HEC 2012 S9

Exercice principal S9

1. Question de cours : Sommes de Riemann.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n ; on effectue dans cette urne des tirages aléatoires successifs d'une boule avec remise. On note $X_1, X_2, \ldots$, les numéros successifs obtenus et on suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On note Y le rang du premier tirage pour lequel le numéro de la boule tirée est supérieur ou égal à X_1, sous réserve qu'un tel numéro existe.

2. Pour tout entier $k \geqslant 2$, on pose : $B_k = [X_k < X_1]$.

a) En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P[B_2 \cap B_3 \cap \ldots \cap B_k]$.

b) Montrer que $P\left(\bigcap_{k=2}^{+\infty} B_k\right) = 0$.

c) Que peut-on dire de l'ensemble des éléments ω de Ω pour lesquels $Y(\omega)$ existe ? On admet désormais que cet ensemble est confondu avec Ω.

3.a) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$, on a : $P[Y = m+1] = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{m-1}$.

b) Montrer que Y admet une espérance $E(Y)$ donnée par : $E(Y) = 1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$.

4. On ne considère plus l'entier n fixé et on note désormais $Y^{(n)}$ la variable aléatoire notée précédemment Y.

a) Calculer pour tout entier $m \geqslant 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P[Y^{(n)} = m+1]$.

b) En déduire que la suite $(Y^{(n)})_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire discrète qui n'a pas d'espérance.

$n \geqslant 2$!

Exercice sans préparation S9

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $U = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que $a_1 \neq 0$ et $a_n \neq 0$.

On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$.

1. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Justifier que A est diagonalisable. Calculer les valeurs propres de A.

2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que A n'est pas nécessairement diagonalisable.

HEC 2012 S9 Correction de l'exercice.

Q1 f est une fonction numérique continue sur le segment $[a,b]$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\times\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\times\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Si $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ on a encore $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=p}^{n-q} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,dt$

<u>Remarque</u>.. La dernière somme écrite est définie pour n assez grand.

Q2 <u>a)</u> soit $k\in[\![2,+\infty[\![$. Posons pour simplifier les écritures $S_k = B_2\cap B_3\cap\dots\cap B_k$. $(\{X_1=i\})_{1\le i\le n}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales permet d'écrire :

$$P(S_k)=\sum_{i=1}^{n} P(\{X_1=i\}\cap S_k)=\sum_{i=1}^{n} P(\{X_1=i\}\cap\{X_2<X_1\}\cap\dots\cap\{X_k<X_1\}).$$

$$P(S_k)=\sum_{i=1}^{n} P(\{X_1=i\}\cap\{X_2<i\}\cap\dots\cap\{X_k<i\}) = \sum_{i=1}^{n} P(X_1=i)P(X_2<i)\cdots P(X_k<i)$$

$X_1, X_2,\dots, X_k$ sont indépendantes car les tirages se font avec remise.

Or pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, X_j suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

Donc $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $P(X_1=i)=\frac{1}{n}$ et $\forall j\in[\![2,k]\!]$, $P(X_j<i)=\frac{i-1}{n}$.

Donc $P(S_k)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}$. $\quad \underline{P(B_2\cap B_3\cap\dots\cap B_k)=\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}}$

<u>b)</u> le corollaire du théorème de la limite monotone indique que $P\left(\bigcap_{\ell=2}^{+\infty}B_\ell\right)=\lim_{k\to+\infty}P\left(\bigcap_{\ell=2}^{k}B_\ell\right)$.

Alors $P\left(\bigcap_{\ell=2}^{+\infty}B_\ell\right)=\displaystyle\lim_{k\to+\infty}P(B_2\cap B_3\cap\dots\cap B_k)=\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}\right)$.

Or pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\left|\frac{i-1}{n}\right|<1$ donc pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}=0$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}\right)=0$. Donc $P\left(\bigcap_{\ell=1}^{+\infty}B_\ell\right)=0$.

Ou $\underline{P\left(\bigcap_{\ell=2}^{+\infty}B_\ell\right)=0}$.

