{X}_n)=0$.

Ainsi $0 = \mathrm{cov}(\widehat{X}_n,W_n) - \mathrm{cov}(\widehat{X}_n,\widehat{X}_n) = \mathrm{cov}(\widehat{X}_n,W_n) - V(\widehat{X}_n) = \mathrm{cov}(\widehat{X}_n,W_n) - \frac{\theta}{n}$.

Par conséquent <u>$\mathrm{cov}(\widehat{X}_n,W_n) = \frac{\theta}{n}$.</u>

R

Question 4 HEC 2011 S 1157

E est l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

Φ est l'endomorphisme de E qui à tout éléments $(u_n)_{n\geqslant 0}$ associe $(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$.

Q1. Déterminer les noyaux de Φ, $\Phi\circ\Phi$ et Φ^k pour $k\in [\![3,+\infty[\![$?

Q2. Quelle l'image de Φ.

Cours *Définition d'un estimateur sans biais et convergent d'un paramètre réel inconnu.*

Q1 * Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de E.

$(u_n)_{n\geqslant 0}\in \operatorname{Ker}\phi \iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=0 \iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n$.

$(u_n)_{n\geqslant 0}\in \operatorname{Ker}\phi \iff (u_n)_{n\geqslant 0}$ est constante.

Ker ϕ est le sous-espace vectorielle constitué par les suite constantes de E.

Ker ϕ est encore la droite vectorielle engendrée par la suite constante égale à 1.

Remarque.. $\operatorname{Ker}\phi=\{(P(n))_{n\geqslant 0}\ ;\ P\in\mathbb{R}_0[X]\}$.

* Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$. $\phi((u_n)_{n\geqslant 0})=(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$.

$\phi^2((u_n)_{n\geqslant 0})=\phi((u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0})=((u_{n+2}-u_{n+1})-(u_{n+1}-u_n))_{n\geqslant 0}=(u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n)_{n\geqslant 0}$.

$(u_n)_{n\geqslant 0}\in\operatorname{Ker}\phi^2 \iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n=0$.

L'équation $x\in\mathbb{C}$ et $x^2-2x+1=0$ admet une solution et une seule 1.

Le cours indique alors que : $(u_n)_{n\geqslant 0}\in\operatorname{Ker}\phi^2 \iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\alpha+\beta n$.

$\operatorname{Ker}\phi^2=\{(u_n)_{n\geqslant 0}\in E \mid \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\alpha+\beta n\}$.

$\operatorname{Ker}\phi^2=\operatorname{Vect}((1)_{n\geqslant 0},(n)_{n\geqslant 0})$.

Remarque.. $\operatorname{Ker}\phi^2=\{(P(n))_{n\geqslant 0}\ ;\ P\in\mathbb{R}_1[X]\}$.

* Montrons par récurrence que pour tout $\ell \in [\![1,+\infty[\![$, $\operatorname{Ker}\phi^\ell = \{(P(n))_{n\geq 0} ; P \in \mathbb{R}_{\ell-1}[X]\}$

→ la propriété est vraie pour $\ell = 1$ (et 2 !) d'après ce qui précède.

→ Supposons la propriété vraie pour ℓ dans $\mathbb{N}^*$ et montrons-la pour $\ell+1$.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ un élément de E.

$(u_n)_{n\geq 0} \in \operatorname{Ker}\phi^{\ell+1}$

$\Updownarrow$ $\phi^{\ell+1}((u_n)_{n\geq 0}) = 0_E$

$\Updownarrow$ $\phi^\ell(\phi((u_n)_{n\geq 0})) = 0_E$

$\Updownarrow$ $\phi((u_n)_{n\geq 0}) \in \operatorname{Ker}\phi^\ell$

$\Updownarrow$ $\exists Q \in \mathbb{R}_{\ell-1}[X],\ \phi((u_n)_{n\geq 0}) = (Q(n))_{n\geq 0}$

$\Updownarrow$ $\exists Q \in \mathbb{R}_{\ell-1}[X],\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = Q(n)$.

<u>Lemme</u>.. $\forall Q \in \mathbb{R}_{\ell-1}[X],\ \exists P \in \mathbb{R}_\ell[X],\ P(X+1) - P(X) = Q(X)$.

▲ <u>Preuve du lemme</u>. Posons $\forall U \in \mathbb{R}[X],\ \Delta U = U(X+1) - U(X)$.

. Δ est une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(U,V) \in \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X]$

$\Delta(\lambda U+V) = (\lambda U+V)(X+1) - (\lambda U+V)(X) = \lambda U(X+1) + V(X+1) - \lambda U(X) - V(X)$.

$\Delta(\lambda U+V) = \lambda(U(X+1) - U(X)) + V(X+1) - V(X) = \lambda\Delta U + \Delta V$.

Δ est linéaire.

