**Sujet S 1175 - Exercice**

Soit $E = R_5[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 5 et $F = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$.

1) Question de cours : Caractériser les isomorphismes d'espaces vectoriels de dimensions finies ?

2) Soit $f_1, f_2, ..., f_6$ les applications linéaires de E vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall P \in E,\ f_1(P) = P(0),\ f_2(P) = P'(0),\ f_3(P) = P''(0),\ f_4(P) = P(1),\ f_5(P) = P'(1) \text{ et } f_6(P) = P''(1),$$

où $P'$ et $P''$ désignent les dérivées première et seconde de P.

a) Que vaut $\bigcap_{i=1}^{6} \mathrm{Ker}(f_i)$ ?

b) L'application $\Phi$ de E dans $\mathbb{R}^6$ définie par $\Phi(P) = (f_1(P), f_2(P), ..., f_6(P))$ est-elle un isomorphisme d'espaces vectoriels ?

c) En déduire que la famille $(f_1, ..., f_6)$ est libre dans l'espace vectoriel F.

3) Soit S l'ensemble défini par :

$$S = \{Q \in \mathbb{R}[X] \,/\, Q(0) = 1,\ Q'(0) = 1,\ Q''(0) = 0,\ Q(1) = 0,\ Q'(1) = 0 \text{ et } Q''(1) = 1\}.$$

a) Montrer que l'ensemble $S \cap E$ contient exactement un élément et le déterminer.

b) Soit $Q \in S$. Déterminer le reste de la division euclidienne de Q par $X^3(X-1)^3$. En déduire l'ensemble S.

4) a) Déterminer l'ensemble K défini par :

$$K = \left\{Q \in \mathbb{R}[X] \,/\, Q(-1) = 0,\ Q'(-1) = 0,\ Q''(-1) = 4,\ Q(-\frac{3}{2}) = 1,\ Q'(-\frac{3}{2}) = 2,\ Q''(-\frac{3}{2}) = 0\right\}.$$

b) Existe-t-il une fonction $f$, non polynomiale, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que :

$$f(-1) = 0,\ f'(-1) = 0,\ f''(-1) = 4,\ f(-\frac{3}{2}) = 1,\ f'(-\frac{3}{2}) = 2,\ f''(-\frac{3}{2}) = 0 \quad ?$$

**Sujet S 1175 - Exercice sans préparation**

On considère une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et suivant toutes une loi uniforme sur le segment $[0, \theta]$ où $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.
On note pour $n \geqslant 1$, $X_n = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} U_i$.

1) Prouver que la suite $(X_n)$ converge en probabilité vers $\theta$.
2) Etudier la convergence en loi de $Y_n = n\,(\theta - X_n)$.

# HEC 2011 S1175 Correction de l'exercice.

(Q1) E et E' sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que $E \neq \{0_E\}$

f est une application linéaire de E dans E'

* les assertions suivantes sont équivalentes

i) f est un isomorphisme de E sur E'

ii) $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et $\operatorname{Im} f = E'$

iii) Il existe une base de E dont l'image par f est une base de E'

iv) Toute base de E a pour image par f une base de E'

* On suppose que $\underline{\dim E = \dim E' < +\infty}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est un isomorphisme de E sur E'

v) f est injective

v') $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$

vi) f est surjective

vi') $\operatorname{Im} f = E'$

(Q2) a) Soit $P \in \bigcap_{i=1}^{6} \operatorname{Ker} f_i$. P est un polynôme de degré au plus 5 et $\forall i \in [\![1, 6]\!]$, $f_i(P) = 0$.

Alors $P(0) = P'(0) = P''(0) = P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$.

0 et 1 sont des racines de P d'ordre au moins 3.

Alors $X^3$ et $(X-1)^3$ divisent P donc $X^3(X-1)^3$ divise P.

Or $\deg X^3(X-1)^3 = 6$ et $\deg P \leq 5$ alors $P = 0_E$.

