PARTIE III Hypothèse de normalité et prévision

Q8 a) Commençons par deux rappels de cours et par la preuve d'un lemme

R1 T est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance m et de variance σ^2. $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \neq 0$

Alors $aT+b$ suit la loi normale d'espérance $am+b$ et de variance $(|a|\sigma)^2$.

R2 T_1 et T_2 sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si $T_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et si $T_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, $T_1 + T_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1+m_2, (\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})^2)$

Lemme .. $n \in \mathbb{N}^*$. 1°/ $T_1, T_2, \dots, T_n$ sont n variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$;

2°/ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont n réels non tous nuls;

3°/ $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $T_i \hookrightarrow \mathcal{N}(m_i, \sigma_i)$.

Alors $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \dots + \lambda_n T_n$ suit la loi normale d'espérance $\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \dots + \lambda_n m_n$ et de variance $\lambda_1^2 \sigma_1^2 + \lambda_2^2 \sigma_2^2 + \dots + \lambda_n^2 \sigma_n^2$.

▲ Preuve du lemme. Montrons ce résultat par récurrence sur n.

- Soit $\lambda_1 \in \mathbb{R}^*$. Soit T_1 une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres m_1 et σ_1^2. D'après R_1, $\lambda_1 T_1$ suit la loi normale d'espérance $\lambda_1 m_1$ et de variance $(|\lambda_1|\sigma_1)^2$ ou de variance $\lambda_1^2 \sigma_1^2$.

  La propriété est donc vraie pour $n=1$.
- Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

Soient $T_1, T_2, \dots, T_{n+1}$ $n+1$ variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ $n+1$ réels non tous nuls. On suppose que $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $T_i \hookrightarrow \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$

Posons $C_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i$, $C_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i T_i$ et $W_{n+1} = \lambda_{n+1} T_{n+1}$. $C_{n+1} = C_n + W_{n+1}$

1er cas. $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et $\lambda_{n+1} \neq 0$.

L'hypothèse de récurrence montre que C_n suit la loi normale d'espérance $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i$ et de variance $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \sigma_i^2$.

D'après le rappel 1, W_{n+1} suit la loi normale d'espérance $\delta_{n+1} m_{n+1}$ et de variance $\delta_{n+1}^2 \sigma_{n+1}^2$.

De plus, comme $T_1, T_2, \dots, T_n, T_{n+1}$ sont indépendantes $\sum_{i=1}^{n} \delta_i T_i$ et $\delta_{n+1} T_{n+1}$ sont indépendantes. Ainsi C_n et W_{n+1} sont indépendantes.

Le rappel 2 montre alors que $C_{n+1} = C_n + W_{n+1}$ suit la loi normale d'espérance $\sum_{i=1}^{n} \delta_i m_i + \delta_{n+1} m_{n+1}$ et de variance $\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 \sigma_i^2 + \delta_{n+1}^2 \sigma_{n+1}^2$.

Ainsi $\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i T_i$ suit la loi normale d'espérance $\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i m_i$ et de variance $\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^2 \sigma_i^2$

<u>2ème cas</u> $\delta_{n+1} = 0$.

Alors $C_{n+1} = C_n$ et $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. L'hypothèse de récurrence montre que C_{n+1} suit la loi normale d'espérance $\sum_{i=1}^{n} \delta_i m_i$ et de variance $\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 \sigma_i^2$.

Mais $\delta_{n+1} = 0$ donc C_{n+1} suit également la loi normale d'espérance $\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i m_i$ et de variance. $\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^2 \sigma_i^2$.

<u>3ème cas.</u> $\delta_{n+1} \neq 0$ et $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Alors $C_{n+1} = \delta_{n+1} T_{n+1} = W_{n+1}$ et $W_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{N}(\delta_{n+1} m_{n+1}, (|\delta_{n+1}| \sigma_{n+1})^2)$.

Donc C_{n+1} suit la loi normale d'espérance $\delta_{n+1} m_{n+1}$ et de variance $\delta_{n+1}^2 \sigma_{n+1}^2$.

Comme $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = 0$, C_{n+1} suit encore la loi normale d'espérance $\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i m_i$ et de variance $\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^2 \sigma_i^2$.

Ceci achève la récurrence et la preuve du lemme ▼

Montrons que le vecteur $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ est normal.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $Y_i = a x_i + b + U_i$ et $U_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Le rappel 1 montre alors que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{N}(a x_i + b, \sigma^2)$.

De plus $U_1, U_2, \dots, U_n$ sont indépendantes donc $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont indépendantes.

Soit alors $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ n réels non tous nuls. Le comme montre que $\sum_{i=1}^{n} \delta_i Y_i$ suit la loi normale d'espérance $\sum_{i=1}^{n} \delta_i (a x_i + b)$ et de variance $\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 \sigma^2$.

Cette variance n'est pas nulle (!) car $\sigma > 0$ et $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

Par conséquent $\sum_{i=1}^{n} \delta_i Y_i$ suit une loi normale de variance non nulle (sic) !

Ceci permet d'affirmer que $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ est un vecteur aléatoire normal.

Posons $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\delta_i = 1$.

$\delta_1(Y_1 - \overline{Y}_n) + \delta_2(Y_2 - \overline{Y}_n) + \dots + \delta_n(Y_n - \overline{Y}_n) = (Y_1 - \overline{Y}_n) + (Y_2 - \overline{Y}_n) + \dots + (Y_n - \overline{Y}_n) = \sum_{i=1}^{n} Y_i - n\overline{Y}_n = n\overline{Y}_n - n\overline{Y}_n$

Alors $\sum_{i=1}^{n} \delta_i (Y_i - \overline{Y}_n)$ est la variable certaine nulle donc elle ne suit pas une loi normale, et les réels $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ ne sont pas tous nuls.

Ainsi $(Y_1 - \overline{Y}_n, Y_2 - \overline{Y}_n, \dots, Y_n - \overline{Y}_n)$ n'est pas un vecteur aléatoire normal.

b) • $A_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i$ • $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont indépendantes • $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{N}(a x_i + b, \sigma^2)$.