Alors <u>Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$</u>.

$$\Delta(\mathbb{R}_\ell[X]) = \Delta(\operatorname{Vect}(1, X, \dots, X^\ell)) = \operatorname{Vect}(\Delta 1, \Delta X, \dots, \Delta X^\ell) \overset{\Delta 1 = 0}{=} \operatorname{Vect}(\Delta X, \Delta X^2, \dots, \Delta X^\ell).$$

$$\forall i \in [\![1,\ell]\!],\ \Delta X^i = (X+1)^i - X^i = \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}X^j - X^i = \sum_{j=0}^{i-1}\binom{i}{j}X^j.$$

Alors $\forall i \in [\![1,\ell]\!]$, $\deg \Delta X^i = i-1$.

Alors $(\Delta X, \Delta X^2, \dots, \Delta X^k)$ est une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ de degrés échelonnés. c'est donc une famille libre de cardinal k de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ qui est de dimension k.

$(\Delta X, \Delta X^2, \dots, \Delta X^k)$ est donc une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Alors $\Delta \mathbb{R}_k[X] = \mathrm{Vect}(\Delta X, \Delta X^2, \dots, \Delta X^k) = \mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Alors $\forall Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X], \exists P \in \mathbb{R}_k[X], \Delta P = Q$. Ou encore :

$\forall Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X], \exists P \in \mathbb{R}_k[X], P(X+1) - P(X) = Q$. ceci achève la preuve du lemme. ▲

$(u_n)_{n \geq 0} \in \mathrm{Ker}\, \phi^{k+1}$

$\Updownarrow$

$\exists Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = Q(n)$ $\quad\downarrow$ lemme $\quad\uparrow$ si $P \in \mathbb{R}_k[X]$, $P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$

$\Updownarrow$

$\exists P \in \mathbb{R}_k[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = P(n+1) - P(n)$

$\Updownarrow$

$\exists P \in \mathbb{R}_k[X], \forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1} - P(n+1)) - (u_n - P(n)) = 0$

$\Updownarrow$

$\exists P \in \mathbb{R}_k[X], \phi\left((u_n - P(n))_{n \geq 0}\right) = 0_E$

$\Updownarrow$

$\exists P \in \mathbb{R}_k[X], \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n - P(n) = \lambda$.

$\Updownarrow$

$\exists P \in \mathbb{R}_k[X], \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = P(n) + \lambda = (P + \lambda)(n)$

$\Updownarrow$

$\exists \hat{P} \in \mathbb{R}_k[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \hat{P}(n)$

Ainsi $\mathrm{Ker}\, \phi^{k+1} = \{(\hat{P}(n))_{n \geq 0} ; \hat{P} \in \mathbb{R}_k[X]\}$ ce qui achève la récurrence.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Ker}\, \phi^k = \{(\hat{P}(n))_{n \geq 0} ; P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]\}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Ker}\, \phi^k = \{(u_n)_{n \geq 0} \in E \mid \exists (a_0, a_1, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^k, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_0 + a_1 n + \dots + a_{k-1} n^{k-1}\}$

Exercice.. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $((1)_{n \geq 0}, (n)_{n \geq 0}, \dots, (n^{k-1})_{n \geq 0})$ est une base de $\mathrm{Ker}\, \phi^k$.

Q2 <u>une petite analyse.</u> Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ un élément de E.

supposons que $(v_n)_{n\geq 0}$ appartient à $\mathrm{Im}\,\phi$. Alors $\exists (u_n)_{n\geq 0}\in E$, $\phi((u_n)_{n\geq 0})=(v_n)_{n\geq 0}$:

donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=v_n$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=(u_n-u_0)+u_0=\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)+u_0 = \sum_{k=0}^{n-1}v_k+u_0$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\sum_{k=0}^{n-1}v_k+u_0$.

Pas trop de doute il semble bien que tout élément de E possède au moins un antécédent par ϕ donc que $\mathrm{Im}\,\phi=E$. Rationalisons.

Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ un élément de E. Posons $u_0=0$ (ou c avec $c\in\mathbb{R}$!) et

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\sum_{k=0}^{n-1}v_k$ (ou $\sum_{k=0}^{n-1}v_k+c$ ...).

1) $(u_n)_{n\geq 0}\in E$.

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}-u_n=\sum_{k=0}^{n}v_k-\sum_{k=0}^{n-1}v_k=v_n$.

$u_1-u_0=\sum_{k=0}^{1-1}v_k-0=v_0$

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=v_n$. $\phi((u_n)_{n\geq 0})=(v_n)_{n\geq 0}$.

Ainsi $\forall (v_n)_{n\geq 0}\in E$, $\exists (u_n)_{n\geq 0}\in E$, $\phi((u_n)_{n\geq 0})=(v_n)_{n\geq 0}$.

<u>ϕ est surjective et $\mathrm{Im}\,\phi=E$.</u>