<u>c)</u> Posons $S=\{\omega\in\Omega \mid Y(\omega)\text{ existe}\}$. $\overline{S}=\{\omega\in\Omega\mid \forall k\in[\![2,+\infty[\![,\ X_k(\omega)<X_1(\omega)\}$.

$\bar{S} = \{\omega \in \Omega \mid \forall k \in [\![2, +\infty[\![, \omega \in B_k\} = \bigcap_{k=2}^{+\infty} B_k$.

Alors $\bar{S}$ est un événement de probabilité nulle.

Donc S est un événement de probabilité égale à 1. S est un événement presque sûr.

$\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega)$ existe$\}$ est un événement presque sûr.

(Q3) a) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. $n+1 \geq 3$. La formule des probabilités totales donne, avec le système complet d'événements $(\{X_1 = j\})_{j \in [\![1,n]\!]}$: $P(Y = n+1) = \sum_{j=1}^{n} P(\{X_1 = j\} \cap \{Y = n+1\})$.

$P(Y = n+1) = \sum_{j=1}^{n} P(\{X_1 = j\} \cap \{X_2 < j\} \cap \ldots \cap \{X_n < j\} \cap \{X_{n+1} \geq j\})$. Par indépendance il vient :

$P(Y = n+1) = \sum_{j=1}^{n} P(X_1 = j) P(X_2 < j) \cdots P(X_n < j) P(X_{n+1} \geq j)$.

$$P(Y = n+1) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \times \left(\frac{j-1}{n}\right)^{n-1} \left(\frac{n-(j-1)}{n}\right) \underset{i=j-1}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^{n-1} \left(\frac{n-i}{n}\right).$$

$P(Y = n+1) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{n-1}$ pour tout $n \in [\![3, +\infty[\![$.

$P(Y = 1+1) = P(Y = 2) = \sum_{j=1}^{n} P(\{X_1 = j\} \cap \{Y = 2\}) = \sum_{j=1}^{n} P(\{X_1 = j\} \cap \{X_2 \geq j\})$

$$P(Y = 1+1) = P(Y = 2) \underset{\text{Indépendance de } X_1 \text{ et } X_2}{=} \sum_{j=1}^{n} P(X_1 = j) P(X_2 \geq j) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{n-(j-1)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n-i}{n}.$$

$P(Y = 2) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)$

Si l'on accepte de dire que $0^0 = 1$ on peut dire que :

$\forall n \in [\![1, +\infty[\![$, $P(Y = n+1) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{n-1}$.

Remarque.. $P(Y = 2) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n-i}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$. $P(Y = 2) = \frac{n+1}{2n}$.

b] $E(Y)$ existe si la série de terme général $(n+1)P(Y=n+1)$ est absolument convergente.
Or $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(n+1)P(Y=n+1)\geqslant 0$. Ainsi $E(Y)$ existe si la série de terme général $(n+1)P(Y=n+1)$ ou $nP(Y=n+1)+P(Y=n+1)$ converge.
Or la série de terme général $P(Y=n+1)$ converge. Ainsi $E(Y)$ existe dès que la série de terme général $nP(Y=n+1)$ converge.

Or $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $nP(Y=n+1)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)n\left(\frac{i}{n}\right)^{n-1}$.

Soit $i\in[\![0,n-1]\!]$, $\left|\frac{i}{n}\right|<1$ donc la série géométrique dérivée $n\left(\frac{i}{n}\right)^{n-1}$ est convergente.
Alors la série de terme général $nP(Y=n+1)$ est convergente comme combinaison linéaire de n séries convergentes.

Ceci achève de montrer que $E(Y)$ existe.

Notons que $\sum_{n=1}^{+\infty}nP(Y=n+1)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\left(1-\frac{i}{n}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{i}{n}\right)^{n-1}\right]$ (la somme d'une combinaison linéaire de séries convergentes est la combinaison linéaire des sommes).

donc $\sum_{n=1}^{+\infty}nP(Y=n+1)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{i}{n}\right)^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\frac{n-i}{n}}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n-i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$.

Avec la convention proposée dans Q2c] $Y(\Omega)=[\![2,+\infty[\![$.
Alors $E(Y)=\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)P(Y=n+1)=\sum_{n=1}^{+\infty}nP(Y=n+1)+\sum_{n=1}^{+\infty}P(Y=n+1)$ (les deux séries convergent).