Alors $\underline{\bigcap_{i=1}^{6} \operatorname{Ker} f_i = \{0_E\}}$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(P, Q) \in E^2$. $f_1, f_2, \dots, f_6$ sont linéaires.

$\phi(\lambda P + Q) = (f_1(\lambda P+Q), f_2(\lambda P+Q), \dots, f_6(\lambda P+Q)) = (\lambda f_1(P) + f_1(Q), \lambda f_2(P) + f_2(Q), \dots, \lambda f_6(P) + f_6(Q))$.

$\phi(\lambda P + Q) = \lambda (f_1(P), f_2(P), \dots, f_6(P)) + (f_1(Q), f_2(Q), \dots, f_6(Q)) = \lambda \phi(P) + \phi(Q)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P,Q) \in E^2, \phi(\lambda P + Q) = \lambda \phi(P) + \phi(Q)$. $\phi$ est linéaire.

Soit $P \in \operatorname{Ker} \phi$. $\phi(P) = 0_{\mathbb{R}^6}$. $(f_1(P), f_2(P), \dots, f_6(P)) = 0_{\mathbb{R}^6}$.

Ainsi $\forall i \in [\![1,6]\!], f_i(P) = 0_{\mathbb{R}}$. Alors $P \in \bigcap_{i=1}^{6} \operatorname{Ker} f_i$. Or $\bigcap_{i=1}^{6} \operatorname{Ker} f_i = \{0_E\}$ donc $P = 0_E$.

Par conséquent $\operatorname{Ker} \phi = \{0_E\}$.

Alors $\phi$ est une application linéaire injective de $E$ dans $\mathbb{R}^6$.

Or $\dim E = \dim \mathbb{R}_5[X] = 6 = \dim \mathbb{R}^6 < +\infty$.

Donc $\phi$ est bijective ($\varphi$-1). Ainsi $\phi$ est un isomorphisme de $E$ sur $\mathbb{R}^6$.

c) Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6) \in \mathbb{R}^6$ tel que $\sum_{k=1}^{6} \alpha_k f_k = 0_F$.

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_6)$ la base canonique de $\mathbb{R}^6$. Posons $\forall i \in [\![1,6]\!]$, $P_i = \phi^{-1}(e_i)$.

$\forall i \in [\![1,6]\!]$, $\phi(P_i) = e_i$ donc $\forall i \in [\![1,6]\!], \forall k \in [\![1,6]\!]$, $f_k(P_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Alors $\forall i \in [\![1,6]\!]$, $0_{\mathbb{R}} = 0_F(P_i) = \sum_{k=1}^{6} \alpha_k f_k(P_i) = \alpha_i$. Donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_6 = 0$.

Ceci achève de montrer que $(f_1, f_2, \dots, f_6)$ est une famille libre de $F$.

Exercice : montrer que $(f_1, f_2, \dots, f_6)$ est une base de $F$.

($(f_1, f_2, \dots, f_6)$ est la base duale de la base $(P_1, P_2, \dots, P_6)$ de $E$).

Q3 a) Soit $\varphi \in E$.

$\varphi \in S \iff \varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(1) = 1$ et $\varphi(1) = \varphi'(1) = \varphi''(0) = 0$.

$\varphi \in S \iff f_1(\varphi) = 1, f_2(\varphi) = 1, f_3(\varphi) = 0, f_4(\varphi) = 0, f_5(\varphi) = 0, f_6(\varphi) = 1$.

$\varphi \in S \iff (f_1(\varphi), f_2(\varphi), \dots, f_6(\varphi)) = (1,1,0,0,0,1)$

$\varphi \in S \iff \phi(\varphi) = (1,1,0,0,0,1)$.

$\varphi \in S \iff \varphi = \phi^{-1}((1,1,0,0,0,1))$

Ainsi $S \cap E$ contient exactement un élément : $\varphi_0 = \phi^{-1}((1,1,0,0,0,1))$.

