PARTIE I. Quelques résultats statistiques et algébriques

Q1 a) $S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \geqslant 0$. Supposons que $S_x^2 = 0$.

Alors $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = 0$ et $\forall i \in [\![1,n]\!], (x_i-\bar{x})^2 \geqslant 0$. Donc $\forall i \in [\![1,n]\!], (x_i-\bar{x})^2 = 0$.

Par conséquent : $\forall i \in [\![1,n]\!], x_i - \bar{x} = 0$ et ainsi : $\forall i \in [\![1,n]\!], x_i = \bar{x}$. Ceci contredit l'hypothèse indiquant que les réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ ne sont pas tous égaux.

Donc $S_x^2 \geqslant 0$ et $S_x^2 \neq 0$. Alors $\underline{S_x^2 > 0}$.

b) • $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})y_i = \sum_{i=1}^{n}(x_iy_i) - \bar{x}\sum_{i=1}^{n}y_i = \sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \bar{x}(n\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}(x_iy_i) - n\bar{x}\bar{y}$.

• $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i + \sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\bar{x}(n\bar{x}) + n\bar{x}^2$.

$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2$

$\underline{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})y_i = \sum_{i=1}^{n}x_iy_i - n\bar{x}\bar{y}}$ et $\underline{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2}$... $\underline{S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}^2}$.

c) • $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\bar{x}}{nS_x^2} = \frac{1}{nS_x^2}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i - \sum_{i=1}^{n}\bar{x}\right] = \frac{1}{nS_x^2}[n\bar{x} - n\bar{x}] = 0$.

• $\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{nS_x^2}\right)x_i = \frac{1}{nS_x^2}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i\right] = \frac{1}{nS_x^2}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}\times n\bar{x}\right]$.

$\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i = \frac{1}{nS_x^2}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2\right] \underset{b)}{=} \frac{1}{S_x^2}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{S_x^2}\times S_x^2 = 1$.

• $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{nS_x^2}\right)^2 = \frac{1}{(nS_x^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{(nS_x^2)^2}\times nS_x^2 = \frac{1}{nS_x^2}$.

$\underline{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 = \frac{1}{nS_x^2}}$.

Q2 Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\alpha\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = 0$.

$\forall i \in [\![1,n]\!], \alpha x_i + \beta = 0$. Alors $\alpha x_1 = \alpha x_2 = \dots = \alpha x_n = -\beta$.

Si α n'est pas nul : $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Or les réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ ne sont pas tous égaux.
Donc $\alpha = 0$ et alors $\beta = 0$.
Ceci achève de montrer que $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Les deux colonnes de M constituent donc une famille libre.

Alors la matrice M est de rang 2.

b) $${}^tMM = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix}. \quad {}^tMM = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix}.$$

On peut encore écrire $${}^tMM = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & n\bar{x} \\ n\bar{x} & n \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad {}^tMM \overset{\text{Q1 b)}}{=} n \begin{pmatrix} S_x^2 + \bar{x}^2 & \bar{x} \\ \bar{x} & 1 \end{pmatrix}.$$

$${}^tMM \text{ inversible} \underset{n \neq 0}{\iff} \begin{pmatrix} S_x^2+\bar{x}^2 & \bar{x} \\ \bar{x} & 1 \end{pmatrix} \text{ inversible} \iff \begin{vmatrix} S_x^2+\bar{x}^2 & \bar{x} \\ \bar{x} & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \iff S_x^2 + \bar{x}^2 - \bar{x}^2 \neq 0$$

${}^tMM$ inversible $\iff S_x^2 \neq 0$. Or nous avons vu que $S_x^2 > 0$. Alors ${}^tMM$ est inversible.

(Q3) Remarques. 1.. Je n'identifierai pas $\mathbb{R}^n$ et $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

2.. dans la suite je noterai $\|\cdot\|_n$ la norme de $\mathbb{R}^n$ associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ la norme de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Soit $\theta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$. $$\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i+b))^2 = \left\| \begin{pmatrix} y_1 - (ax_1+b) \\ y_2 - (ax_2+b) \\ \dots \\ y_n - (ax_n+b) \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|^2.$$

Donc $$\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i+b))^2 = \|y - M\theta\|^2 = \|M\theta - y\|^2.$$

On cherche donc $\theta \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|M\theta - y\|^2$ soit minimum ou tel que $\|M\theta - y\|$ soit minimum.