Supposons que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\frac{x_i - \overline{x}}{n S_x^2} = 0$; $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \overline{x}$ donc $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Alors • $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

Le comme montre que A_n suit la loi normale d'espérance $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a x_i + b)$ et de variance $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma^2$. Rappelons que $E(A_n) = a$ et $V(A_n) = \frac{\sigma^2}{n S_x^2}$.

A_n suit la loi normale d'espérance a et de variance $\frac{\sigma^2}{n S_x^2}$.

$B_n = \overline{Y}_n - A_n \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i - \overline{x} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \overline{x} \alpha_i\right) Y_i$

Posons pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $\beta_i = \frac{1}{n} - \overline{x} \alpha_i$. Alors $B_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i Y_i$.

De plus $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont indépendantes et pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{N}(a x_i + b, \sigma^2)$.

Supposons que $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$. Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\overline{x} \alpha_i = \frac{1}{n}$.

Donc $\bar{x} \neq 0$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i = \frac{1}{n\bar{x}}$. $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$.

Alors $\frac{x_1-\bar{x}}{nS_x^2} = \frac{x_2-\bar{x}}{nS_x^2} = \dots = \frac{x_n-\bar{x}}{nS_x^2}$; $x_1-\bar{x} = x_2-\bar{x} = \dots = x_n-\bar{x}$. $x_1=x_2=\dots=x_n$!!

Finalement $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Le lemme permet alors de dire que

B_n suit la loi normale d'espérance $\sum_{i=1}^n \sigma_i (a x_i + b)$ et de variance $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \sigma^2$.

Rappelons que $E(B_n) = b$ et $V(B_n) = \left(1+\frac{\bar{x}^2}{S_x^2}\right)\frac{\sigma^2}{n}$.

Alors B_n suit la loi normale d'espérance b et de variance $\left(1+\frac{\bar{x}^2}{S_x^2}\right)\frac{\sigma^2}{n}$.

Soit $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(s_1, s_2) \neq (0,0)$.

$s_1 A_n + s_2 B_n = s_1 \sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i + s_2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \bar{x}\alpha_i\right) Y_i = \sum_{i=1}^n \left(s_1 \alpha_i - \frac{s_2}{n} - s_2 \bar{x} \alpha_i\right) Y_i$.

Posons, pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, $\delta_i = s_1 \alpha_i - \frac{s_2}{n} - s_2 \bar{x} \alpha_i$.

Alors $s_1 A_n + s_2 B_n = \sum_{i=1}^n \delta_i Y_i$; $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont indépendantes ; $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{N}(ax_i+b, \sigma^2)$.

Supposons que $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = 0$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(s_1 - s_2\bar{x})\alpha_i - \frac{s_2}{n} = 0$.

<u>1er cas</u>.. $s_1 - s_2\bar{x} = 0$. Alors $\frac{s_2}{n} = 0$. $s_2 = 0$. Donc $s_1 = s_2\bar{x} = 0$. $s_1 = s_2 = 0$!!

<u>2e cas</u>.. $s_1 - s_2\bar{x} \neq 0$. Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i = \frac{s_2}{n(s_1 - s_2\bar{x})}$.

Ainsi $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$. Ce qui donne comme nous venons de le voir

$x_1 = x_2 = \dots = x_n$!!

Finalement $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Le lemme permet alors de dire que

$\sum_{i=1}^n \delta_i Y_i$ suit une loi normale. Donc $s_1 A_n + s_2 B_n$ suit une loi normale de

variance nécessairement non nulle. Ceci pour tout $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Alors :

(A_n, B_n) est un vecteur aléatoire normal.

Q8 a) Posons $S = (s_{i,j})$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $T_i = \sum_{j=1}^{n} s_{i,j} U_j$.

Soit $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i T_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \sum_{j=1}^{n} s_{i,j} U_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_i s_{i,j} \right) U_j .$$

Posons $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_i s_{i,j}$.

Alors • $\sum_{i=1}^{n} \delta_i T_i = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j U_j$ • $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ sont indépendantes

• $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $U_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Il reste pour utiliser le lemme que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

Supposons que $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\varepsilon_j = 0$. Alors $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} \delta_i s_{i,j} = 0$.

Ainsi $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $(\delta_1\ \delta_2 \cdots \delta_n) \begin{pmatrix} s_{1j} \\ s_{2j} \\ \vdots \\ s_{nj} \end{pmatrix} = 0$. Donc $(\delta_1\ \delta_2 \cdots \delta_n) S = 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})}$.

Rappelons que S est inversible. multiplions l'égalité précédente à droite par S^{-1}.

Alors $(\delta_1\ \delta_2 \cdots \delta_n) \underbrace{S S^{-1}}_{I_n} = 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})} S^{-1} = 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})}$. Donc $(\delta_1\ \delta_2 \cdots \delta_n) = 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})}$.

Par conséquent $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = 0$ ce qui contredit l'hypothèse.

Finalement • $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

le lemme montre alors que $\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j U_j$ suit une loi normale. Donc $\sum_{i=1}^{n} \delta_i T_i$ suit une loi normale de variance nécessairement non nulle, et ceci pour tout

!!!

$(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Alors $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ est un vecteur aléatoire normal.

b) D'après le résultat admis, pour montrer que $T_1, T_2, \dots, T_n$ sont mutuellement indépendantes il suffit de montrer que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow \mathrm{cov}(T_i, T_j) = 0$ car $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ est un vecteur aléatoire normal.

Soient i et j deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$.

$cov(T_i,T_j) = cov\left(\sum_{k=1}^{n} s_{i,k} U_k , \sum_{\ell=1}^{n} s_{j,\ell} U_\ell\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} s_{i,k}\, s_{j,\ell}\, cov(U_k,U_\ell)$.