Posons $\varphi_0 = aX^5+bX^4+cX^3+dX^2+eX+f$.

$\varphi_0' = 5aX^4+4bX^3+3cX^2+2dX+e$ et $\varphi_0'' = 20aX^3+12bX^2+6cX+2d$.

$\varphi_0(0)=\varphi_0'(0)=\varphi_0''(1)=1$ et $\varphi_0(1)=\varphi_0'(1)=\varphi_0''(0)=0$

Ainsi $f=1$, $e=1$, $20a+12b+6c+2d=1$, $a+b+c+d+e+f=0$, $5a+4b+3c+2d+e=0$ et $2d=0$

Par conséquent $d=0$, $e=1$ et $f=1$. Alors $\begin{cases} a+b+c=-d-e-f=-2 \\ 5a+4b+3c=-2d-e=-1 \\ 20a+12b+6c=1-2d=1 \end{cases}$

$$\begin{cases} a+b+c=-2 & L_1 \\ 5a+4b+3c=-1 & L_2 \\ 20a+12b+6c=1 & L_3 \end{cases}$$

$L_2-3L_1$ et $L_3-2L_2$ donnent $\begin{cases} 2a+b=5 & L'_1 \\ 10a+4b=3 & L'_2 \end{cases}$ $\quad 4L'_1-L'_2$ donne : $2a=-17$

Alors $a=-\frac{17}{2}$, $b=5-2a=5+17=22$ et $c=-2-a-b=-2+\frac{17}{2}-22=-\frac{31}{2}$.

Ainsi l'unique élément de $S\cap E$ est $\varphi_0=-\frac{17}{2}X^5+22X^4-\frac{31}{2}X^3+X+1$

Notons que $\varphi_0=(X-1)^2\left(-\frac{17}{2}X^3+5X^2+3X+1\right)$.

b) Détermination directe de $S$ ! Soit $\varphi\in\mathbb{R}[X]$. Posons $U=\varphi-\varphi_0$.

$U'=\varphi'-\varphi_0'$ et $U''=\varphi''-\varphi_0''$.

$$\varphi\in S \iff \begin{cases} \varphi(0)=1 \\ \varphi'(0)=1 \\ \varphi''(0)=0 \\ \varphi(1)=0 \\ \varphi'(1)=0 \\ \varphi''(1)=1 \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi(0)=\varphi_0(0) \\ \varphi'(0)=\varphi_0'(0) \\ \varphi''(0)=\varphi_0''(0) \\ \varphi(1)=\varphi_0(1) \\ \varphi'(1)=\varphi_0'(1) \\ \varphi''(1)=\varphi_0''(1) \end{cases} \iff \begin{cases} U(0)=0 \\ U'(0)=0 \\ U''(0)=0 \\ U(1)=0 \\ U'(1)=0 \\ U''(1)=0 \end{cases} \iff$$ 0 et 1 sont racines d'ordre au moins 3 de $U$.

$\varphi\in S \iff X^3(X-1)^3$ divise $U \iff \exists T\in\mathbb{R}[X],\ U=X^3(X-1)^3T$.

$\varphi\in S \iff \exists T\in\mathbb{R}[X],\ \varphi-\varphi_0=X^3(X-1)^3T \iff \exists T\in\mathbb{R}[X],\ \varphi=\varphi_0+X^3(X-1)^3T$.

$$S = \{\varphi_0 + X^3(X-1)^3 T \,.\, T \in \mathbb{R}[X]\}.$$

$$S = \left\{-\frac{17}{2}X^5 + 22X^4 - \frac{31}{2}X^3 + X + 1 + X^3(X-1)^3 T \,;\, T \in \mathbb{R}[X]\right\}.$$

**Q4** a) Nous procéderons en deux étapes. Nous déduirons de $\varphi_0$ un élément "particulier" de K, puis nous en déduirons K.

Notons le rôle de $-1$ (resp. $-\frac{3}{2}$) dans K est proche du rôle de $1$ (resp. $0$) dans S ...