Comme $\operatorname{rg} M = 2$, le théorème de cours sur la méthode des moindres carrés permet de dire que :

1°) $\min_{\theta \in M_{2,1}(\mathbb{R})} \| M\theta - y \|$ existe ;

2°) $\exists !\ \hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, $\| M\hat{\theta} - y \| = \min_{\theta \in M_{2,1}(\mathbb{R})} \| M\theta - y \|$;

3°) ${}^tMM\hat{\theta} = {}^tMy$;

3°)' ${}^tMM$ est inversible et $\hat{\theta} = ({}^tMM)^{-1}\,{}^tMy$.

Dans ces conditions :

1°) $\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i+b))^2$ existe ;

2°) $(\hat{a}, \hat{b})$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i+b))^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\hat{a}x_i + \hat{b}))^2$$

3°) $\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$ vérifie la relation ${}^tMM\hat{\theta} = {}^tMy$... ce qui répond à la question non ? ▲

b) ${}^tMM\hat{\theta} = {}^tMy$ donc $n\begin{pmatrix} S_x^2 + \bar{x}^2 & \bar{x} \\ \bar{x} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{pmatrix}$.

Ainsi $\begin{cases} (S_x^2 + \bar{x}^2)\hat{a} + \bar{x}\hat{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \bar{x}\hat{a} + \hat{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{y} \end{cases}$.

Donc $\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}$. En réinjectant dans la première ligne il vient

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (S_x^2 + \bar{x}^2)\hat{a} + \bar{x}(\bar{y} - \hat{a}\bar{x}) = (S_x^2 + \bar{x}^2 - \bar{x}^2)\hat{a} + \bar{x}\bar{y} = S_x^2\hat{a} + \bar{x}\bar{y}$.

Donc $S_x^2\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Q1 b)}}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) y_i = S_x^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \bar{x}}{n S_x^2} y_i = S_x^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$.

Comme $S_x^2 \neq 0$: $\hat{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$ et $\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}$.

▲ Le rapport du correcteur indique que l'on attendait la preuve du résultat. Est-ce bien raisonnable vu ce travail demandé dans la suite ? Néanmoins je vous conseille de revoir la preuve dans votre cours ou d'aller en p5' !

c) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. $\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2=\|(y_1-(ax_1+b),y_2-(ax_2+b),\dots,y_n-(ax_n+b))\|_n^2$

[Norme de $\mathbb{R}^n$ associée au produit scalaire canonique.]

$\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2=\|(y_1,y_2,\dots,y_n)-a(x_1,x_2,\dots,x_n)-b(1,1,\dots,1)\|_n^2$.

Posons $y'=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ et $t=(1,1,\dots,1)$. On a toujours $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$ et $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Alors $\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2=\|y'-(ax+bt)\|_n^2$.

On $\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(\hat{a}x_i+\hat{b}))^2$.

Alors $\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\|y'-(ax+bt)\|_n^2=\|\hat{a}x+\hat{b}t\|_n^2$ ou $\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\|y'-(ax+bt)\|_n=\|y'-(\hat{a}x+\hat{b}t)\|_n$

Rappelons que $\mathcal{H}=\mathrm{Vect}(x,t)$. Donc $\min_{z\in\mathcal{H}}\|y'-z\|_n=\|y'-(\hat{a}x+\hat{b}t)\|_n$ et $\hat{a}x+\hat{b}t\in\mathcal{H}$.

Le "théorème de meilleure approximation" du cours confirme alors que $\min_{z\in\mathcal{H}}\|y'-z\|_n$ existe et indique que la projection orthogonale de y' sur $\mathcal{H}$ est l'unique élément de $\mathcal{H}$ qui réalise ce minimum.

Alors $\hat{a}x+\hat{b}t$ est la projection orthogonale de y' sur $\mathcal{H}$.

