## Exercice principal S12

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite de densité $f$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, et de fonction de répartition $\Phi$.

2. Montrer que $X$ admet des moments de tous ordres et établir pour tout entier naturel $n$, la formule :

$$E(X^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{(2p)!}{2^p p!} & \text{si } n = 2p \text{ est pair } (p \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

3.a) Montrer que pour tout $a > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x f(x)\Phi(ax)dx$ est convergente. On note alors pour tout $a > 0$ : $F(a) = \int_0^{+\infty} x f(x)\Phi(ax)dx$.

b) Exprimer pour tout $a > 0$, $F(a)$ en fonction de $a$.

4. Soit $a$ un réel strictement positif fixé. On définit la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2f(x)\Phi(ax)$.

a) Vérifier que $g$ peut être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire $Y$.

b) Calculer $E(Y^2)$ et exprimer la variance $V(Y)$ en fonction de $a$.

## Exercice sans préparation S12

Soit $E(\langle\,,\rangle)$ un espace euclidien et soit $f$ un endomorphisme symétrique de $E$. On suppose l'existence d'une constante réelle $\alpha \geqslant 0$ telle que $\forall x \in E, \| f(x) \| = \alpha \| x \|$.
Montrer que $f^2 = \alpha^2 \, \mathrm{id}_E$.

Q1 Soit $X$ une variable aléatoire à densité de densité $f$. Soit $F_X$ sa fonction de répartition

1°) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

2°) $F_X$ est une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$

3°) $\lim_{x \mapsto +\infty} F_X(x) = 1$ et $\lim_{x \mapsto -\infty} F_X(x) = 0$.

4°) $F_X$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points

5°) 2°, 3° et 4° caractérisent les fonctions de répartition des variables aléatoires à densité.

6°) si $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini $D$ de points : $F_X$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R} \setminus D$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus D$, $F_X'(x) = f(x)$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}$. $\lim_{x \mapsto +\infty} (x^2 x^n f(x)) = \lim_{x \mapsto +\infty} \left[ \frac{2^{\frac{n}{2}+1}}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}}{e^{x^2/2}} \right] = 0$ par croissance comparée

Alors 1°) $x^n f(x) = \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ 2°) $\forall x \in [1,+\infty[$, $x^n f(x) \geq 0$ et $\frac{1}{x^2} \geq 0$ 3°) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge.

les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} t^n f(t)\,dt$, et même $\int_0^{+\infty} t^n f(t)\,dt$, convergent.

$t \mapsto t^n f(t)$ a la parité de $n$ alors $\int_{-\infty}^{0} t^n f(t)\,dt$ converge également.

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\,dt$ converge. Notons que cette intégrale est même absolument convergente car $t \mapsto t^n f(t)$ garde un signe constant sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0,+\infty[$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X$ possède un moment d'ordre $n$.

On peut aussi dire que $E(X^n)$ existe pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

- $t \mapsto t^{2p+1} f(t)$ est impaire sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+1} f(t)\,dt = 0$. $\underline{E(X^{2p+1}) = 0}$.

- $t \mapsto t^{2p} f(t)$ est paire sur $\mathbb{R}$.

Alors $E(X^{2p}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} f(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} t^{2p} f(t)\,dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2/2}\,dt$.

Ainsi $\forall p \in \mathbb{N}$, $\underline{E(X^{2p}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} I_p}$ avec $I_p = \int_0^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2/2}\,dt$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t^{2p+1}$ et $v(t) = -e^{-t^2/2}$.

$u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et, $\forall t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = (2p+1)t^{2p}$ et $v'(t) = te^{-t^2/2}$.

ceci justifie l'intégration par parties qui suit. Soit $A \in \mathbb{R}^+$.

$$\int_0^A t^{2p+2} e^{-t^2/2}\,dt = \int_0^A t^{2p+1}(te^{-t^2/2})\,dt = \left[t^{2p+1}(-e^{-t^2/2})\right]_0^A - \int_0^A (2p+1)t^{2p}(-e^{-t^2/2})\,dt.$$

$$\int_0^A t^{2p+2} e^{-t^2/2}\,dt = -\frac{A^{2p+1}}{e^{A^2/2}} + (2p+1)\int_0^A t^{2p} e^{-t^2/2}\,dt \quad (*).$$