Cherchons alors une fonction affine $x \mapsto ax+b$ qui transforme $-1$ en $1$ et $-\frac{3}{2}$ en $0$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} -a+b=1 \\ -\frac{3}{2}a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1+a \\ 0=-\frac{3}{2}a+1+a=-\frac{1}{2}a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$.

Posons alors $\underline{\varphi_1 = \varphi_0(2X+3)}$. $\varphi_1 \in \mathbb{R}[X]$. mieux $\varphi_1 \in E$.

Notons que $\varphi_1' = 2\varphi_0'(2X+3)$ et $\varphi_1'' = 4\varphi_0''(2X+3)$. Rappelons que $\underline{\varphi_0 \in S}$.

Alors $\varphi_1(-1) = \varphi_0(1) = 0$ et $\varphi_1(-\frac{3}{2}) = \varphi_0(0) = 1$.

$\varphi_1'(-1) = 2\varphi_0'(1) = 0$ et $\varphi_1'(-\frac{3}{2}) = 2\varphi_0'(0) = 2$

$\varphi_1''(-1) = 4\varphi_0''(1) = 4$ et $\varphi_1''(-\frac{3}{2}) = 4\varphi_0''(0) = 0$

Ainsi $\varphi_1 \in K$ et même $\varphi_1 \in K \cap E$.

$\varphi_1(X) = \varphi_0(2X+3) = -\frac{17}{2}(2X+3)^5 + 22(2X+3)^4 - \frac{31}{2}(2X+3)^3 + 2X+4$.

Soit $\varphi$ un élément de $\mathbb{R}[X]$. Posons $D = \varphi - \varphi_1$. $D' = \varphi' - \varphi_1'$ et $D'' = \varphi'' - \varphi_1''$.

$$\varphi \in K \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(-1)=0 \\ \varphi'(-1)=0 \\ \varphi''(-1)=4 \\ \varphi(-\frac{3}{2})=1 \\ \varphi'(-\frac{3}{2})=2 \\ \varphi''(-\frac{3}{2})=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(-1)=\varphi_1(-1) \\ \varphi'(-1)=\varphi_1'(-1) \\ \varphi''(-1)=\varphi_1''(-1) \\ \varphi(-\frac{3}{2})=\varphi_1(-\frac{3}{2}) \\ \varphi'(-\frac{3}{2})=\varphi_1'(-\frac{3}{2}) \\ \varphi''(-\frac{3}{2})=\varphi_1''(-\frac{3}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D(-1)=0 \\ D'(-1)=0 \\ D''(-1)=0 \\ D(-3/2)=0 \\ D'(-3/2)=0 \\ D''(-3/2)=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $-1$ et $-\frac{3}{2}$ sont des racines de D d'ordre au moins 3.

$\varphi \in K \Leftrightarrow (X+1)^3(X+\frac{3}{2})^3$ divise $D \Leftrightarrow \exists B \in \mathbb{R}[X],\ D = (X+1)^3(X+\frac{3}{2})^3 B$.

$\varphi \in K \Leftrightarrow \exists B \in \mathbb{R}[X],\ \varphi - \varphi_1 = (X+1)^3(X+\frac{3}{2})^3 B$.

$\varphi \in K \Leftrightarrow \exists B \in \mathbb{R}[X],\ \varphi = \varphi_1 + (X+1)^3(X+\frac{3}{2})^3 B$.

donc $\underline{\underline{K = \{ \varphi_1 + (X+1)^3(X+\frac{3}{2})^3 B\ ;\ B \in \mathbb{R}[X] \}}}$ où $\underline{\underline{\varphi_1 = -\frac{17}{2}(2X+3)^5 + 22(2X+3)^4 - \frac{31}{2}(2X+3)^3 + 2X+4}}$.

un* calcul simple donne encore

$$\underline{\underline{K = \{ -278X^5 - 1688X^4 - 4132X^3 - 4986X^2 - 2968X - 698 + (X+1)^3(X+\tfrac{3}{2})^5 B\ ;\ B \in \mathbb{R}[X] \}}}$$

* Fait à la main ! J'ai aussi vérifié à la main que ce premier polynôme appartient à K.