Or $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, $k \neq \ell \Rightarrow cov(U_k,U_\ell) = 0$ car $U_1, U_2, \dots, U_n$ sont indépendantes.

De plus $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $cov(U_k,U_k) = V(U_k) = \sigma^2$.

Alors $cov(T_i,T_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} s_{i,k}\, s_{j,k}\right)\sigma^2$.

$S = (s_{i,j})$ donc $S^tS = \left(\sum_{k=1}^{n} s_{i,k}\, s_{j,k}\right)$. S est orthogonale donc $S^tS = I_n$.

~~Rappelons~~ (!) deux éléments distincts i et j de $[\![1,n]\!]$.

Comme $S^tS = I_n$, $\sum_{k=1}^{n} s_{i,k}\, s_{j,k} = 0$ car $i \neq j$. Alors $cov(T_i,T_j) = 0$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow cov(T_i,T_j) = 0$. $T_1, T_2, \dots, T_n$ sont mutuellement indépendantes.

(Q9) a) Montrons que $\hat{U} = GU$. Il nous faut donc montrer que :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \begin{pmatrix} \hat{U}_1(\omega) \\ \hat{U}_2(\omega) \\ \vdots \\ \hat{U}_n(\omega) \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} U_1(\omega) \\ U_2(\omega) \\ \vdots \\ U_n(\omega) \end{pmatrix}.$$

Soit $\omega \in \Omega$.

Posons $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $u_i = U_i(\omega)$, $y_i = Y_i(\omega)$. Posons $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\theta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Y_i = ax_i + b + U_i$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $y_i = ax_i + b + u_i$ ou $y = M\theta + u$ ...?

Posons $\bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$. $\bar{y} = \frac{1}{n}[Y_1(\omega) + \dots + Y_n(\omega)] = \bar{Y}_n(\omega)$.

Posons encore $\hat{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$, $\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}$, $\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$ et $\hat{u} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{pmatrix} = y - M\hat{\theta}$. $\underline{\hat{u} = y - M\hat{\theta}}$.

I Q3 d) donne : $\hat{u} = Gy = Gu$ donc $\begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} U_1(\omega) \\ U_2(\omega) \\ \vdots \\ U_n(\omega) \end{pmatrix}$.

Il ne reste donc plus qu'à montrer que $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $\hat{u}_i = \hat{U}_i(\omega)$.

Or $\hat{U} = Y - M\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$. Donc $\hat{U}(\omega) = Y(\omega) - M\begin{pmatrix} A_n(\omega) \\ B_n(\omega) \end{pmatrix}$.

Alors $\begin{pmatrix} \hat{U}_1(\omega) \\ \hat{U}_2(\omega) \\ \vdots \\ \hat{U}_n(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1(\omega) \\ Y_2(\omega) \\ \vdots \\ Y_n(\omega) \end{pmatrix} - M\begin{pmatrix} A_n(\omega) \\ B_n(\omega) \end{pmatrix} = y - M\begin{pmatrix} A_n(\omega) \\ B_n(\omega) \end{pmatrix}$.

De plus $A_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = \hat{a}$.

$$B_n(\omega) = \overline{Y}_n(\omega) - A_n(\omega)\overline{x} = \frac{Y_1(\omega)+Y_2(\omega)+\dots+Y_n(\omega)}{n} - \hat{a}\overline{x} = \frac{y_1+y_2+\dots+y_n}{n} - \hat{a}x = \overline{y} - \hat{a}\overline{x} = \hat{b}$$

donc $\begin{pmatrix} A_n(\omega) \\ B_n(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \hat{\theta}$. Alors $\begin{pmatrix} \hat{U}_1(\omega) \\ \hat{U}_2(\omega) \\ \vdots \\ \hat{U}_n(\omega) \end{pmatrix} = y - M\hat{\theta} = \hat{u} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{pmatrix}$.

Comme $\hat{u} = Gu$: $\begin{pmatrix} \hat{U}_1(\omega) \\ \hat{U}_2(\omega) \\ \vdots \\ \hat{U}_n(\omega) \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.

Ainsi $\begin{pmatrix} \hat{U}_1(\omega) \\ \hat{U}_2(\omega) \\ \vdots \\ \hat{U}_n(\omega) \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} U_1(\omega) \\ U_2(\omega) \\ \vdots \\ U_1(\omega) \end{pmatrix}$ et ceci pour tout ω dans Ω. Donc $\underline{\underline{\hat{U} = GU}}$.

$\underline{b)}$ Nous avons vu dans I c) que G est symétrique et que G est la matrice du projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{K}^\perp$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Or $\dim \mathcal{K} = 2$ donc $(\dim \mathcal{K})^\perp = n-2$.

Alors $Sp\, G = \{1, 0\}$, $\dim SEP(G,1) = n-2$ et $\dim SEP(G,0) = 2$.

$M_{n,1}(\mathbb{R}) = SEP(G,1) \oplus SEP(G,0)$. De plus $SEP(G,1)$ et $SEP(G,0)$ sont orthogonaux car G est symétrique et $G \in M_n(\underline{\underline{\mathbb{R}}})$.

Soit B_1 (resp. B_2) une base orthonormée de $SEP(G,1)$ (resp. $SEP(G,0)$).

Alors "$B_1 \cup B_2$" est une base orthonormée de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de G respectivement associés aux valeurs propres $1, 1, \dots, 1, 0, 0$.

Soit R la matrice de passage de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base "$B_1 \cup B_2$"

1) R est une matrice orthogonale comme matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée.

2) ${}^tR\,G\,R = R^{-1}\,G\,R = \mathrm{Diag}(1,1,\dots,1,0,0) = \sum_{i=1}^{n-2} E_{i,i}$ où $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ est la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$. Notons que $G = RDR^{-1} = RD\,{}^tR$.