$\lim_{A \to +\infty} \frac{A^{2p+1}}{e^{A^2/2}} = \lim_{A \to +\infty} \left( 2^{\frac{2p+1}{2}} \frac{(A^2/2)^{\frac{2p+1}{2}}}{e^{A^2/2}} \right) = 0$ par croissance comparée. En faisant

tendre $A$ vers $+\infty$ dans $(*)$ il vient $\underline{\underline{I_{p+1} = (2p+1) I_p}}$.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $(2p+2) I_{p+1} = (2p+2)(2p+1) I_p = \frac{(2p+2)!}{(2p)!} I_p$.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $\frac{(2p+2)!}{(2p)!} I_p = 2(p+1) I_{p+1} = 2\frac{(p+1)!}{p!} I_{p+1} = \frac{2^{p+1}(p+1)!}{2^p\, p!} I_{p+1}$.

Donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\frac{2^{p+1}(p+1)!}{(2p+2)!} I_{p+1} = \frac{2^p p!}{(2p)!} I_p$. Alors $\left(\frac{2^p p!}{(2p)!} I_p\right)$ est constante.

Ainsi $\forall p \in \mathbb{N}$, $\frac{2^p p!}{(2p)!} I_p = \frac{2^0\, 0!}{(2\times 0)!} I_0 = I_0$. $\underline{\underline{\forall p \in \mathbb{N},\ I_p = \frac{(2p)!}{2^p p!} I_0}}$.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $E(X^{2p}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} I_p = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{(2p)!}{2^p p!} I_0 = \frac{(2p)!}{2^p p!} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} I_0 = \frac{(2p)!}{2^p p!} \underset{\substack{\uparrow \\ E(X^0)=1.}}{E(X^0)} = \frac{(2p)!}{2^p p!}$.

R.



$\forall p \in \mathbb{N}$, $E(X^{2p}) = \dfrac{(2p)!}{2^p\, p!}$ et $E(X^{2p+1}) = 0$.

**Q3** a) Soit $a \in ]0,+\infty[$. $x \mapsto x f(x)\phi(ax)$ est continue sur $\mathbb{R}$ ($x \mapsto x$, $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto \phi(ax)$ sont continues sur $\mathbb{R}$).

$\forall x \in [0,+\infty[$, $0 \leq x f(x)$ et $0 \leq \phi(ax) \leq 1$.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $0 \leq x f(x)\phi(ax) \leq x f(x)$. De plus $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge car $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge puisque $X$ possède une espérance. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\int_0^{+\infty} x f(x)\phi(ax)\,dx$ est converge.

b) Soit $a \in ]0,+\infty[$. $\varphi : x \mapsto \phi(ax)$ et $x \mapsto -f(x)$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ ($\phi$ et $f$ sont $C^1$ sur $\mathbb{R}$).

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = a\,\phi'(ax) = a f(ax)$ et $\psi'(x) = -f'(x) = x \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = x f(x)$.

ce qui justifie l'intégration par parties qui suit. Soit $A \in \mathbb{R}^+$.

$$\int_0^A x f(x)\,\phi(ax)\,dx = \left[-f(x)\phi(ax)\right]_0^A - \int_0^A (-f(x))\, a f(ax)\,dx.$$

$$\int_0^A x f(x)\,\phi(ax)\,dx = f(0)\phi(0) - f(A)\phi(aA) + a\int_0^A f(x) f(ax)\,dx. \quad (*)$$

$$\lim_{A\to+\infty} \left(f(A)\phi(aA)\right) = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-A^2/2}\phi(aA)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times 0 \times 1 = 0.$$

$(*)$ montre alors que $\int_0^{+\infty} f(x) f(ax)\,dx$ converge (puisque $\int_0^{+\infty} x f(x)\phi(ax)\,dx$ converge) et que

$$\int_0^{+\infty} x f(x)\,\phi(ax)\,dx = \underbrace{f(0)}_{1/\sqrt{2\pi}}\ \underbrace{\phi(0)}_{1/2} + a\int_0^{+\infty} f(x) f(ax)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} + a\int_0^{+\infty} f(x) f(ax)\,dx.$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) f(ax) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{a^2x^2}{2}} = \dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} e^{-\frac{x^2}{2}(a^2+1)} = \dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ avec

$\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$.

$\sigma>0$ donc $x\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres $0$ et $\sigma^2$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 1$. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \sqrt{2\pi}\,\sigma$.

Par parité $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma$.

Donc $\int_0^{+\infty} f(x) f(ax) dx = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\sigma$.

Alors $\int_0^{+\infty} x f(x)\,\phi(ax)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(1 + a\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right]$.