▼ __Remarque__... On pouvait aussi trouver un élément de K et même de $K \cap E$ sans utiliser $\varphi_3$. Par exemple de la manière suivante.

Soit $\varphi \in E$. Notons que $(1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3, (X+1)^4, (X+1)^5)$ est une base de E.

$\exists! (a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^5,\ \varphi = a(X+1)^5 + b(X+1)^4 + c(X+1)^3 + d(X+1)^2 + e(X+1) + f$

$\varphi' = 5a(X+1)^4 + 4b(X+1)^3 + 3c(X+1)^2 + 2d(X+1) + e$ et $\varphi'' = 20a(X+1)^3 + 12b(X+1)^2 + 6c(X+1) + 2d$.

$\varphi \in K \Leftrightarrow \varphi(-1) = \varphi'(-1) = \varphi''(-\frac{3}{2}) = 0,\ \varphi''(-1) = 4,\ \varphi(-\frac{3}{2}) = 1,\ \varphi'(-\frac{3}{2}) = 2$

$$\varphi \in K \Leftrightarrow \begin{cases} f = 0 \\ e = 0 \\ 20a(-1/2)^3 + 12b(-1/2)^2 + 6c(-1/2) + 2d = 0 \\ 2d = 4 \\ a(-1/2)^5 + b(-1/2)^4 + c(-1/2)^3 + d(-1/2)^2 + e(-1/2) + f = 1 \\ 5a(-1/2)^4 + 4b(-1/2)^3 + 3c(-1/2)^2 + 2d(-1/2) + e = 2 \end{cases}$$

$$\varphi \in K \Leftrightarrow \begin{cases} e = f = 0 \\ d = 2 \\ -20a + 24b - 24c = -16d = -32 \\ -a + 2b - 4c = 32 - 8d = 16 \\ 5a - 8b + 12c = 32 + 16d = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = f = 0,\ d = 2 \\ -5a + 6b - 6c = -8 \\ -a + 2b - 4c = 16 \\ 5a - 8b + 12c = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = f = 0,\ d = 2 \\ (1)\ -a + 2b - 4c = 16 \\ (2)\ -5a + 6b - 6c = -8 \\ (3)\ 5a - 8b + 12c = 64 \end{cases}$$

$$\varphi \in K \Leftrightarrow \begin{cases} e=f=0,\ d=2 \\ -a+2b-4c=16 \\ -4b+14c=-88 \\ -2b+6c=56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e=f=0,\ d=2 \\ -a+2b-4c=16 \\ 2b-7c=44 \\ -2b+6c=56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e=f=0,\ d=2 \\ c=-100 \\ b=3c-28=-328 \\ a=2b-4c-16=-272 \end{cases}$$

(2) ← −5(3)+(2)
(3) ← −(3)+(2)

Alors il existe un élément $\varphi_2$ appartenant à $E \cap K$ et un seul :

$\varphi_2 = -272(X+1)^5 - 328(X+1)^4 - 100(X+1)^3 + 2(X+1)^2.$ ▲

▼ Remarque.. Comme $\varphi_1$ appartient à $K$ et à $E$ : $\varphi_1 = \varphi_2$ ! ce qui donne trois possibilités d'écrire $\varphi_1$.

