HEC 2012 S 8

## Exercice principal S8

1. Question de cours : Définition et propriétés des fonctions indicatrices des parties d'un ensemble.

Pour toute partie $A \subseteq \mathbb{N}$, on note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de $A$ et $\overline{A}$ le complémentaire de $A$ dans $\mathbb{N}$.

2.a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série de terme général $\dfrac{\mathbf{1}_A(k)x^k}{k!}$ est convergente.

On pose alors : $S_x(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_A(k)x^k}{k!}$.

b) On suppose que $A \subseteq B$. Comparer $S_x(A)$ et $S_x(B)$.

c) On suppose que $A \cap B = \emptyset$. Exprimer $S_x(A \cup B)$ en fonction de $S_x(A)$ et $S_x(B)$.

d) Calculer $S_x(\emptyset)$, $S_x(\mathbb{N})$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_x(\{p\})$.

3. On suppose désormais que $x \in ]0, \ln 2[$.

a) Établir pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'inégalité stricte : $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} < \frac{x^m}{m!}$.

b) Soit $A$ et $B$ deux parties de $\mathbb{N}$ telles que $A \cap B = \emptyset$.
Montrer que si $A$ n'est pas vide et si le plus petit élément $m$ de $A \cup B$ appartient à $A$, alors :

$$S_x(B) < \frac{x^m}{m!} \leqslant S_x(A)$$

En déduire que si $S_x(A) = S_x(B)$, alors : $A = B = \emptyset$.

c) Montrer que l'application $A \mapsto S_x(A)$ est injective.

## Exercice sans préparation S8

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi uniforme sur $]0,1]$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $X_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} U_i^{1/n}$ et $Y_n = (\mathrm{e}X_n)^{\sqrt{n}}$.

Montrer que la suite de variables aléatoires $\big(\ln(Y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

**Q1** • Soit A une partie de $\mathbb{N}$. $\mathbb{1}_A$ est l'application de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{N},\ \mathbb{1}_A(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in A\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

• A et B sont deux parties de $\mathbb{N}$.

→ $\mathbb{1}_{\bar A}=1-\mathbb{1}_A$

→ $\mathbb{1}_{A\cap B}=\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$

→ $\mathbb{1}_{A\cup B}=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$

→ $A=B \iff \mathbb{1}_A=\mathbb{1}_B$.

**Q2** a) Soit $x\in]0,+\infty[$. Soit A une partie de $\mathbb{N}$.

$\forall k\in\mathbb{N},\ 0\leq \mathbb{1}_A(k)\leq 1$. $\forall k\in\mathbb{N},\ 0\leq \dfrac{\mathbb{1}_A(k)x^k}{k!}\leq\dfrac{x^k}{k!}$ et la série de terme général $\dfrac{x^k}{k!}$ converge. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent la convergence de la série de terme général $\dfrac{\mathbb{1}_A(k)\,x^k}{k!}$ converge.

b) A et B sont deux parties de $\mathbb{N}$. On suppose que $A\subset B$. Soit $x\in]0,+\infty[$.

Soit $k\in\mathbb{N}$. Si $k\in A$ alors $k\in B$ et $\mathbb{1}_A(k)=1\leq 1=\mathbb{1}_B(k)$. Si $k\in\bar A$, $\mathbb{1}_A(k)=0\leq\mathbb{1}_B(k)$.

$\forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{1}_A(k)\leq\mathbb{1}_B(k)$ et $\dfrac{x^k}{k!}\geq 0$. $\forall k\in\mathbb{N},\ \dfrac{\mathbb{1}_A(k)x^k}{k!}\leq\dfrac{\mathbb{1}_B(k)x^k}{k!}$.

Alors $S_x(A)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathbb{1}_A(k)x^k}{k!}\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathbb{1}_B(k)x^k}{k!}=S_x(B)$.