$E(Y)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}+1$. $\underline{\underline{E(Y)=1+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}}}$.

Q4 a] Soit $m\in[\![1,+\infty[\![$. $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $P(Y^{(n)}=m+1)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{m-1}$.

Posons $\forall t\in[0,1]$, $f_m(t)=(1-t)t^{m-1}$.
f_m est continue sur $[0,1]$. Q1 donne alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{1-0}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f_m\left(0+i\frac{1-0}{n}\right)=\int_0^1 f_m(t)\,dt$.

donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f_m\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f_m(t)\,dt=\int_0^1(1-t)t^{m-1}dt=\left[\frac{t^m}{m}-\frac{t^{m+1}}{m+1}\right]_0^1=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}$.

Alors $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{m-1}\right)=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}}}$.

Ainsi $\forall n \in [\![1,+\infty[\![$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Y^{(n)} = n+1) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.

b) Notons que $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Y^{(n)}=k) = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

Posons $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $g(k) = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

1) $[\![2,+\infty[\![$ est dénombrable.

2) $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $g(k) = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{(k-1)k} \in [0,1]$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} g(k) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$. Ainsi la série de terme général $g(k)$ converge et $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} g(k) = 1$.

Par conséquent g est la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.

$(Y^{(n)})_{n\geq 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire discrète Z dont la loi de probabilité est g.

$k g(k) = \frac{1}{k-1}$ pour tout k dans $[\![2,+\infty[\![$. Alors la série de terme général $k g(k)$ diverge. Ainsi Z n'a pas d'espérance.

R..

Question 2 **HEC 2012-2-S9** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Soit $U = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On suppose $a_1 \neq 0$ et $a_n \neq 0$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$.

Q1. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Justifier que A est diagonalisable. Calculer les valeurs propres de A

Q2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que A n'est pas nécessairement diagonalisable.

Question de cours. *Sommes de Riemann.*

Q1 Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A est symétrique donc <u>A est diagonalisable</u>.

Ce qui peut le plus peut le moins. Pour donner plus d'épaisseur à Q2 nous allons chercher les valeurs propres de A dans le cas général c'est à dire avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notons $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Pour tout j dans $[\![1, n]\!]$ notons $C_j(A)$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(C_1(A), C_2(A), \ldots C_n(A)) = \dim \operatorname{Vect}\left(a_1 E_n, a_2 E_n, \ldots, a_{n-1} E_{n-1}, \sum_{k=1}^{n} a_k E_k\right)$.

Comme $a_1 \neq 0$: $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}\left(E_n, a_2 E_n, \ldots, a_{n-1} E_n, \sum_{k=1}^{n} a_k E_k\right) = \dim \operatorname{Vect}\left(E_n, \sum_{k=1}^{n} a_k E_k\right)$.

Finalement $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(E_n, V)$ avec $V = \sum_{k=1}^{\boxed{n-1}} a_k E_k$. Notons que (E_n, V) est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\alpha E_n + \beta V = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

$\alpha E_n + \sum_{k=1}^{n-1} \beta a_k E_k = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$. La liberté de $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ donne : $\alpha = \beta a_1 = \beta a_2 = \cdots = \beta a_{n-1} = 0$.

Comme $a_1 \neq 0$: $\alpha = \beta = 0$. Ceci achève de montrer que (E_n, V) est libre.

Alors $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(E_n, V) = 2 < n$. A n'est pas inversible donc <u>0 est valeur propre de A</u>.

De plus <u>$\dim SEP(A, 0) = n - \operatorname{rg} A = n - 2$.</u>

<u>0 est valeur propre de A et $\dim SEP(A,0) = n-2$.</u> Cherchons les valeurs propres non nulles de A. Soit $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} a_1 x_n = \lambda x_1 \\ a_2 x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} x_n = \lambda x_{n-1} \\ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ x_k = \dfrac{a_k}{\lambda} x_n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i \times \frac{a_i}{\lambda} x_n + a_n x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ x_k = \dfrac{a_k}{\lambda} x_n \\ \text{et} \\ \left(\lambda^2 - a_n \lambda - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2\right) x_n = 0 \end{cases}$$

1er cas.. $\lambda^2 - a_n\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \neq 0$.