On la matrice de cette projection orthogonale dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est K

Donc la matrice des coordonnées de y' dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est Ky.

On la matrice des coordonnées de $\hat{a}x+\hat{b}t$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $\hat{a}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\hat{b}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$.

Alors $Ky=\hat{a}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\hat{b}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{a}x_1+\hat{b}\\\hat{a}x_2+\hat{b}\\\vdots\\\hat{a}x_n+\hat{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&1\\x_2&1\\\vdots&\vdots\\x_n&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a}\\\hat{b}\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}\hat{a}\\\hat{b}\end{pmatrix}=M\hat{\Theta}$. On ${}^tMM\hat{\Theta}={}^tMy$ et ${}^tMM$ est inversible.

Donc $Ky=M({}^tMM)^{-1}\,{}^tMy$ et ceci pour tout y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $(E_1,E_2,\dots,E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $KE_j=M({}^tMM)^{-1}\,{}^tME_j$. Alors pour tout j dans $[\![1,n]\!]$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de K est égale à la $j^{\text{ème}}$ colonne de $M({}^tMM)^{-1}\,{}^tM$.

Finalement $\underline{\underline{K = \Pi({}^t\Pi\Pi)^{-1}\,{}^t\Pi}}$.

d). $\hat{u} = y - \Pi\hat{\theta} = y - \Pi({}^t\Pi\Pi)^{-1}\,{}^t\Pi y = y - Ky = (I_n - K)y = Gy$.

• $\hat{u} = Gy = G(\Pi\theta) + Gu$.

Or $G(\Pi\theta) = (I_n - K)\Pi\theta = \Pi\theta - K\Pi\theta = \Pi\theta - (\Pi({}^t\Pi\Pi)^{-1}\,{}^t\Pi)\Pi\theta$

$G(\Pi\theta) = \Pi\theta - \Pi({}^t\Pi\Pi)^{-1}({}^t\Pi\Pi)\theta = \Pi\theta - \Pi I_n\theta = \Pi\theta - \Pi\theta = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\hat{u} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} + Gu = Gu$.

Finalement $\underline{\underline{\hat{u} = Gy = Gu}}$

e). $\hat{u} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{pmatrix}$. ${}^t\hat{u}\hat{u} = (\hat{u}_1\,\hat{u}_2 \dots \hat{u}_n)\begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$. $\underline{\underline{{}^t\hat{u}\hat{u} = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}}$.

• ${}^t\hat{u}\hat{u} = {}^t(Gy)Gy = {}^ty({}^tGG)y$.

K est la matrice du projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$

Alors $G = I_n - K$ est la matrice du projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{F}^\perp$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi $\underline{G^2 = G}$. les candidats peuvent même dire que G est symétrique car G est la matrice d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormée. Pour plus de sécurité montrons que ${}^tG = G$.

${}^tG = {}^t(I_n - K) = {}^tI_n - {}^tK = I_n - {}^t(\Pi({}^t\Pi\Pi)^{-1}\,{}^t\Pi) = I_n - {}^t({}^t\Pi)\,{}^t(({}^t\Pi\Pi)^{-1})\,{}^t\Pi$.

${}^tG = I_n - \Pi\,({}^t({}^t\Pi\Pi))^{-1}\,{}^t\Pi = I_n - \Pi({}^t\Pi\Pi)^{-1}\,{}^t\Pi = I_n - K = G$. $\underline{{}^tG = G}$.

${}^t({}^t\Pi\Pi) = {}^t\Pi\,{}^t({}^t\Pi) = {}^t\Pi\Pi$.

Alors ${}^tGG = G^2 = G$. Donc ${}^t\hat{u}\hat{u} = {}^ty({}^tGG)y = {}^tyGy$.

De même ${}^t\hat{u}\hat{u} = {}^t(Gu)Gu = {}^tu\,{}^tGGu = {}^tuGu$.

Finalement $\underline{\underline{{}^t\hat{u}\hat{u} = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = {}^tyGy = {}^tuGu}}$.

Preuve du résultat de Q3 a) . Soit $\mathcal{B}_2$ (resp. $\mathcal{B}_n$) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^n$).