<u>Il existe une matrice orthogonale R de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $G = RD\,{}^tR$ où D</u>

<u>est la matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ égale à $\mathrm{Diag}(1,1,\dots,1,0,0)$ ou $\sum_{i=1}^{n-2} E_{i,i}$.</u>

<u>Remarque</u>.. ceci répond à la question... avec plus de précision sur D...

c) Posons $R = (r_{ij})$. $Z = {}^tRU$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Z_i = \sum_{j=1}^{n} r_{j,i}\,U_j$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $\begin{pmatrix} r_{1,i} \\ r_{2,i} \\ \vdots \\ r_{n,i} \end{pmatrix}$ est la $i^{\text{ème}}$ colonne de R et R est inversible. Donc cette colonne n'est pas $0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors :

- $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ sont mutuellement indépendantes
- $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $U_j \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$
- $Z_i = \sum_{j=1}^{n} r_{j,i}\,U_j$
- $(r_{1,i}, r_{2,i}, \dots, r_{n,i}) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

Le cours montre que Z_i suit la loi normale d'espérance $\underbrace{\sum_{j=1}^{n} r_{j,i} \times 0}_{=0\,!}$ et de variance $\sum_{j=1}^{n} (r_{j,i})^2\,\sigma^2$.

Or $I_n = {}^tRR = \left(\sum_{k=1}^{n} r_{k,p}\,r_{k,q}\right)_{\substack{1\le p\le n\\ 1\le q\le n}}$ donc $\forall p \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} (r_{k,p})^2 = 1$. Alors $\sum_{j=1}^{n} (r_{j,i})^2\,\sigma^2 = \sigma^2$.

Alors <u>$Z_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$</u>. Notons que $\frac{Z_i}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Montrons alors que si T est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite alors T^2 suit la loi gamma de paramètre 2 et $1/2$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$ et notons Φ la fonction de répartition de T.

Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\Phi' = \varphi$. Déterminons la fonction de répartition F_{T^2} de T^2.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_{T^2}(x) = P(T^2 \leq x) = 0$. Soit $x \in [0,+\infty[$.

$F_{T^2}(x) = P(T^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq T \leq \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} < T \leq \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{T^2}(x) = \begin{cases} \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\end{cases}.$$

Notons que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{T^2}(x) = \begin{cases} \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \end{cases}.$$

F_{T^2} est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$. En particulier F_{T^2} est continue sur $]-\infty, 0]$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto -\sqrt{x}$ sont continues sur $[0,+\infty[$ et Φ est continue sur $\mathbb{R}$. Par composition $x \mapsto \Phi(\sqrt{x})$ et $x \mapsto \Phi(-\sqrt{x})$ sont continues sur $[0,+\infty[$. Par différence F_{T^2} est continue sur $[0,+\infty[$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto -\sqrt{x}$ sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Par composition $x \mapsto \Phi(\sqrt{x})$ et $x \mapsto \Phi(-\sqrt{x})$ sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Par différence F_{T^2} est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

Ce qui précède suffit pour dire que F_{T^2} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Alors T^2 est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_{T^2}'(x) = 0$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $F_{T^2}'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \varphi(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \varphi(-\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\varphi(\sqrt{x}) + \varphi(-\sqrt{x}))$

$\forall x \in]0,+\infty[$, $F_{T^2}'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} 2\varphi(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \varphi(\sqrt{x})$ car φ est paire sur $\mathbb{R}$.

Posons
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{T^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} \varphi(\sqrt{x}) & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
f_{T^2} est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F_{T^2}' sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

f_{T^2} est une densité de T^2. Notons que $\forall x \in]0,+\infty[$, $f_{T^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}} = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{1}{2}-1}}{2^{1/2}\sqrt{\pi}}$.

Posons $\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x/2}\,x^{1/2-1}}{2^{1/2}\,\Gamma(1/2)} & \text{si } x\in\,]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

h est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètres 2 et 1/2. $\forall x\in\,]0,+\infty[$, $f_{T^2}(x)=\dfrac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}}h(x)$. Mieux $\forall x\in\underline{\underline{\mathbb{R}}}$, $f_{T^2}(x)=\dfrac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}}h(x)$.

Alors $1=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{T^2}(x)\,dx=\frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)\,dx=\frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}}\times 1=\frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}}$.

Alors $\dfrac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}}=1$ donc $f_{T^2}=h$. Ainsi <u>T^2 suit la loi gamma de paramètres 2 et 1/2.</u>

<u>Remarque</u>.. ce qui précède montre que $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$...

Soit $i\in[\![1,n]\!]$. $Z_i\hookrightarrow\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. $\dfrac{Z_i}{\sigma}\hookrightarrow\mathcal{N}(0,1)$. Alors $\left(\dfrac{Z_i}{\sigma}\right)^2\hookrightarrow\Gamma(2,\tfrac{1}{2})$.

$\dfrac{Z_i^2}{\sigma^2}\hookrightarrow\Gamma(2,\tfrac{1}{2})$ et ainsi <u>$Z_i^2\hookrightarrow\Gamma(2\sigma^2,\tfrac{1}{2})$.</u>

$Z={}^tRU$ et ${}^tR$ est une matrice orthogonale. Alors Q8 b) montre que les variables aléatoires $Z_1,Z_2,\dots,Z_n$ sont mutuellement indépendantes.

Dans ces conditions $Z_1^2,Z_2^2,\dots,Z_n^2$ sont mutuellement indépendantes.

Alors 1) $Z_1^2,Z_2^2,\dots,Z_{n-2}^2$ sont mutuellement indépendantes ;

2) $\forall i\in[\![1,n-2]\!]$, $Z_i^2\hookrightarrow\Gamma(2\sigma^2,\tfrac{1}{2})$.

Le phénomène de stabilité de la somme sur les lois gamma montre que

<u>$\displaystyle\sum_{i=1}^{n-2}Z_i^2$ suit la loi gamma de paramètres $2\sigma^2$ et $\dfrac{n-2}{2}$.</u>

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\hat{U}_i^2={}^t\hat{U}\hat{U}={}^t(GU)GU={}^tU\,{}^tGGU\underset{\uparrow}{=}{}^tUGU={}^tURD\,{}^tRU={}^t({}^tRU)D\,{}^tRU$.

