Exercice principal S16

1. Question de cours : Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, dans le cas où les deux variables sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et dans le cas où elles possèdent une densité.

2. Soit Y et Z deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent respectivement la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (d'espérance $1/\lambda$) et la loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$ (d'espérance $1/\mu$).

a) Donner une densité de $-Y$.

b) On pose $D = Z - Y$. Donner une densité de D.

c) Calculer $P(Y \leqslant Z)$.

Pour n entier supérieur ou égal à 2, soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, strictement positives et telles que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, X_k suit la loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$.

3. On pose : $U = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Identifier la loi de U.

b) Soit j un entier donné de $[\![1, n]\!]$. En utilisant la variable aléatoire $Z_j = \inf\limits_{i \in [\![1,n]\!], i \neq j} X_i$, calculer $P(U = X_j)$.

c) La variable aléatoire $X_j - U$ est-elle à densité ? discrète ?

4. On pose : $V = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$: $X'_j = -\dfrac{1}{\theta} \ln(1 - \mathrm{e}^{-\theta X_j})$.

a) Montrer que les variables aléatoires $X'_1, X'_2, \ldots, X'_n$ sont indépendantes et suivent chacune la même loi que les variables aléatoires X_j.

b) En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $P(V = X_i) = \dfrac{1}{n}$.

Exercice sans préparation S16

Soit $n \in \mathbb{N}$ et P_n le polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ défini par $P_n(X) = X^n + 1$.
Pour quelles valeurs de n, P_n est-il divisible par $X^2 + 1$?

Q1 • X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1° $X+Y$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

2° $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X+Y=n) = \sum_{i=0}^{n} P(X=i)P(Y=n-i) = \sum_{j=0}^{n} P(X=n-j)P(Y=j)$.

• X et Y sont deux variables aléatoires à densité indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

f_X (resp. f_Y) est une densité de X (resp. Y).

R1 Si $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,dt$ (ou $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t)\,dt$) est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points : $X+Y$ est une variable aléatoire à densité de densité h.

R2 Si f_X (resp. f_Y) est bornée : $X+Y$ est une variable aléatoire à densité et $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,dt$ (ou $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t)\,dt$) en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

Q2 Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ f_Y(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $f_Z(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t} & \text{si } t \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f_Y est une densité de Y et f_Z est une densité de Z ($Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$).

a) $-Y$ est une variable aléatoire à densité et $f_{-Y} : t \mapsto f_Y(-t)$ en est une densité.

$\forall t \in \mathbb{R},\ f_{-Y}(t) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda t} & \text{si } t \in]-\infty, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

b) • Z et $-Y$ sont indépendantes car Z et Y sont indépendantes.

• Z et $-Y$ sont deux variables aléatoires à densité, de densités respectives f_Z et f_{-Y}.

• $\forall t \in]-\infty, 0[,\ f_Z(t) = 0$ et $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leq f_Z(t) = \mu e^{-\mu t} \leq \mu$ donc f_Z est bornée sur $\mathbb{R}$.

Alors 1° $D = Z - Y$ est une variable aléatoire à densité.

2° $f_D : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t) f_{-Y}(x-t)\,dt$ en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. $f_D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t)\, f_{-Y}(x-t)\,dt = \int_0^{+\infty}\mu e^{-\mu t} f_{-Y}(x-t)\,dt \underset{\uparrow}{=} \int_{\max(x,0)}^{+\infty}\mu e^{-\mu t}\lambda e^{\lambda(x-t)}\,dt$

$f_{-Y}(x-t)=\begin{cases}0 & \text{si } x-t>0\\ \lambda e^{\lambda(x-t)} & \text{si } x-t\le 0\end{cases}$

Posons pour simplifier les écritures $z=\max(x,0)$.

$f_D(x)=\lambda\mu e^{\lambda x}\int_z^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t}\,dt$.

$f_D(x)=\lambda\mu e^{\lambda x}\,\frac{1}{\lambda+\mu}\int_z^{+\infty}(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}\,dt$.