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^n$ de matrice M relativement aux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_n$.

Notons que $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} M = 2$. Alors $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^2 - \operatorname{rg} f = 2 - 2 = 0$. Alors $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ donc f injective.

Rappelons que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 = \| y - M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \|^2$. [norme de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.]

Notons y_0 l'élément de $\mathbb{R}^n$ de matrice y dans $\mathcal{B}_n$.

(norme de $\mathbb{R}^n$ associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.)

$\min_{\theta \in M_{2,1}(\mathbb{R})} \| y - M\theta \|^2$ existe $\Leftrightarrow \min_{\theta \in M_{2,1}(\mathbb{R})} \| y - M\theta \|$ existe $\Leftrightarrow \min_{v \in \mathbb{R}^2} \| y_0 - f(v) \|_n$ existe.

$\min_{\theta \in M_{2,1}(\mathbb{R})} \| y - M\theta \|^2$ existe $\Leftrightarrow \min_{z \in \operatorname{Im} f} \| y_0 - z \|_n$ existe. En cas d'existence ces deux minimums sont égaux.

$\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Mieux comme $M(f, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_n) = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$ alors

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((x_1, x_2, \dots, x_n), (1, 1, \dots, 1)) = \mathcal{F}$.

Notons $p_{\mathcal{F}}$ la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{F}$ et rappelons que K est sa matrice dans $\mathcal{B}_n$.

Le théorème de meilleure approximation du cours montre que $\min_{z \in \mathcal{F}} \| y_0 - z \|_n$ existe et $p_{\mathcal{F}}(y_0)$ est l'unique élément de $\mathcal{F}$ qui réalise ce minimum.

Alors $\min_{z \in \operatorname{Im} f} \| y_0 - z \|_n$ existe et $p_{\mathcal{F}}(y_0)$ est l'unique élément de $\operatorname{Im} f$ qui réalise ce minimum.

$p_{\mathcal{F}}(y_0) \in \operatorname{Im} f$ donc $\exists \hat{v} \in \mathbb{R}^2$, $f(\hat{v}) = p_{\mathcal{F}}(y_0)$. Mieux $\exists! \, \hat{v} \in \mathbb{R}^2$, $f(\hat{v}) = p_{\mathcal{F}}(y_0)$ car f est injective.

Ainsi $\min_{v \in \mathbb{R}^2} \| y_0 - f(v) \|_n$ existe et $\exists! \, \hat{v} \in \mathbb{R}^2$, $\min_{v \in \mathbb{R}^2} \| y_0 - f(v) \|_n = \| y_0 - f(\hat{v}) \|_n$.

Soit $\hat{\theta}$ la matrice de $\hat{v}$ dans $\mathcal{B}_2$. On peut alors affirmer que :

$\min_{\theta \in M_{2,1}(\mathbb{R})} \| y - M\theta \|$ existe et que $\hat{\theta}$ est l'unique élément de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ qui réalise ce minimum.

Donc $\min_{\theta \in M_{2,1}(\mathbb{R})} \| y - M\theta \|^2$ existe et $\hat{\theta}$ est l'unique élément de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ qui réalise ce minimum.

$f(\vec{v}) = P_{\mathcal{I}}(y_0)$. La matrice de $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}_2$ est $\hat{\theta}$, $M = M(f, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_n)$, y_0 a pour matrice y dans la base $\mathcal{B}_n$ et $P_{\mathcal{I}}$ a pour matrice K dans la base $\mathcal{B}_n$. Alors $\underline{\underline{M\hat{\theta} = Ky}}$... ce qui est très utile pour c). Ne reste plus qu'à montrer que ${}^tM M\hat{\theta} = {}^tM y$.

$y_0 - P_{\mathcal{I}}(y_0) = y_0 - P_{\mathrm{Im} f}(y_0) \in (\mathrm{Im} f)^{\perp}$.

produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Donc $\forall z \in \mathrm{Im} f$, $\langle z, y_0 - P_{\mathcal{I}}(y_0) \rangle_n = 0$.