${}^tGG=G^2=G$

${}^tRU=\begin{pmatrix}Z_1\\Z_2\\\vdots\\Z_n\end{pmatrix}$ et $D=\mathrm{Diag}(1,1,\dots,1,0,0)$.

Alors $D\,{}^tRU=\begin{pmatrix}Z_1\\Z_2\\\vdots\\Z_{n-2}\\0\\0\end{pmatrix}$. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\hat{U}_i^2={}^t({}^tRU)D\,{}^tRU=(Z_1\,Z_2\cdots Z_n)\begin{pmatrix}Z_1\\Z_2\\\vdots\\Z_{n-2}\\0\\0\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n-2}Z_i^2$.

R.

Alors $\sum_{i=1}^{n} U_i^2 = \sum_{i=1}^{n-2} Z_i^2$. Donc $\underline{\underline{\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 \hookrightarrow \Gamma(2\sigma^2, \frac{n-2}{2})}}$.

e) Rappelons que $\sum_{i=1}^{n-2} \frac{Z_i^2}{\sigma^2} \hookrightarrow \Gamma(2, \frac{n-2}{2})$ et notons F_n sa fonction de répartition.

F_n ne dépend que de n donc F_n ne dépend pas des paramètres inconnus a, b et σ^2.

F_n est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. $1-p \in]0,1[$, $\lim_{x\to+\infty} F_n(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} F_n(x) = 0$.

Alors $\exists A \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > A \Rightarrow F_n(x) > 1-p$. En particulier $F_n(A+1) > 1-p$.

$\exists B \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < -B \Rightarrow F_n(x) < 1-p$. En particulier $F_n(-B-1) < 1-p$.

Or F_n est continue sur $[-B-1, A+1]$ et $1-p \in]F_n(-B-1), F_n(A+1)[$.

Le théorème des valeurs intermédiaires montre que F_n prend sur $[-B-1, A+1]$ toutes les valeurs comprises entre $F_n(-B-1)$ et $F_n(A+1)$.

Ainsi $\exists c_n \in [-B-1, A+1]$, $F_n(c_n) = 1-p$

Alors $P\left(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{Z_i^2}{\sigma^2} \leq c_n\right) = 1-p$.

Donc $P\left(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{Z_i^2}{\sigma^2} \geq c_n\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{Z_i^2}{\sigma^2} > c_n\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{Z_i^2}{\sigma^2} \leq c_n\right) = 1-(1-p) = p$

Donc $P\left(\sum_{i=1}^{n-2} Z_i^2 \geq \sigma^2 c_n\right) = p$ car $\sigma^2 > 0$. Alors $P\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 \geq c_n \sigma^2\right) = p$.

<u>Pour tout p dans $]0,1[$ il existe un réel c_n ne dépendant pas des paramètres</u>

<u>inconnus a, b et σ^2 tel que $P\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 \geq c_n \sigma^2\right) = p$.</u>

<u>Remarques</u> 1. En se fatiguant un peu plus on peut montrer l'unicité de c_n car F_n est nulle sur $]-\infty, 0[$ et réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,1[$, non ?

2.. F_n est nulle sur $]-\infty,0[$ et même sur $]-\infty,0]$!

Or $1-p > 0$ et $F_n(c_n) = 1-p$. Donc $\underline{\underline{c_n > 0}}$.

Q10 a) Posons $\forall (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$, $\ell_1(r_1, r_2, \dots, r_n) = \sum_{i=1}^n r_i$ et $\ell_2(r_1, r_2, \dots, r_n) = \sum_{i=1}^n x_i r_i$

ℓ_1 et ℓ_2 sont deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Posons $\mathcal{C} = \{ r \in \mathbb{R}^n \mid \ell_1(r) = 1$ et $\ell_2(r) = x_{n+1} \}$ et

$\mathcal{H} = \mathrm{Ker}\, \ell_1 \cap \mathrm{Ker}\, \ell_2$.

Rappelons que $\mathcal{H}^{\perp} = \mathrm{Vect}(\nabla \ell_1(r), \nabla \ell_2(r))$ où r est un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi $\mathcal{H}^{\perp} = \mathrm{Vect}((1,1,\dots,1), (x_1, x_2, \dots, x_n)) = \mathcal{T}$.

Notons que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ car c'est une fonction polynomiale et $\mathbb{R}^n$ est un ouvert !

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points critiques de g dans l'optimisation pour la contrainte $\mathcal{C}$.

Soit $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$. $r \in \mathcal{S} \Leftrightarrow r \in \mathcal{C}$ et $\nabla g(r) \in \mathcal{H}^{\perp}$.

$r \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n r_i = 1$, $\sum_{i=1}^n x_i r_i = x_{n+1}$ et $(2r_1, 2r_2, \dots, 2r_n) \in \mathrm{Vect}((1,1,\dots,1), (x_1, x_2, \dots, x_n))$.

$r \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n r_i = 1$ $\sum_{i=1}^n x_i r_i = x_{n+1}$ et $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(2r_1, 2r_2, \dots, 2r_n) = \alpha(1,1,\dots,1) + \beta(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$r \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n r_i = 1$, $\sum_{i=1}^n x_i r_i = x_{n+1}$ et $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $r_i = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} x_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$r \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n r_i = 1$, $\sum_{i=1}^n x_i r_i = x_{n+1}$ et $\exists (\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2$, $r_i = \alpha' + \beta' x_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$r \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists (\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \forall i \in [\![1, n]\!], \quad r_i = \alpha' + \beta' x_i \\ 1 = \sum_{i=1}^n r_i = \sum_{i=1}^n (\alpha' + \beta' x_i) = n\alpha' + \beta' \sum_{i=1}^n x_i = n\alpha' + \beta' n \bar{x} \\ x_{n+1} = \sum_{i=1}^n x_i r_i = \sum_{i=1}^n x_i(\alpha' + \beta' x_i) = \alpha' \sum_{i=1}^n x_i + \beta' \sum_{i=1}^n x_i^2 = \alpha' n \bar{x} + \beta'(n S_x^2 + n \bar{x}^2) \end{cases}$$