Or $\int_z^{+\infty}(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}\,dt=\lim_{A\to+\infty}\int_z^{A}(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}\,dt=\lim_{A\to+\infty}\left[-e^{-(\lambda+\mu)t}\right]_z^A=\lim_{A\to+\infty}\left(e^{-(\lambda+\mu)z}-e^{-(\lambda+\mu)A}\right)=e^{-(\lambda+\mu)z}$

donc $f_D(x)=\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{\lambda x}e^{-(\lambda+\mu)z}$. Or $e^{\lambda x}e^{-(\lambda+\mu)z}\underset{\substack{\uparrow\\ z=\max(x,0)}}{=}\begin{cases}e^{\lambda x}\times 1 & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\\ e^{\lambda x}e^{-(\lambda+\mu)x} & \text{si } x\in[0,+\infty[\end{cases}$

Alors $f_D(x)=\begin{cases}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{\lambda x} & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\\ \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{-\mu x} & \text{si } x\in[0,+\infty[\end{cases}$

c) $P(Y\le Z)=P(Z-Y\ge 0)=\int_0^{+\infty} f_D(x)\,dx=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\int_0^{+\infty}\mu e^{-\mu x}\,dx=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\int_0^{+\infty} f_Z(x)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(x)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\times 1$

$P(Y\le Z)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Q3 a) Notons F la fonction de répartition de $X_1, X_2, \dots, X_n$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\theta x} & \text{si } x\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Soit F_U la fonction de répartition de U. $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_U(x)=P(U\le x)=1-P(U>x)=1-P(\inf(X_1,X_2,\dots,X_n)>x)$.

$F_U(x)=1-P(\{X_1>x\}\cap\{X_2>x\}\cap\dots\cap\{X_n>x\})\underset{\uparrow}{=}1-P(X_1>x)P(X_2>x)\cdots P(X_n>x)=1-(1-F(x))^n$.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ mutu. indépendantes.

Si $x\in\,]-\infty,0[$, $F_U(x)=1-(1-0)^n=1-1=0$. Si $x\in[0,+\infty[$, $F_U(x)=1-\left(1-\left(1-e^{-\theta x}\right)\right)^n=1-e^{-n\theta x}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $F_U(x)=\begin{cases}1-e^{-n\theta x} & \text{si } x\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. Plus de doute $(n\theta>0)$:

U suit la loi exponentielle de paramètre $n\theta$.

b) Soit $j \in [\![1,n]\!]$. les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent la loi exponentielle de paramètre θ.

Alors a) permet de dire que Z_j suit la loi exponentielle de paramètre $(n-1)\theta$.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes donc $Z_j = \underset{i \in [\![1,n]\!]-\{j\}}{\mathrm{Inf}} X_i$ et X_j sont indépendantes

de plus X_j suit la loi exponentielle de paramètre θ.

Alors Q2 permet de dire que $P(Z_j \geqslant X_j) = \dfrac{\theta}{\theta+(n-1)\theta} = \dfrac{1}{n}$.

$P(U = X_j) = P(\underset{i \in [\![1,n]\!]}{\mathrm{Inf}} X_i = X_j) = P(\{X_j \leqslant X_1\} \cap \{X_j \leqslant X_2\} \cap \dots \cap \{X_j \leqslant X_n\})$

$\{X_j \leqslant X_j\} = \Omega$!

$P(U = X_j) = P(\{X_j \leqslant X_1\} \cap \dots \cap \{X_j \leqslant X_{j-1}\} \cap \{X_j \leqslant X_{j+1}\} \cap \dots \cap \{X_j \leqslant X_n\})$

$P(U = X_j) = P(X_j \leqslant \underset{i \in [\![1,n]\!]-\{j\}}{\mathrm{Inf}} X_i) = P(X_j \leqslant Z_j) = P(Z_j \geqslant X_j) = \dfrac{1}{n}$.