Alors $\forall v \in \mathbb{R}^2$, $\langle f(v), y_0 - P_{\mathcal{I}}(y_0) \rangle_n = 0$. Comme $\mathcal{B}_n$ est orthonormée, ceci se traduit matriciellement par $\forall \theta \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, ${}^t(M\theta)(y - Ky) = 0$.

Produit scalaire canonique de $M_{2,1}(\mathbb{R})$

$\forall \theta \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, ${}^t\theta({}^tM(y - Ky)) = 0$. Alors $\forall \theta \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, $\langle \theta, {}^tM(y - Ky) \rangle = 0$.

Donc ${}^tM(y - Ky) \in (M_{2,1}(\mathbb{R}))^{\perp}$. Or $(M_{2,1}(\mathbb{R}))^{\perp} = \{0_{M_{2,1}(\mathbb{R})}\}$.

Alors ${}^tM(y - Ky) = 0_{M_{2,1}(\mathbb{R})}$; ${}^tMy - {}^tMKy = 0_{M_{2,1}(\mathbb{R})}$. $\underline{{}^tMy = {}^tMKy}$.

Ainsi ${}^tMy = {}^tM(Ky) = {}^tM(M\hat{\theta}) = {}^tMM\hat{\theta}$. Finalement $\underline{\underline{{}^tMM\hat{\theta} = {}^tMy}}$.

On retrouve alors aisément K en fonction de M et ${}^tM$. En effet :

${}^tMM\hat{\theta} = {}^tMy$ donc $\hat{\theta} = ({}^tMM)^{-1}\,{}^tMy$. De plus $M\hat{\theta} = Ky$

Alors $Ky = M\hat{\theta} = M({}^tMM)^{-1}\,{}^tMy$ et ceci pour tout y dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ce qui donne, comme nous l'avons vu, $\underline{\underline{K = M({}^tMM)^{-1}\,{}^tM}}$.

Reste un peu de place pour une petite remarque...

Nous avons montré que la matrice G est symétrique. Le rapport du concours nous apprend que l'on acceptait que les candidats disent que G est la matrice d'une projection orthogonale dans une base orthonormée pour le justifier.

Normal, à ce niveau, non ?

Q4 a) $A_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i$ et pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, $Y_i = a x_i + b + U_i$.

Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, U_i possède une espérance qui vaut 0

donc pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, Y_i possède une espérance qui vaut $a x_i + b$.

Alors A_n possède une espérance comme combinaison linéaire de n variables aléatoires qui possèdent une espérance.

De plus $E(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a x_i + b) = a \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + b \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overset{Q3\ c)}{=} a \times 1 + b \times 0 = a$.

$E(A_n) = a$.

Sans doute pouvons nous dire que A_n est un estimateur sans biais de a ...

$\overline{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$ possède une espérance comme combinaison linéaire de n variables aléatoires qui possèdent une espérance et $E(\overline{Y}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(Y_i)$.

$E(\overline{Y}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a x_i + b) = a \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i + b \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 = a \overline{x} + b$.

$B_n = \overline{Y}_n - \overline{x} A_n$ possède une espérance comme combinaison linéaire de deux variables aléatoires qui possèdent une espérance et $E(B_n) = E(\overline{Y}_n) - \overline{x} E(A_n)$.

$E(B_n) = a \overline{x} + b - \overline{x} \times a = b$. $E(B_n) = b$.

Estimons donc que B_n est un estimateur sans biais de b pour ne pas contrarier le concepteur ... mais observons que les Y_i n'ont pas la même loi !!

b) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $V(U_i)$ existe et vaut σ^2.

Alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, Y_i qui est égal à $a x_i + b + U_i$ possède une variance qui vaut $V(U_i)$ donc σ^2. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $V(Y_i) = \sigma^2$.

Alors A_n possède une variance comme combinaison linéaire de n variables aléatoires qui possèdent une variance puisque $A_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i$.

$U_1, U_2, \ldots, U_n$ étant indépendantes il en est de même de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ et même de $\alpha_1 Y_1, \alpha_2 Y_2, \ldots, \alpha_n Y_n$.