- $\varphi_1 = -272X^5 - 1688X^4 - 4132X^3 - 4986X^2 - 2968X - 698$
- $\varphi_1 = -\frac{17}{2}(2X+3)^5 + 22(2X+3)^4 - \frac{31}{2}(2X+3)^3 + 2X+4$ ou

  $\varphi_1 = -272\left(X+\frac{3}{2}\right)^5 + 352\left(X+\frac{3}{2}\right)^4 - 124\left(X+\frac{3}{2}\right)^3 + 2\left(X+\frac{3}{2}\right) + 1$
- $\varphi_1 = -272(X+1)^5 - 328(X+1)^4 - 100(X+1)^3 + 2(X+1)^2$ ▲

b) Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \varphi_1(x) + (x+1)^3\left(x+\frac{3}{2}\right)^3 e^x$, $H(x) = (x+1)^3\left(x+\frac{3}{2}\right)^3$ et $g(x) = e^x$

→ $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\varphi_1$, $H$ et $g$ sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

→ $H(-1) = H\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$. Alors $f(-1) = \varphi_1(-1) = 0$ et $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \varphi_1\left(-\frac{3}{2}\right) = 1$.

→ $f' = \varphi_1' + H'g + Hg'$. Or $H(-1) = H'(-1) = H\left(-\frac{3}{2}\right) = H'\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$.

Alors $f'(-1) = \varphi_1'(-1) = 0$ et $f'\left(-\frac{3}{2}\right) = \varphi_1'\left(-\frac{3}{2}\right) = 2$

→ $f'' = \varphi_1'' + H''g + 2H'g' + Hg''$.

Or $H(-1) = H'(-1) = H''(-1) = H\left(-\frac{3}{2}\right) = H'\left(-\frac{3}{2}\right) = H''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$

−1 et $-\frac{3}{2}$ sont des racines d'ordre 3 de $H$

donc $f''(-1) = \varphi_1''(-1) = 4$ et $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = \varphi_1''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$.

→ Supposons que $f$ est polynomiale. Alors $Hg = f - \varphi_1$ est polynomiale.

On a donc, par croissance comparée $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{(Hg)(x)}{e^x} = 0$.

Alors $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} H(x) = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} (x+1)^3 (x + \frac{3}{2})^3 = 0$ !!

Ainsi $f$ n'est pas polynomiale.

$f : x \mapsto \varphi_1(x) + (x+1)^3 (x + \frac{3}{2})^3 e^x$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, non polynômiale, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telle que :

$f(-1) = 0$, $f'(-1) = 0$, $f''(-1) = 4$, $f(-\frac{3}{2}) = 1$, $f'(-\frac{3}{2}) = 2$ et $f''(-\frac{3}{2}) = 0$.

**Question 6** HEC 2011 S 1175

On considère une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes une loi uniforme sur le segment $[0, \theta]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \operatorname{Max}(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

Q1. Prouver que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers $\theta$.

Q2. Étudier la convergence en loi de $Y_n = n\,(\theta - X_n)$.

*Question de cours : Caractériser les isomorphismes d'espaces vectoriels de dimensions finies.*

---

Q1 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = P(X_n - \theta \geqslant \varepsilon) + P(X_n - \theta \leqslant -\varepsilon) = P(X_n \geqslant \theta + \varepsilon) + P(X_n \leqslant \theta - \varepsilon)$

$X_n$ prend ses valeurs dans $[0, \theta]$ donc $P(X_n \geqslant \theta + \varepsilon) = 0$.

$P(X_n \leqslant \theta - \varepsilon) = P(\operatorname{Max}(U_1, U_2, \ldots, U_n) \leqslant \theta - \varepsilon) = P(\{U_1 \leqslant \theta - \varepsilon\} \cap \{U_2 \leqslant \theta - \varepsilon\} \cap \cdots \cap \{U_n \leqslant \theta - \varepsilon\})$

Par indépendance on obtient : $P(X_n \leqslant \theta - \varepsilon) = P(U_1 \leqslant \theta - \varepsilon)\, P(U_2 \leqslant \theta - \varepsilon) \cdots P(U_n \leqslant \theta - \varepsilon)$.

$U_1, U_2, \ldots, U_n$ ayant même loi il vient : $P(X_n \leqslant \theta - \varepsilon) = (P(U_1 \leqslant \theta - \varepsilon))^n$.