Alors $AX=\lambda X \iff \begin{cases} \forall k\in[\![1,n-1]\!],\ x_k = \frac{a_k}{\lambda}x_n \\ \text{et} \\ x_n=0 \end{cases} \iff x_1=x_2=\cdots=x_n=0 \iff X=0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

donc λ n'est pas valeur propre de A.

2ième cas.. $\lambda^2 - a_n\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 0$.

$AX=\lambda X \iff \forall k\in[\![1,n-1]\!],\ x_k=\frac{a_k}{\lambda}x_n$.

$X_0=\begin{pmatrix} a_1/\lambda \\ a_2/\lambda \\ \vdots \\ a_{n-1}/\lambda \\ 1\end{pmatrix}$ est un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX_0=\lambda X_0$. De plus $AX=\lambda X \iff X=x_nX_0$.

Ainsi λ est valeur propre de A et $SEP(A,\lambda)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} a_1/\lambda \\ a_2/\lambda \\ \vdots \\ a_{n-1}/\lambda \\ 1\end{pmatrix}\right)$.

Ainsi

> 1°) les sous-espaces propres associés à des valeurs propres non nulles de A, s'il en existe, sont des droites vectorielles
>
> 2°) Si $\lambda\in\mathbb{K}^*$, $\lambda\in \mathrm{Sp}\,A \iff \lambda^2-a_n\lambda-\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2=0$ (1)

Supposons de nouveau que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. (1) $\iff \left(\lambda-\frac{a_n}{2}\right)^2=\frac{a_n^2}{4}+\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2$.

(1) $\iff \lambda=\frac{a_n}{2}+\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2}$ ou $\lambda=\frac{a_n}{2}-\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2}$.

$0^2-0\times\lambda-\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2=\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2>0$ car $a_1\neq0$ donc 0 n'est pas solution de (1)

Alors $\frac{a_n}{2}+\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2}$ et $\frac{a_n}{2}-\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2}$ sont deux réels non nuls.

De plus ces réels sont distincts car $\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2}>0$.

Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, A admet exactement trois valeurs propres distinctes qui sont :

0, $\frac{a_n}{2}+\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2}$ et $\frac{a_n}{2}-\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2}$. Ceci achève Q1.

Q2 Supposons $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

0 solution de (1) $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1}a_i^2=0$.

- Si $\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2=0$ la seule solution non nulle de (1) est a_n.

Alors $\mathrm{Sp}\,A=\{0,a_n\}$ et $\dim SEP(A,0)+\dim SEP(A,a_n)=n-2+1=n-1<n$.

Ainsi A n'est pas diagonalisable.

- Supposons $\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\neq 0$. 0 n'est pas solution de (1).

Le discriminant de (1) est $a_n^2+4\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2$.

1er cas : $a_n^2+4\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2=0$. (1) admet une solution et une seule : $\frac{a_n}{2}$

Alors $\mathrm{Sp}\,A=\{0,\frac{a_n}{2}\}$ et $\dim SEP(A,0)+\dim SEP(A,\frac{a_n}{2})=n-2+1=n-1<n$.

A n'est pas diagonalisable.

2e cas : $a_n^2+4\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\neq 0$ (1) admet deux solutions distinctes λ_1 et λ_2 et ces solutions ne sont pas nulles.

Alors $\mathrm{Sp}\,A=\{0,\lambda_1,\lambda_2\}$ et $\dim SEP(A,0)+\dim SEP(A,\lambda_1)+\dim SEP(A,\lambda_2)=n-2+1+1=n$.

A est diagonalisable.

Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$: A est diagonalisable si et seulement si $\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\neq 0$ et $a_n^2+4\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\neq 0$

Par exemple

pour $a_1=i$, $a_2=a_3=\dots=a_{n-1}=0$ et $a_n=2$: A n'est pas diagonalisable.

Ainsi si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, A n'est pas nécessairement diagonalisable.