Alors $V(A_n) = \sum_{i=1}^{n} V(\alpha_i Y_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 V(Y_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \sigma^2 \times \frac{1}{nS_x^2}$.

$$V(A_n) = \frac{\sigma^2}{nS_x^2}.$$

$$B_n = \overline{Y}_n - A_n \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \overline{x}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \alpha_i \overline{x}\right) Y_i$$

Ici encore B_n possède une variance comme combinaison linéaire de n variables aléatoires qui possèdent une variance.

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ étant indépendantes il en est de même pour les variables aléatoires

$\left(\frac{1}{n} - \alpha_1 \overline{x}\right) Y_1$, $\left(\frac{1}{n} - \alpha_2 \overline{x}\right) Y_2, \dots,$ $\left(\frac{1}{n} - \alpha_n \overline{x}\right) Y_n$.

Alors $V(B_n) = \sum_{i=1}^{n} V\left(\left(\frac{1}{n} - \alpha_i \overline{x}\right) Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \alpha_i \overline{x}\right)^2 V(Y_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \alpha_i \overline{x}\right)^2.$

$$V(B_n) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{2\overline{x}}{n}\alpha_i + \overline{x}^2 \alpha_i^2\right) = \left(n \times \frac{1}{n^2} - \frac{2\overline{x}}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}_{=0} + \overline{x}^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2}_{\frac{1}{nS_x^2}}\right)\sigma^2.$$

$$V(B_n) = \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{nS_x^2}\right)\sigma^2.$$

$$V(B_n) = \left(1 + \frac{\overline{x}^2}{S_x^2}\right)\frac{\sigma^2}{n}.$$

c) $\operatorname{cov}(A_n, B_n) = \frac{1}{2}\left[V(A_n + B_n) - V(A_n) - V(B_n)\right]$.

$$A_n + B_n = A_n + \overline{Y}_n - A_n \overline{x} = (1 - \overline{x})A_n + \overline{Y}_n = (1 - \overline{x})\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

$$A_n + B_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i(1 - \overline{x}) + \frac{1}{n}\right) Y_i.$$

Alors par indépendance $V(A_n + B_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i(1 - \overline{x}) + \frac{1}{n}\right)^2 V(Y_i)$.

$$V(A_n + B_n) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n}\left((1 - \overline{x})^2\alpha_i^2 + \frac{2}{n}(1 - \overline{x})\alpha_i + \frac{1}{n^2}\right) = \sigma^2\left[(1 - \overline{x})^2\frac{1}{nS_x^2} + \frac{2}{n}(1 - \overline{x}) \times 0 + n \times \frac{1}{n^2}\right]$$

$$V(A_n + B_n) = \sigma^2\left[(1 - \overline{x})^2\frac{1}{nS_x^2} + \frac{1}{n}\right].$$

Donc $\operatorname{cov}(A_n,B_n)=\frac{1}{2}\left[\sigma^2\left[(1-\overline{x})^2\frac{1}{nS_x^2}+\frac{1}{n}\right]-\frac{\sigma^2}{nS_x^2}-\left(1+\frac{\overline{x}^2}{S_x^2}\right)\frac{\sigma^2}{n}\right]$.

$\operatorname{cov}(A_n,B_n)=\frac{\sigma^2}{2nS_x^2}\left[1+\overline{x}^2-2\overline{x}+S_x^2-1-(S_x^2+\overline{x}^2)\right]=-\frac{\overline{x}\sigma^2}{nS_x^2}$.

$\operatorname{cov}(A_n,B_n)=-\frac{\overline{x}\sigma^2}{nS_x^2}$.