Si A et B sont deux parties de $\mathbb{N}$ telles que $A\subset B$ : $\forall x\in]0,+\infty[,\ S_x(A)\leq S_x(B)$.

c) Soient A et B deux parties disjointes de $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{1}_{A\cup B}=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_{A\cap B}=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\underbrace{\mathbb{1}_\emptyset}_{=0}=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B.$$

Alors $\forall k\in\mathbb{N},\ \dfrac{\mathbb{1}_{A\cup B}(k)x^k}{k!}=\dfrac{\mathbb{1}_A(k)x^k}{k!}+\dfrac{\mathbb{1}_B(k)x^k}{k!}$.

Donc $S_x(A\cup B)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathbb{1}_{A\cup B}(k)x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathbb{1}_A(k)x^k}{k!}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathbb{1}_B(k)x^k}{k!}=S_x(A)+S_x(B)$.

$S_x(A\cup B)=S_x(A)+S_x(B)$ lorsque A et B sont deux parties disjointes de $\mathbb{N}$.

d) $\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathbb{1}_{\phi}(k)=0$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(k)=1$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ S_x(\phi)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{0\times x^k}{k!}=0$ et $S_x(\mathbb{N})=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1\times x^k}{k!}=e^x.$

$\forall x\in ]0,+\infty[,\ S_x(\phi)=0$ et $S_x(\mathbb{N})=e^x.$

Soit $p\in\mathbb{N}$. $\forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{1}_{\{p\}}(k)=\begin{cases}1 \text{ si } k=p\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ S_x(\{p\})=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathbb{1}_{\{p\}}(k)\,x^k}{k!}=\frac{x^p}{p!}$

$\forall x\in ]0,+\infty[,\ S_x(\{p\})=\frac{x^p}{p!}$ et ceci pour tout $p\in\mathbb{N}$.

(Q3) Dans toute cette question $x\in ]0,\ln 2[$.

a) Soit $n\in\mathbb{N}$. $\varphi : x\mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall k\in\mathbb{N},\ \varphi^{(k)}=\varphi$. $\forall k\in\mathbb{N},\ \varphi^{(k)}(0)=\varphi(0)=1$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre $n$ à $\varphi$ donne :

$$\left|\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\varphi^{(k)}(0)\right|\leqslant\frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}\max_{t\in[0,x]}\left|\varphi^{(n+1)}(t)\right|=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\max_{t\in[0,x]}e^t=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x.$$

$$\left|e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|\leqslant\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x.$$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\right|=\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|=\left|e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|\leqslant\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x=\frac{x^n}{n!}\,\frac{x}{n+1}e^x.$$

1er cas.. $n\geqslant 1$. Alors $\frac{x}{n+1}e^x\leqslant\frac{x}{2}e^x<x<\ln 2<1$.

$0<x<\ln 2$ donc $x>0$ et $e^x<2$

Ainsi $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}<\frac{x^n}{n!}$.

$x<\ln 2$ donc $e^x<2$

2ième cas.. $n=0$ $\quad\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}-1=e^x-1<2-1=1=\frac{x^0}{0!}=\frac{x^n}{n!}.$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} < \frac{x^n}{n!}$.

b) Soit A et B sont deux parties disjointes de $\mathbb{N}$.

- Supposons que $A \neq \emptyset$ et que $n = \min(A \cup B) \in A$.

$\forall k \in A \cup B$, $n \leq k$. Donc $\forall k \in B$, $n \leq k$. Or $n \in A$ & $A \cap B = \emptyset$ donc $n \notin B$.

Ainsi $\forall k \in B$, $n+1 \leq k$. donc $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $k \notin B$. $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{1}_B(k) = 0$.

$$S_x(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_B(k) x^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_B(k) x^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} < \frac{x^n}{n!}.$$

$n \in A$ donc $\{n\} \subset A$. Alors $S_x(\{n\}) \leq S_x(A)$. Ainsi $\dfrac{x^n}{n!} \leq S_x(A)$.