$P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = (P(U_1 \leqslant \theta - \varepsilon))^n$.

1er cas.. $\theta - \varepsilon < 0$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0^n = 0$. $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0$ !

2ème cas.. $\theta - \varepsilon \geqslant 0$. Alors $\theta - \varepsilon \in [0, \theta]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = (P(U_1 \leqslant \theta - \varepsilon))^n = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n$

Or $1 - \frac{\varepsilon}{\theta} \in [0, 1[$ (car $0 < \frac{\varepsilon}{\theta} \leqslant 1$) donc $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n = 0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0$. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à $\theta$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $F_n$ la fonction de répartition de $Y_n$.

$Y_n$ prend ses valeurs dans $[0, n\theta]$. Alors $\forall x \in ]-\infty, 0[$, $F_n(x) = 0$ et

$\forall x \in [n\theta, +\infty[$, $F_n(x) = 1$.

Soit $x \in [0, n\theta[$. $F_n(x) = P(Y_n \leq x) = P(n(\theta - X_n) \leq x) = P(\theta - X_n \leq \frac{x}{n}) = P(\theta - \frac{x}{n} \leq X_n)$.

$F_n(x) = 1 - P(X_n < \theta - \frac{x}{n}) = 1 - P(\{U_1 < \theta - \frac{x}{n}\} \cap \{U_2 < \theta - \frac{x}{n}\} \cap \dots \cap \{U_n < \theta - \frac{x}{n}\})$.

Par indépendance de $U_1, U_2, \dots, U_n$ il vient : $F_n(x) = 1 - P(U_1 < \theta - \frac{x}{n}) P(U_2 < \theta - \frac{x}{n}) \dots P(U_n < \theta - \frac{x}{n})$

Or $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $U_k \hookrightarrow \mathcal{U}([0,\theta])$ donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(U_k < \theta - \frac{x}{n}) = P(U_k \leq \theta - \frac{x}{n}) \underset{\uparrow}{=} \frac{\theta - \frac{x}{n} - 0}{\theta - 0} = 1 - \frac{x}{n\theta}$

$\theta - \frac{x}{n} \in [0, \theta]$

Alors $F_n(x) = 1 - (1 - \frac{x}{n\theta})^n$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 0[ \\ 1 - (1 - \frac{x}{n\theta})^n & \text{si } x \in [0, n\theta[ \\ 1 & \text{si } x \in [n\theta, +\infty[ \end{cases}$$

et ceci pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$.

$\forall x \in ]-\infty, 0[$, $\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(0) = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} F_n(0) = 0$.

Soit $x \in ]0, +\infty[$. Posons $n_0 = \text{Ent}(\frac{x}{\theta}) + 1$. $n_0 > \frac{x}{\theta}$ ; $x < n_0\theta$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $n \geq n_0$ ! $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $n\theta \geq n_0\theta > x$.

Alors $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $F_n(x) = 1 - (1 - \frac{x}{n\theta})^n \underset{\uparrow}{=} 1 - e^{n \ln(1 - \frac{x}{n\theta})}$.

$1 - \frac{x}{n\theta} > 0$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{x}{n\theta} = 0$

$n \ln(1 - \frac{x}{n\theta}) \underset{n \to +\infty}{\sim} n(-\frac{x}{n\theta}) = -\frac{x}{\theta}$. Alors $\lim_{n \to +\infty} (n \ln(1 - \frac{x}{n\theta})) = -\frac{x}{\theta}$. Par continuité

de la fonction exponentielle en $-\frac{x}{\theta}$ il vient $\lim_{n \to +\infty} e^{n \ln(1 - \frac{x}{n\theta})} = e^{-\frac{x}{\theta}}$.

Alors $\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in ]-\infty, 0[ \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 - e^{-x/\theta} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in ]-\infty, 0[ \\ 1 - e^{-x/\theta} \text{ si } x \in [0, +\infty[ \end{cases}$$

Ainsi $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$.