(Q5) Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Soit $n\in[\![3,+\infty[\![$. A_n et B_n possèdent un moment d'ordre 2.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors :

$$\underbrace{0\leq P(|A_n-E(A_n)|\geq\varepsilon)\leq\frac{V(A_n)}{\varepsilon^2}}_{①} \text{ et } \underbrace{0\leq P(|B_n-E(B_n)|\geq\varepsilon)\leq\frac{V(B_n)}{\varepsilon^2}}_{②}$$

donc $0\leq P(|A_n-a|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 nS_x^2}$ et $0\leq P(|B_n-b|\geq\varepsilon)\leq\left(1+\frac{\overline{x}^2}{S_x^2}\right)\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\times n}$ et ceci pour tout n dans $[\![3,+\infty[\![$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\right)=\rho^2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}S_x^2\overset{!!}{=}\rho^2$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(nS_x^2)=+\infty$ car $\rho^2>0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 nS_x^2}=0$. Par encadrement ① donne $\lim\limits_{n\to+\infty}P(|A_n-a|\geq\varepsilon)=0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)=\lambda$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\overline{x}\overset{!!}{=}\lambda$. Rappelons que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_x^2=\rho^2$ et que $\rho^2>0$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{\overline{x}^2}{S_x^2}\right)\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\times n}\right)=\left(1+\frac{\lambda^2}{\rho^2}\right)\times 0$. Par encadrement ② donne $\lim\limits_{n\to+\infty}P(|B_n-b|\geq\varepsilon)=0$

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty}P(|A_n-a|\geq\varepsilon)=\lim\limits_{n\to+\infty}P(|B_n-b|\geq\varepsilon)=0$

Alors les deux suites $(A_n)_{n\geq3}$ et $(B_n)_{n\geq3}$ convergent en probabilité vers a et b respectivement.

(Q6) a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Y, A_n et B_n possèdent une espérance donc $\hat{U}_i$ qui vaut $Y_i - A_n x_i - B_n$ possède une espérance comme combinaison linéaire de trois variables aléatoires qui possèdent une espérance.

De plus $E(\hat{U}_i) = E(Y_i) - x_i E(A_n) - E(B_n) = a x_i + b - x_i \times a - b = 0$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\underline{E(\hat{U}_i) \text{ existe et vaut } 0}$.

b) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $\hat{U}_i = Y_i - A_n x_i - B_n = Y_i - A_n x_i - (\overline{Y}_n - A_n \overline{x}) = Y_i - \overline{Y}_n - A_n(x_i - \overline{x})$.

$$Y_i - \overline{Y}_n = a x_i + b + U_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = a x_i + b + U_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a x_k + b + U_k).$$

$$Y_i - \overline{Y}_n = a x_i + b + U_i - a\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k.$$

$$Y_i - \overline{Y}_n = a x_i + b + U_i - a\overline{x} - \frac{b}{n}\times n - \overline{U}_n = a(x_i - \overline{x}) + U_i - \overline{U}_n.$$

Alors $\hat{U}_i = Y_i - \overline{Y}_n - A_n(x_i - \overline{x}) = a(x_i - \overline{x}) + U_i - \overline{U}_n - A_n(x_i - \overline{x})$.

$$\underline{\hat{U}_i = U_i - \overline{U}_n - (x_i - \overline{x})(A_n - a)}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[(U_i - \overline{U}_n)^2 - 2(A_n - a)(x_i - \overline{x})(U_i - \overline{U}_n) + (x_i - \overline{x})^2 (A_n - a)^2\right].$$

$$\underline{\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(U_i - \overline{U}_n)^2 - 2(A_n - a)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(U_i - \overline{U}_n) + (A_n - a)^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \quad (*)}$$

Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(U_i - \overline{U}_n) = \sum_{i=1}^{n}(n S_x^2 \alpha_i)(U_i - \overline{U}_n) = n S_x^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i - n S_x^2 \overline{U}_n \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}_{=0} = n S_x^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i$.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(U_i - \overline{U}_n) = n S_x^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (Y_i - a x_i - b) = n S_x^2\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i - a\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}_{=1} - b\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}_{=0}\right].$$

$$\underline{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(U_i - \overline{U}_n) = n S_x^2\left[A_n - a\right]}.$$

en reportant dans $(*)$ il vient :

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(U_i - \overline{U}_n)^2 - 2(A_n - a) n S_x^2 (A_n - a) + (A_n - a)^2 n S_x^2 = \sum_{i=1}^{n}(U_i - \overline{U}_n)^2 - n S_x^2 (A_n - a)^2.$$

Ainsi $\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (U_i - \bar{U}_n)^2 - n\, S_x^2\, (A_n - a)^2$.

c] Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $(U_i - \bar{U}_n)^2 = U_i^2 - 2\bar{U}_n U_i + \bar{U}_n^2$.