$\underline{\underline{\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \int_0^{+\infty} x f(x)\,\phi(ax)\,dx \text{ converge et vaut } \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right]}}$ ... résultat qui vaut même pour $a=0$ !

(Q4) a) • $\underline{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$ car $f$ et $\phi$ sont continues sur $\mathbb{R}$...

• $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$ et $\phi(ax) \geq 0$. $\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geq 0}$.

• $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leq g(t) = 2f(t)\phi(at) \leq 2f(t)$. Comme $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ convergent, les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent la convergence de $\int_{-\infty}^{0} g(t)dt$ et de $\int_0^{+\infty} g(t)dt$. Ainsi $\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt \text{ converge}}$.

$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = 2f(t)\phi(at) = 2f(t)(1-\phi(-at)) = 2f(t) - 2f(t)\phi(-at)$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} 2f(t)dt$ converge et vaut $2$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(-at)dt$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 2 - 2\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(-at)dt$.

$t\mapsto -t$ définit une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $t\mapsto -t$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. Le cours autorise le changement de variable $u=-t$ dans ce qui suit.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(-at)dt = \int_{+\infty}^{-\infty} f(-u)\phi(au)(-du) \underset{f \text{ est paire}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\phi(au)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(at)dt.$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2 - 2\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(at)\,dt = 2 - \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$. $2\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = 2$. $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = 1$.

Ceci achève de montrer que $g$ est une densité de probabilité.

b) Pour gagner du temps prenons $n$ dans $\mathbb{N}$ et montrons que $Y$ possède un moment d'ordre $n$. Il s'agit de montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n g(t)\,dt$ est convergente ou absolument convergente...

$t \mapsto t^n g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. $\phi(at) \leq 1$ et $2t^n f(t) \geq 0$ pour $t \in [0,+\infty[$.

- $\forall t \in [0,+\infty[$, $0 \leq |t^n g(t)| = t^n g(t) = t^n\, 2 f(t)\phi(at) \leq 2t^n f(t)$.

De plus $\int_0^{+\infty} 2t^n f(t)\,dt$ converge car $X$ possède un moment d'ordre $n$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\int_0^{+\infty} |t^n g(t)|\,dt$ converge.

$\phi(at) \leq 1$ et $2|t^n| \geq 0$ pour $t \in ]-\infty,0]$

- $\forall t \in ]-\infty,0]$, $0 \leq |t^n g(t)| = |t^n|\, 2 f(t)\phi(at) \leq 2|t|^n f(t) = 2(-1)^n t^n f(t)$.

De plus $\int_{-\infty}^{0} 2(-1)^n t^n f(t)\,dt$ converge car $X$ possède un moment d'ordre $n$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\int_{-\infty}^{0} |t^n g(t)|\,dt$ converge.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^n g(t)|\,dt$ converge. $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n g(t)\,dt$ est absolument convergente... et convergente.

Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $Y$ possède un moment d'ordre $n$.

Ainsi $E(Y)$, $E(Y^2)$ et $V(Y)$ existent.

Soit $n \in \mathbb{N}$ (... pour gagner du temps).

$E(Y^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t^n g(t)\,dt + \int_{-\infty}^{0} t^n g(t)\,dt$. $t \mapsto -t$ définit une bijection strictement décroissante de $]-\infty,0[$ sur $]0,+\infty[$, de classe $C^1$. Cela autorise le changement de variable $u=-t$ dans ce qui suit.

$$E(Y^n) = \int_0^{+\infty} t^n g(t)\,dt + \int_{+\infty}^{0} (-u)^n g(-u)(-du) = \int_0^{+\infty} t^n g(t)\,dt + (-1)^n \int_0^{+\infty} u^n g(-u)\,du.$$

$$\int_0^{+\infty} u^n g(-u)\,du = \int_0^{+\infty} t^n g(-t)\,dt = \int_0^{+\infty} 2t^n f(-t)\varphi(-at)\,dt \underset{\uparrow}{=} 2\int_0^{+\infty} t^n f(t)(1-\varphi(at))\,dt.$$

f et paire

$\int_0^{+\infty} u^n g(-u)\,du = 2\int_0^{+\infty} t^n f(t)\,dt - \int_0^{+\infty} t^n\, 2f(t)\varphi(at)\,dt$ car toutes les intégrales convergent.