Finalement $S_x(B) < \dfrac{x^n}{n!} \leq S_x(A)$. Retenons que $S_x(B) \neq S_x(A)$ !

- Ici on a toujours $A \cap B = \emptyset$ et on suppose que $S_x(A) = S_x(B)$.

Montrons par l'absurde que $A \cup B = \emptyset$. Supposons que $A \cup B \neq \emptyset$.

$A \cup B$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Posons $n = \min(A \cup B)$.

1er cas.. $n \in A$. Alors $A \neq \emptyset$ et $n = \min(A \cup B) \in A$.

Ce qui précède donne $S_x(B) \neq S_x(A)$. Ce qui n'est pas.

2e cas.. $n \in B$. Alors $B \neq \emptyset$ et $n = \min(A \cup B) \in B$.

Ce qui précède donne $S_x(A) \neq S_x(B)$. Ce qui n'est pas.

Ainsi $A \cup B = \emptyset$. Alors $A = B = \emptyset$.

Si A et B sont deux parties disjointes de $\mathbb{N}$ telles que $S_x(A) = S_x(B)$ : $A = B = \emptyset$.

c) Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$ telles que $S_x(A) = S_x(B)$. Montrons que $A = B$.

Posons $A' = A \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{A \cap B}$ et $B' = B \setminus (A \cap B) = B \cap (\overline{A \cap B})$.

Observons que : 1°) $A' \cap B' = \emptyset$ ;

2°) $A = A' \cup (A \cap B)$ et $A' \cap (A \cap B) = \emptyset$ ;

3°) $B = B' \cup (A \cap B)$ et $B' \cap (A \cap B) = \emptyset$.

Alors $S_x(A) = S_x(A') + S_x(A \cap B)$ et $S_x(B) = S_x(B') + S_x(A \cap B)$ (d'après Q 2 c)).

Comme $S_x(A) = S_x(B)$ : $S_x(A') = S_x(B')$.

Or $A' \cap B' = \emptyset$ donc b) montre que $A' = B' = \emptyset$.

Alors $A = A \cap B$ et $B = A \cap B$ donc $A = B$. Ainsi $S_x(A) = S_x(B)$ donne $A = B$.

<u>L'application "$A \mapsto S_x(A)$" de l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, qui à toute partie A de $\mathbb{N}$ associe $S_x(A)$, est injective.</u>

**Question 1** **HEC 2012-1-S7** $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et de même loi uniforme sur $]0,1]$.

On pose pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$ : $X_n=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}U_i^{\frac{1}{n}}$ et $Y_n=(e\,X_n)^{\sqrt{n}}$.

Montrer que la suite de variables aléatoires $\big(\ln Y_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

*Question de cours.* *Définition et proppriétés des fonctions indicatrices des parties d'un ensemble.*

---

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\ln Y_n=\ln\left((eX_n)^{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{n}\left[\ln e+\ln X_n\right]=\sqrt{n}\left[1+\ln\prod_{i=1}^{n}U_i^{1/n}\right]$

$\ln Y_n=\sqrt{n}\left[1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln U_i\right]=\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sum_{i=1}^{n}\ln U_i+n\right]=\frac{S_n+n}{\sqrt{n}}$ où $S_n=\sum_{i=1}^{n}\ln U_i$.

Posons $T=\ln U_1$. Utilisons le théorème de transfert pour montrer l'existence de $E(T)$ et $V(T)$ et les calculer.

Posons $\forall t\in\,]0,1]$, $f(t)=1$ et $\forall t\in\mathbb{R}-]0,1]$, $f(t)=0$.

- $f$ est une densité de $U_1$ ;
- $U_1$ prend ses valeurs dans $]0,1]$ ;
- $\ln$ est continue sur $]0,1]$ ;

Alors $E(\ln U_1)$ existe si et seulement si $\int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt$ est absolument convergente.

$t\mapsto \ln t\, f(t)$ est continue sur $]0,1]$.