U_i^2 possède une variance donc un moment d'ordre 2. Alors $E(U_i^2)$ existe.

De plus $E(U_i^2) = V(U_i) + (E(U_i))^2 = \sigma^2 + 0^2 = \sigma^2$. $E(U_i^2) = \sigma^2$.

$\bar{U}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k$ possède un moment d'ordre 2 comme combinaison linéaire de n variables aléatoires qui possèdent un moment d'ordre 2 donc $E(\bar{U}_n^2)$ existe.

$E(\bar{U}_n^2) = V(\bar{U}_n) + (E(\bar{U}_n))^2$.

Or $E(\bar{U}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(U_k) \overset{E(U_k)=0}{=} 0$

$V(\bar{U}_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k\right) \underset{\text{par indépendance}}{=} \sum_{k=1}^{n} V\left(\frac{1}{n}U_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} V(U_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$. Alors $E(\bar{U}_n^2) = \frac{\sigma^2}{n}$.

U_i et $\bar{U}_n$ possèdent un moment d'ordre 2 donc $U_i\bar{U}_n$ possède une espérance.

$E(U_i\bar{U}_n) = E\left(U_i \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(U_i U_k) = \frac{1}{n}E(U_i^2) + \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} E(U_i U_k)$.

$E(U_i\bar{U}_n) = \frac{1}{n}\sigma^2 + \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} E(U_i)\underbrace{E(U_k)}_{=0}$ par indépendance.

$E(U_i\bar{U}_n) = \frac{1}{n}\sigma^2$.

Finalement $(U_i - \bar{U}_n)^2$ qui vaut $U_i^2 - 2\bar{U}_n U_i + \bar{U}_n^2$ possède une espérance comme combinaison linéaire de trois variables aléatoires qui possèdent une espérance.

De plus $E((U_i - \bar{U}_n)^2) = E(U_i^2) - 2E(\bar{U}_n U_i) + E(\bar{U}_n^2) = \sigma^2 - 2\times\frac{1}{n}\sigma^2 + \frac{1}{n}\sigma^2$.

$E((U_i - \bar{U}_n)^2) = (1 - \frac{1}{n})\sigma^2$. Alors $\sum_{i=1}^{n}(U_i - \bar{U}_n)^2$ possède une espérance

et $E\left(\sum_{i=1}^{n}(U_i - \bar{U}_n)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} E((U_i - \bar{U}_n)^2) = \sum_{i=1}^{n}(1 - \frac{1}{n})\sigma^2 = n(1 - \frac{1}{n})\sigma^2$.

$E\left(\sum_{i=1}^{n}(U_i-\bar{U}_n)^2\right) = (n-1)\sigma^2$ ce qui n'est pas un scoop.

$(A_n-a)^2 = (A-E(A_n))^2$ donc $(A_n-a)^2$ possède une espérance qui vaut $V(A_n)$.

Alors $\sum_{i=1}^{n}\hat{U}_i^2$ qui vaut $\sum_{i=1}^{n}(U_i-\bar{U}_n)^2 - nS_x^2(A_n-a)^2$ possède une espérance comme combinaison de deux variables aléatoires qui possèdent une espérance.

De plus $E\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{U}_i^2\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n}(U_i-\bar{U}_n)^2\right) - nS_x^2\,E\left((A_n-a)^2\right)$.

$E\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{U}_i^2\right) = (n-1)\sigma^2 - nS_x^2\,V(A_n) = (n-1)\sigma^2 - nS_x^2 \times \frac{\sigma^2}{nS_x^2} = (n-1)\sigma^2 - \sigma^2.$

$E\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{U}_i^2\right) = (n-2)\sigma^2.$

Donc $E\left(\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\hat{U}_i^2\right) = \sigma^2 \quad (n \geqslant 3).$

Donc $\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\hat{U}_i^2$ doit être un estimateur sans biais de σ^2...