$\int_0^{+\infty} u^n g(-u)\,du = 2\int_0^{+\infty} t^n f(t)\,dt - \int_0^{+\infty} t^n g(t)\,dt$. Alors :

$$E(Y^n) = \int_0^{+\infty} t^n g(t)\,dt + (-1)^n\left[2\int_0^{+\infty} t^n f(t)\,dt - \int_0^{+\infty} t^n g(t)\,dt\right]$$

$$\underline{E(Y^n) = (1-(-1)^n)\int_0^{+\infty} 2t^n f(t)\varphi(at)\,dt + 2(-1)^n\int_0^{+\infty} t^n f(t)\,dt.}$$

Alors $E(Y^2) = 2\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,dt \underset{\uparrow}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = 1 + 0^2 = 1.$

f et paire

$\underline{\underline{E(Y^2) = 1.}}$

$$E(Y) = 2\int_0^{+\infty} 2t f(t)\varphi(at)\,dt - 2\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt = 4F(a) + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}(-t)e^{-t^2/2}\,dt$$

$\forall A \in \mathbb{R}^+$, $\int_0^A (-t)e^{-t^2/2}\,dt = \left[e^{-t^2/2}\right]_0^A = e^{-A^2/2} - 1$. $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A (-t)e^{-t^2/2}\,dt = -1$. $\int_0^{+\infty}(-t)e^{-t^2/2}\,dt = -1$.

Alors $E(Y) = 4F(a) - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = 4\left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right)\right) - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}\sqrt{a^2+1}}.$

$$\underline{\underline{E(Y) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}\sqrt{a^2+1}}.}}$$

$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 1 - \frac{4a^2}{2\pi(a^2+1)} = 1 - \frac{2a^2}{\pi(a^2+1)}.$

$\underline{\underline{V(Y) = 1 - \frac{2a^2}{\pi(a^2+1)}}}$ ... résultat qui vaut encore pour $a = 0$.

R..



**Question 3** **HEC 2012-3-S12** $\boxed{\textbf{F 1}}$ **C. GRASSET**

$f$ est un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien $(E, < .,. >)$.

On suppose l'existence d'une constante réelle $\alpha$ positive ou nulle telle que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \alpha\, \|x\|$.

Montrer que $f^2 = \alpha^2\ \mathrm{Id}_E$.

*Question de cours* *Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.*

---

Soit $(x,y) \in E^2$. $\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right]$.

$\langle f(x),f(y)\rangle = \frac{1}{2}\left[\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right] = \frac{1}{2}\left[\|f(x+y)\|^2 - \alpha^2\|x\|^2 - \alpha^2\|y\|^2\right]$.

$\langle f(x),f(y)\rangle = \frac{1}{2}\left[\alpha^2\|x+y\|^2 - \alpha^2\|x\|^2 - \alpha^2\|y\|^2\right] = \alpha^2\,\frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] = \alpha^2\langle x,y\rangle$.

$\underline{\forall (x,y)\in E^2,\ \langle f(x),f(y)\rangle = \alpha^2\langle x,y\rangle}$. Posons $g = f^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_E$

$\forall (x,y)\in E^2,\ \langle g(x),y\rangle = \langle f^2(x),y\rangle - \alpha^2\langle x,y\rangle = \langle f(x),f(y)\rangle - \alpha^2\langle x,y\rangle = 0$.

$\uparrow$ $f$ est symétrique.

$\forall x\in E, \forall y \in E,\ \langle g(x),y\rangle = 0$. $\forall x \in E,\ g(x)\in E^\perp = \{0_E\}$. $\forall x\in E,\ g(x) = 0_E$. $g = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi $f^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\underline{f^2 = \alpha^2\,\mathrm{Id}_E}$.

<u>Remarque</u>.. <u>Rapidement</u> une autre approche.

- $f$ est symétrique donc $f^2$ est symétrique. Ainsi $g = f^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_E$ est symétrique.
- $\forall x \in E,\ \langle g(x),x\rangle = \langle f^2(x),x\rangle - \alpha^2\langle x,x\rangle = \langle f(x),f(x)\rangle - \alpha^2\|x\|^2 = \|f(x)\|^2 - \alpha^2\|x\|^2 = 0$.

$\forall x\in E,\ \langle g(x),x\rangle = 0$. Ceci montre que $g$ est antisymétrique (classique !).

Alors $g$ est symétrique et antisymétrique donc $g$ est l'endomorphisme nul.

On retrouve ainsi $f^2 = \alpha^2\,\mathrm{Id}_E$.