$\forall\varepsilon\in\,]0,1]$, $\int_\varepsilon^1 \ln t\, f(t)\,dt=\int_\varepsilon^1 \ln t\,dt=\left[t\ln t-t\right]_\varepsilon^1=-1-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon$.

$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \ln t\, f(t)\,dt=-1$. Donc $\int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt$ converge et vaut $-1$

Alors $\int_0^1 -\ln t\, f(t)\,dt$ converge également donc $\int_0^1 |\ln t\, f(t)|\,dt$ converge.

$\int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt$ converge absolument donc $E(\ln U_1)$ existe.

$E(T)$ existe et $E(T)=E(\ln U_1)=\int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt=-1$.

$T^2=(\ln U_1)^2=\ln^2 U_1$.

- $f$ est une densité de $U_1$
- $U_1$ prend ses valeurs dans $]0,1[$
- $\ln^2$ est continue sur $]0,1[$.

Alors $E(\ln^2 U_1)$ existe si et seulement si $\int_0^1 \ln^2 t\, f(t)\,dt$ est absolument convergente.

$\forall t \in ]0,1[,\quad \ln^2 t\, f(t) = \ln^2 t \geq 0$.

Donc $E(\ln^2 U_1)$ existe si et seulement si $\int_0^1 \ln^2 t\,dt$ converge.

Soit $\varepsilon \in ]0,1[$. $\int_\varepsilon^1 \ln^2 t\,dt = [t \ln^2 t]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 t \times 2 \times \frac{1}{t} \times \ln t\,dt = -\varepsilon \ln^2 \varepsilon - 2\int_\varepsilon^1 \ln t\,dt$.

$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln^2 t\,dt = 0 - 2\int_0^1 \ln t\,dt = 2$. $\int_0^1 \ln^2 t\,dt$ existe et vaut $2$.

Alors $E((\ln U_1)^2)$ existe et $E((\ln U_1)^2) = \int_0^1 \ln^2 t\, f(t)\,dt = \int_0^1 \ln^2 t\,dt = 2$.

$E(T^2)$ existe et vaut $2$ donc $V(T)$ existe et vaut $2 - 1^2$ c'est à dire $1$.

Appliquons alors le théorème de la limite centrée.

1° $(\ln U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes car $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes

2° Toutes les variables aléatoires de la suite $(\ln U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont même loi.

3° Les variables aléatoires de cette suite ont pour espérance $-1$ et pour variance $1$ ($1>0$ !).

Alors la suite de terme général $\dfrac{\sum_{i=1}^n \ln U_i - E(\sum_{i=1}^n \ln U_i)}{\sqrt{V(\sum_{i=1}^n \ln U_i)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\sum_{i=1}^n \ln U_i = S_n$. $E(\sum_{i=1}^n \ln U_i) = \sum_{i=1}^n E(\ln U_i) = \sum_{i=1}^n (-1) = -n$.

$V(\sum_{i=1}^n \ln U_i) = \sum_{i=1}^n V(\ln U_i) = \sum_{i=1}^n 1 = n$.

par indépendance

Alors $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \ln U_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} \ln U_i\right)}{\sqrt{V\left(\sum_{i=1}^{n} \ln U_i\right)}} = \dfrac{S_n - (-n)}{\sqrt{n}} = \dfrac{S_n + n}{\sqrt{n}} = \ln Y_n.$

Ainsi la suite $(\ln Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

<u>Remarque</u>.. Pour calculer l'espérance et la variance de $\ln U_1$ on aurait pu remarquer que $-\ln U_1$ suit la loi exponentielle de paramètre $1$.

Ainsi $E(-\ln U_1) = \frac{1}{1}$ et $V(-\ln U_1) = \frac{1}{1^2}$.

Alors $E(\ln U_1) = -1$ et $V(\ln U_1) = 1$.

Notons qu'alors $-S_n$ suit la loi gamma de paramètre $n$ ou la loi gamma de paramètres $1$ et $n$...