$\underline{P(U = X_j) = \dfrac{1}{n}.}$

c) $P(X_j - U = 0) = P(U = X_j) = \dfrac{1}{n} \neq 0$. Ainsi <u>$X_j - U$ n'est pas une variable aléatoire à densité.</u>

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $P(X_j - U = x) = 0$ car $\forall \omega \in \Omega$, $(X_j - U)(\omega) \geqslant 0$

Soit $x \in]0, +\infty[$.

$\forall \omega \in \Omega,\ X_j(\omega) - X_j(\omega) = 0 \neq x$

$P(X_j - U = x) = P(X_j - \mathrm{Inf}(X_1, X_2, \dots, X_n) = x) = P(X_j - \mathrm{Inf}(X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n) = x)$

$P(X_j - U = x) = P(X_j - Z_j = x) = P(Z_j - X_j = -x) = 0$ car $Z_j - X_j$ est une variable aléatoire à densité.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $P(X_j - U = x) = 0$ et $P(X_j - U = 0) = \dfrac{1}{n} < 1$ car $n \geqslant 2$.

Ainsi <u>$X_j - U$ n'est pas une variable aléatoire discrète.</u>

R.

Q4 a] Notons que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $P(X_j>0)=1$.

Donc $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $P(1-e^{-\theta X_j}>0)=1$. Cela justifie l'introduction de $X'_1, X'_2, \dots, X'_n$ non ?

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes alors $-\frac{1}{\theta}\ln(1-e^{-\theta X_1}), -\frac{1}{\theta}\ln(1-e^{-\theta X_2}), \dots, -\frac{1}{\theta}\ln(1-e^{-\theta X_n})$ sont indépendantes.

Ainsi $X'_1, X'_2, \dots, X'_n$ sont indépendantes.

Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$P(X'_j \leq x) = P(-\frac{1}{\theta}\ln(1-e^{-\theta X_j}) \leq x) = P(\ln(1-e^{-\theta X_j}) \geq -\theta x) = P(1-e^{-\theta X_j} \geq e^{-\theta x})$.

$P(X'_j \leq x) = P(e^{-\theta X_j} \leq 1-e^{-\theta x})$

1er cas : $x \leq 0$. Alors $1-e^{-\theta x} \leq 0$. Donc $P(X'_j \leq x)=0$.

2ème cas : $x>0$. Alors $1-e^{-\theta x}>0$.

$P(X'_j \leq x) = P(-\theta X_j \leq \ln(1-e^{-\theta x})) = P(X_j \geq -\frac{1}{\theta}\ln(1-e^{-\theta x}))$.

$P(X'_j \leq x) = 1 - P(X_j < -\frac{1}{\theta}\ln(1-e^{-\theta x})) = 1 - P(X_j \leq -\frac{1}{\theta}\ln(1-e^{-\theta x}))$

X_j est une variable aléatoire à densité.

$P(X'_j \leq x) = 1-(1-e^{-\theta(-\frac{1}{\theta}\ln(1-e^{-\theta x}))}) = 1-1+e^{\ln(1-e^{-\theta x})} = 1-e^{-\theta x}$.

$X_j \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $-\frac{1}{\theta}\ln(1-e^{-\theta x}) \in \mathbb{R}_+$ et même $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X'_j \leq x) = \begin{cases} 1-e^{-\theta x} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ou $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X'_j \leq x) = \begin{cases} 1-e^{-\theta x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Ainsi X'_j suit la loi exponentielle de paramètre θ.