[Q1 b)]

$$r \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists (\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \forall i \in [\![1, n]\!], \quad r_i = \alpha' + \beta' x_i \\ n\alpha' + n\bar{x}\beta' = 1 \\ n\bar{x}\alpha' + (n S_x^2 + n\bar{x}^2)\beta' = x_{n+1} \end{cases}.$$

Soit $(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} n\alpha' + n\bar{x}\beta' = 1 \\ n\bar{x}\alpha' + (n S_x^2 + n\bar{x}^2)\beta' = x_{n+1} \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \bar{x} L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} n\alpha' + n\bar{x}\beta' = 1 \\ n S_x^2 \beta' = x_{n+1} - \bar{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta' = \dfrac{x_{n+1} - \bar{x}}{n S_x^2} \\ \alpha' = \dfrac{1}{n}\left[1 - n\bar{x} \dfrac{x_{n+1} - \bar{x}}{n S_x^2}\right] = \dfrac{1}{n} - \bar{x} \dfrac{x_{n+1} - \bar{x}}{n S_x^2} \end{cases}.$$

$$\text{Alors } r \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists (\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \forall i \in [\![1, n]\!], \quad r_i = \alpha' + \beta' x_i \\ \alpha' = \dfrac{1}{n} - \bar{x} \dfrac{x_{n+1} - \bar{x}}{n S_x^2} \\ \beta' = \dfrac{x_{n+1} - \bar{x}}{n S_x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \ r_i = \frac{1}{n} - \bar{x} \frac{x_{n+1} - \bar{x}}{n S_x^2} + \frac{x_{n+1} - \bar{x}}{n S_x^2} x_i.$$

R.

$r \in \mathcal{C} \iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ r_i = \frac{1}{n} + \frac{x_{n+1}-\bar{x}}{n S_x^2}(x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n} + (x_{n+1}-\bar{x})\frac{x_i-\bar{x}}{n S_x^2} = \frac{1}{n} + (x_{n+1}-\bar{x})\alpha_i .$

Posons $\forall i \in [\![1,n]\!],\ r_i^0 = \frac{1}{n} + (x_{n+1}-\bar{x})\alpha_i$ et $r^0 = (r_1^0, r_2^0, \dots, r_n^0)$. r^0 est l'unique point critique de g dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Montrons que g admet en r^0 un minimum absolu sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Donnons "deux" méthodes (en fait c'est le même développement car g est une fonction polynôme de n variables de degré 2 ...).

Version 1   A la main !   Soit $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathcal{C}$. Posons $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) = r - r^0$.

Notons que $\ell_1(h) = \ell_1(r) - \ell_1(r^0) = 1 - 1 = 0$ et $\ell_2(h) = \ell_2(r) - \ell_2(r^0) = x_{n+1} - x_{n+1} = 0$.

Ainsi $\sum_{i=1}^{n} h_i = \sum_{i=1}^{n} x_i h_i = 0$

$g(r) = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (r_i^0 + h_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (r_i^0)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} r_i^0 h_i + \sum_{i=1}^{n} h_i^2 .$

$$g(r) - g(r^0) = 2\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{n} + (x_{n+1}-\bar{x})\alpha_i\right]h_i + \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \underset{\sum_{i=1}^{n} h_i = 0}{=} 2(x_{n+1}-\bar{x})\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i + \sum_{i=1}^{n} h_i^2 .$$

Or $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\bar{x})}{n S_x^2} h_i = \frac{1}{n S_x^2}\Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i h_i}_{=0} - \bar{x}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} h_i}_{=0}\Big] = 0 .$

Alors $g(r) - g(r^0) = \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \geqslant 0 .$

Finalement $\forall r \in \mathcal{C},\ g(r) \geqslant g(r^0)$. g admet en r^0 un minimum absolu sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Version 2 ..   Taylor-Lagrange à l'ordre 1 !

g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ comme fonction polynomiale. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $i \neq j$.

$\forall r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n,\ \frac{\partial g}{\partial r_i}(r) = 2 r_i$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial r_j \partial r_i}(r) = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $\forall r \in \mathbb{R}^n,\ \nabla g(r) = 2r$ et $\nabla^2 g(r) = 2 I_n$.

Soit $r \in \mathbb{R}^n$ et q_r la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ associée à $\nabla^2 g(r)$.

$\forall h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n,\ q_r(h) = (h_1\ h_2 \cdots h_n)\, 2 I_n \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = 2\sum_{i=1}^{n} h_i^2 .$

Soit $r \in \mathcal{B}$. Posons $h = r - r^o$. $[r^o, r^o + h] \subset \mathbb{R}^n$!

La formule de Taylor appliquée à l'ordre 1 à g donne :

$\exists \theta \in]0,1[$, $g(r^o + h) = g(r^o) + \langle \nabla g(r^o), h \rangle + \frac{1}{2} q_{r^o + \theta h}(h)$.

$\ell_1(h) = \ell_1(r) - \ell_1(r^o) = 1 - 1 = 0$ et $\ell_2(h) = \ell_2(r) - \ell_2(r^o) = x_{n+1} - x_{n+1} = 0$.

Donc $h \in \operatorname{Ker} \ell_1 \cap \operatorname{Ker} \ell_2$. Alors $h \in \mathcal{B}$ et $\nabla g(r^o) \in \mathcal{B}^{\perp}$. Ainsi $\langle \nabla g(r^o), h \rangle = 0$.

Alors $g(r) = g(r^o + h) = g(r^o) + \frac{1}{2} q_{r^o + \theta h}(h)$. Posons $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$.

Donc $g(r) = g(r^o) + \frac{1}{2} 2 \sum_{i=1}^{n} h_i^2$. $g(r) = g(r^o) + \sum_{i=1}^{n} h_i^2$.

Ainsi nous retrouvons la formule de la version 1 et nous pouvons encore dire que

$g(r) \geq g(r^o)$ et ceci pour tout r dans $\mathcal{B}$.

g possède en r^o un minimum absolu sous la contrainte $\mathcal{B}$.

b) Soit $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$. $\hat{Y}_{n+1}^{(r)}$ possède une espérance comme combinaison linéaire de n variables aléatoires qui possèdent une espérance.

$E(\hat{Y}_{n+1}^{(r)}) = \sum_{i=1}^{n} r_i E(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i (a x_i + b) = a \sum_{i=1}^{n} x_i r_i + b \sum_{i=1}^{n} r_i$.

$E(\hat{Y}_{n+1}^{(r)}) = E(Y_{n+1}) \iff a \sum_{i=1}^{n} x_i r_i + b \sum_{i=1}^{n} r_i = a x_{n+1} + b \iff \left(\sum_{i=1}^{n} x_i r_i - x_{n+1}\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} r_i - 1\right) b = 0$

Posons $t_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i - x_{n+1}$ et $t_2 = \sum_{i=1}^{n} r_i - 1$.

- Si $t_1 = t_2 = 0$: $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $t_1 \alpha + t_2 \beta = 0$.
- Réciproquement supposons que $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $t_1 \alpha + t_2 \beta = 0$.

Alors $t_1 \times 1 + t_2 \times 0 = t_1 \times 0 + t_2 \times 1 = 0$ donc $t_1 = t_2 = 0$.

Ainsi $\left(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ t_1 \alpha + t_2 \beta = 0\right) \iff t_1 = t_2 = 0$.

Donc $E(\hat{Y}_{n+1}^{(r)}) = E(Y_{n+1})$ pour tout (a,b) dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si :

$\sum_{i=1}^{n} x_i r_i - x_{n+1} = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} r_i - 1 = 0$.

$E(\hat{Y}_{n+1}^{(r)}) = E(Y_{n+1})$ pour tout (a,b) dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i r_i = x_{n+1}$.

$V(\widehat{Y}_{n+1}^{(r)})$ existe car $\widehat{Y}_{n+1}^{(r)}$ est combinaison linéaire de n variables aléatoires qui possèdent une variance.

$r_1Y_1, r_2Y_2, \dots, r_nY_n$ étant indépendantes : $V(\widehat{Y}_{n+1}^{(r)}) = \sum_{i=1}^{n} V(r_iY_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 V(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i^2\sigma^2$

Comme $\sigma^2 > 0$, $V(\widehat{Y}_{n+1}^{(r)})$ est minimale lorsque $E(\widehat{Y}_{n+1}^{(r)}) = E(Y_{n+1})$ pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} r_i^2$ est minimale sous les contraintes $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$ et $\sum_{i=1}^{n} x_ir_i = x_{n+1}$ donc si et seulement si $r = r^*$.

<u>Parmi les prédicteurs linéaires $\widehat{Y}_{n+1}^{(r)}$ de Y_{n+1} qui vérifient $E(\widehat{Y}_{n+1}^{(r)}) = E(Y_{n+1})$ pour tout (a,b) dans $\mathbb{R}^2$, $\widehat{Y}_{n+1}^{(r^*)}$ est celui qui a la plus petite variance.</u>

$$\widehat{Y}_{n+1}^{(r^*)} = \sum_{i=1}^{n} r_i^* Y_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} + (x_{n+1}-\overline{x})\alpha_i\right)Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i + (x_{n+1}-\overline{x})\sum_{i=1}^{n}\alpha_iY_i$$

$$\widehat{Y}_{n+1}^{(r^*)} = \overline{Y}_n + (x_{n+1}-\overline{x})A_n = A_nx_{n+1} + \overline{Y}_n - A_n\overline{x} = A_nx_{n+1} + B_n.$$

<u>$\widehat{Y}_{n+1}^{(r^*)} = A_nx_{n+1} + B_n$.</u>

Q11 <u>a)</u> 1°/ $Y_{n+1} - (A_nx_{n+1}+B_n) = Y_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} r_i^*Y_i = Y_{n+1} + \sum_{i=1}^{n}(-r_i^*)Y_i = \sum_{i=1}^{n}(-r_i^*)Y_i + Y_{n+1}$

2°/ $Y_i \hookrightarrow \mathcal{N}(ax_i+b, \sigma^2)$ pour tout $i\in[\![1, n+1]\!]$

3°/ $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, Y_{n+1}$ sont indépendantes

4°/ $(-r_1^*, -r_2^*, \dots, -r_n^*, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^{n+1}}$.

Alors $Y_{n+1} - (A_nx_{n+1}+B_n)$ suit une (!) loi normale.

$$E(Y_{n+1} - (A_nx_{n+1}+B_n)) = E(Y_{n+1}) - x_{n+1}E(A_n) - E(B_n) = ax_{n+1} + b - x_{n+1}a - b = 0.$$

$Y_{n+1} - (A_nx_{n+1}+B_n) = \sum_{i=1}^{n}(-r_i^*)Y_i + Y_{n+1}$ et $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+1}$ sont indépendantes. Alors

$$V(Y_{n+1} - (A_nx_{n+1}+B)) = \sum_{i=1}^{n}(-r_i^*)^2V(Y_i) + V(Y_{n+1}) = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i^{*2} + 1\right)\sigma^2.$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^{*2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} + (x_{n+1}-\bar{x})\alpha_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2} + 2\times\frac{1}{n}(x_{n+1}-\bar{x})\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}_{=0} + (x_{n+1}-\bar{x})^2\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2}_{\frac{1}{n}S_x^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^{*2} = \frac{1}{n} + (x_{n+1}-\bar{x})^2\frac{1}{n}S_x^2 .$$

Ainsi $Y_{n+1} - (Ax_{n+1}+B_n)$ suit la loi normale d'espérance nulle et de variance

$\left(\frac{1}{n} + (x_{n+1}-\bar{x})^2\frac{S_x^2}{n} + 1\right)\sigma^2.$

b) Posons $D_n = Y_{n+1} - A_n x_{n+1} - B_n$ et $\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n} + (x_{n+1}-\bar{x})^2\frac{S_x^2}{n}+1}$.