Alors $X'_1, X'_2, \dots, X'_n$ suivent la loi exponentielle de paramètre θ donc ont même loi que X_j et ceci pour tout j dans $[\![1,n]\!]$.

b) $j \in [\![1,n]\!]$. D'après a) : $\frac{1}{n} = P(U = X_j) = P(\text{Inf}(X_1, X_2, \dots, X_n) = X_j) = P(\text{Inf}(X'_1, X'_2, \dots, X'_n) = X'_j)$

Soit $\omega \in \Omega$. $\omega \in \{\text{Inf}(X'_1, X'_2, \dots, X'_n) = X'_j\}$

$\Updownarrow$ $\forall k \in [\![1,n]\!], \quad X'_j(\omega) \leq X'_k(\omega)$

$\Updownarrow$ $\forall k \in [\![1,n]\!], \ -\frac{1}{\theta} \ln(1 - e^{-\theta X_j(\omega)}) \leq -\frac{1}{\theta} \ln(1 - e^{-\theta X_k(\omega)})$

$\Updownarrow$ $\forall k \in [\![1,n]\!], \ \ln(1 - e^{-\theta X_j(\omega)}) \geq \ln(1 - e^{-\theta X_k(\omega)})$

$\Updownarrow$ $\forall k \in [\![1,n]\!], \ 1 - e^{-\theta X_j(\omega)} \geq 1 - e^{-\theta X_k(\omega)}$

$\Updownarrow$ $\forall k \in [\![1,n]\!], \ e^{-\theta X_k(\omega)} \geq e^{-\theta X_j(\omega)}$

$\Updownarrow$ $\forall k \in [\![1,n]\!], \ -\theta X_k(\omega) \geq -\theta X_j(\omega)$

$\Updownarrow$ $\forall k \in [\![1,n]\!], \quad X_k(\omega) \leq X_j(\omega)$

$\Updownarrow$ $\omega \in \{\text{Sup}(X_1, X_2, \dots, X_n) = X_j\}$

$\Updownarrow$ $\omega \in \{V = X_j\}$

Ainsi $\{\text{Inf}(X'_1, X'_2, \dots, X'_n) = X'_j\} = \{V = X_j\}$.

Alors $\frac{1}{n} = P(\text{Inf}(X'_1, X'_2, \dots, X'_n) = X'_j) = P(V = X_j)$.

Donc $\underline{\underline{P(V = X_j) = \frac{1}{n} \text{ et ceci pour tout } j \in [\![1,n]\!]}}$.

__Remarque__.. Il aurait été plus vite en remarquant que $x \mapsto -\frac{1}{\theta} \ln(1 - e^{-x\theta})$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ ...

R..

Question 4 **HEC 2012-4-S16** $\boxed{\text{F } 1^-}$ **P. KONIECZNY**

$n \in [\![2, +\infty[\![$. On considère le polynôme P_n de $\mathbb{C}_n[X]$ défini par $P_n = X^n + 1$.

Pour quelles valeurs de n, P_n est-il divisible par $X^2 + 1$?

Question de cours. *Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, dans le cas où les deux variables sont à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *et dans le cas où elles possèdent une densité.*

$X^2+1=(X-i)(X+i)$. Donc X^2+1 divise P_n si et seulement si i et $-i$ sont racines de P_n.

Or $\forall z \in \mathbb{C}$, $P_n(\bar z) = \bar z^n + 1 = \overline{z^n} + 1 = \overline{z^n+1} = \overline{P_n(z)}$. Donc si z est racine de P_n alors $\bar z$ est racine de P_n. Ainsi X^2+1 divise P_n si et seulement si i est racine de P_n autrement dit si et seulement si $i^n = -1$.

Soit r le reste dans la division par 4 de n. $r \in \{0,1,2,3\}$ et $\exists q \in \mathbb{N}$, $n = 4q+r$.

$i^n = i^{4q+r} = (i^4)^q\, i^r = 1^q\, i^r = i^r = \begin{cases} 1 \text{ si } r=0 \\ i \text{ si } r=1 \\ -1 \text{ si } r=2 \\ -i \text{ si } r=3 \end{cases}$. Donc $i^n = -1 \iff r = 2$.

<u>X^2+1 divise P_n si et seulement si le reste dans la division de n par 4 est 2.</u>

<u>X^2+1 divise $P_n \iff n \equiv 2\ [4]$.</u>