$D_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0, (\sigma_n\sigma)^2)$. Alors $\frac{D_n}{\sigma_n\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

$$\phi(-\delta) = 1-\phi(\delta)$$

$\forall \delta \in \mathbb{R}_+$, $P\left(\left|\frac{D_n}{\sigma_n\sigma}\right| \leq \delta\right) = P\left(-\delta \leq \frac{D_n}{\sigma_n\sigma} \leq \delta\right) = P\left(-\delta < \frac{D_n}{\sigma_n\sigma} \leq \delta\right) = \phi(\delta) - \phi(-\delta) \overset{\downarrow}{=} 2\phi(\delta)-1$

$\forall \delta \in \mathbb{R}_+$, $P\left(\left|\frac{D_n}{\sigma_n\sigma}\right| \leq \delta\right) = p \iff 2\phi(\delta)-1 = p \iff \phi(\delta) = \frac{p+1}{2}$.

Or $\frac{p+1}{2} \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et ϕ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

Alors $\forall \delta \in \mathbb{R}_+$, $P\left(\left|\frac{D_n}{\sigma_n\sigma}\right| \leq \delta\right) = p \iff \delta = \phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)$. Notons que $\phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right) > 0$ car $\frac{p+1}{2} > \frac{1}{2}$.

Donc $P\left(\left|\frac{D_n}{\sigma_n\sigma}\right| \leq \phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)\right) = p$. $P\left(|D_n| \leq \sigma_n\phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)\sigma\right) = p$ car $\sigma_n\sigma > 0$.

Posons $d_n = \sigma_n\phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)$. $d_n = \sqrt{\frac{1}{n} + (x_{n+1}-\bar{x})^2\frac{S_x^2}{n}+1}\ \phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)$ ne dépend pas de

a, b et σ^2 et $P\left(|Y_{n+1} - (A_n x_{n+1} + B_n)| \leq d_n\sigma\right) = p$.

Remarque : $d_n = \sqrt{\frac{1}{n} + (x_{n+1}-\bar{x})^2\frac{S_x^2}{n}+1}\ \phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)$.

Or d_n est strictement positif comme produit de deux réels strictement positifs.

R.

c) Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2$. Q3 e) nous a donné $P(S_n \geq c_n \sigma^2) = p$ avec $c_n > 0$.

donc $P(\sqrt{S_n} \geq \sqrt{c_n}\,\sigma) = p$ car $c_n > 0$, $\sigma > 0$ et S_n prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Q3 b) nous a donné $P(|D_n| \leq d_n \sigma) = p$ avec $d_n > 0$.

$\left(\left\{ \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} \geq \sigma \right\}, \left\{ \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} < \sigma \right\} \right)$ est un système complet d'événements.

de plus $P\left(\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} \geq \sigma \right) = p$ et $P\left(\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} < \sigma \right) = 1 - p$. La formule des probabilités totales donne alors :

$$p = P(|D_n| \leq d_n \sigma) = P\left(\{|D_n| \leq d_n \sigma\} \cap \left\{ \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} \geq \sigma \right\} \right) + P\left(\{|D_n| \leq d_n \sigma\} \cap \left\{ \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} < \sigma \right\} \right).$$

Notons alors que $\ast$ $\{|D_n| \leq d_n \sigma\} \cap \left\{ \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} \geq \sigma \right\} \subset \left\{ |D_n| \leq d_n \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} \right\}$;

$\ast$ $\{|D_n| \leq d_n \sigma\} \cap \left\{ \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} < \sigma \right\} \subset \left\{ \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} < \sigma \right\}$.

Par croissance de P il vient $p \leq P\left(|D_n| \leq d_n \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} \right) + P\left(\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} < \sigma \right)$.

donc $p \leq P\left(|D_n| \leq d_n \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} \right) + 1 - p$; $\underline{\underline{2p - 1 \leq P\left(|D_n| \leq d_n \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{c_n}} \right)}}$.

$$P\left(|D_n| \leq \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n} \right) = P\left(|Y_{n+1} - A_n x_{n+1} - B_n| \leq \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n} \right)$$

$$P\left(|D_n| \leq \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n} \right) = P\left(A_n x_{n+1} + B_n - \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n} \leq Y_{n+1} \leq A_n x_{n+1} + B_n + \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n} \right)$$

donc $\underline{\underline{P\left(Y_{n+1} \in \left[A_n x_{n+1} + B_n - \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n} , A_n x_{n+1} + B_n + \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n} \right] \right) \geq 2p - 1}}$.

Rappelons que $S_n = \sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - x_i A_n - B_n)^2$ car $\hat{U} = Y - \Pi \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$.

de plus $A_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \bar{x}}{n s_x^2} Y_i$ et $B_n = \bar{Y}_n - A_n \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i - \bar{x} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \bar{x}}{n s_x^2} Y_i$

R.

Donc les variables aléatoires $A_n x_{n+1} + B_n - \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n}$ et $A_n x_{n+1} + B_n + \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n}$

ne dépendent que des $(Y_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, des $(x_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ de c_n et d_n.

Alors l'intervalle $\left[A_n x_{n+1} + B_n - \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n}, A_n x_{n+1} + B_n + \frac{d_n}{\sqrt{c_n}} \sqrt{S_n}\right]$ est solution du problème posé.

Non il ne s'agit pas d'un intervalle de confiance usuel, car ici Y_{n+1} n'est pas une constante mais une variable aléatoire.

<u>Remarque</u>.. Arrivez ici on avait plutôt envie de lui répondre au concepteur(*) qu'il s'agissait plutôt d'un intervalle de con-fiance ... la fatigue sans doute.

(*) en son/sens notici ... encore que ...