HEC 2012 S 20

Exercice principal S20

1. Question de cours : Théorème de la limite centrée.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires centrées réduites définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, de même densité de probabilité, et admettant des moments jusqu'à l'ordre 4.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note m_4 le moment d'ordre 4 de X_n.

a) Montrer que $m_4 > 1$.

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Y_n^* = \dfrac{1}{\sqrt{n(m_4-1)}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k^2 - 1)$.

Justifier la convergence en loi de la suite $(Y_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $U_n = \sqrt{\dfrac{n}{m_4 - 1}}\,\overline{X}_n^2$.

Calculer $E(U_n)$ et en déduire la convergence en probabilité vers 0 de la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Soit x et ε deux réels arbitraires avec $\varepsilon > 0$.

a) Établir l'encadrement : $P(Y_n^* \leqslant x) \leqslant P(Y_n^* - U_n \leqslant x) \leqslant P(Y_n^* \leqslant x + \varepsilon) + P(U_n \geqslant \varepsilon)$.

b) En déduire l'existence d'un entier N_ε tel que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, on a :

$$\Phi(x) - \varepsilon \leqslant P(Y_n^* - U_n \leqslant x) \leqslant \Phi(x+\varepsilon) + \varepsilon$$

c) Que peut-on en conclure pour la suite $(Y_n^* - U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((X_k - \overline{X}_n)^2 - 1\right)$.

Déduire des résultats précédents, la limite en loi de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice sans préparation S20

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$. Soit T l'application qui à toute fonction $f \in E$, associe la fonction $F = T(f)$ définie par : $F(0) = f(0)$ et $\forall x > 0, F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?
2. Déterminer les réels λ et les fonctions f vérifiant $T(f) = \lambda f$.

R.

HEC 2012 S20 Correction de l'exercice principal

Q1 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et de même loi. On suppose que les variables aléatoires de cette suite ont une espérance m et une variance σ^2 $(\sigma>0)$.

On pose $S_n = X_1+X_2+\dots+X_n$ et $S_n^* = \dfrac{S_n-E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \dfrac{S_n-nm}{\sqrt{n}\,\sigma}$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

La suite (S_n^*) converge en probabilité vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. Ainsi $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n^*\leq x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$.

Q2 a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $T_n = X_n^2$.

$E(X_n^2) = V(X_n)+(E(X_n))^2$

$E(X_n)$ existe et vaut 0. $V(X_n)$ existe et vaut 1. donc $E(X_n^2)$ existe et vaut 1.

$E(T_n)$ existe et vaut 1. X_n possède un moment d'ordre 4 donc T_n possède un moment d'ordre 2 et une variance. $V(T_n) = E(T_n^2)-(E(T_n))^2 = E(X_n^4)-(E(X_n^2))^2 = m_4-1$.

X_n est une variable aléatoire à densité donc T_n également. Alors $V(T_n)>0$.

Ainsi $m_4-1>0$. Ce qui donne $\underline{\underline{m_4>1}}$.

b) Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2 = \sum_{k=1}^{n} T_k$.

- $(X_k^2)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes car $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.
- Toutes les variables aléatoires de la suite $(X_n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont même loi car toutes les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont même loi.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $E(X_n^2)$ existe et vaut 1
- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $V(X_n^2)$ existe et vaut m_4-1
- $m_4-1>0$

Alors la suite de terme général $H_n^* = \dfrac{H_n-E(H_n)}{\sqrt{V(H_n)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

→

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(H_n) = n\,E(X_1^2)$ et $V(H_n) = n\,V(X_1^2)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(H_n) = n$ et $V(H_n) = n(m_4 - 1)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n^* = \dfrac{H_n - n}{\sqrt{n(m_4-1)}} = \dfrac{1}{\sqrt{n(m_4-1)}}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\right] = \dfrac{1}{\sqrt{n(m_4-1)}}\sum_{k=1}^{n}(X_k^2 - 1) = Y_n^*$.

<u>Remarque</u>.. $Y_n^* = \dfrac{Y_n - E(Y_n)}{\sqrt{V(Y_n)}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$!

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n^* = H_n^*$. Donc <u>$(Y_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite</u> ... ou <u>$(Y_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.</u>

(Q3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et possèdent une variance égale à 1.

Alors $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ possède une variance égale à n.

Alors $\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ possède une variance égale à $\frac{1}{n^2} \times n$ donc à $\frac{1}{n}$.

Ainsi $V(\overline{X}_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n}$. Alors $E(\overline{X}_n^2)$ existe et vaut $V(\overline{X}_n) + (E(\overline{X}_n))^2$.

$E(\overline{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)\right) = \frac{1}{n}E(X_1) + \frac{1}{n}E(X_2) + \dots + \frac{1}{n}E(X_n) \underset{\uparrow}{=} 0$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $E(X_k) = 0$

Alors $E(\overline{X}_n^2)$ existe et vaut $\frac{1}{n}$.

Donc $U_n = \sqrt{\dfrac{n}{m_4 - 1}}\,\overline{X}_n^2$ possède une espérance qui vaut $\sqrt{\dfrac{n}{m_4-1}} \times \dfrac{1}{n}$.

<u>$E(U_n)$ existe et vaut $\dfrac{1}{\sqrt{n(m_4-1)}}$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.</u>

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, U_n prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et possède une espérance. L'inégalité de Markov donne alors :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|U_n - 0| \geqslant \varepsilon) = P(U_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{E(U_n)}{\varepsilon}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant P(|U_n - 0| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}\,\dfrac{1}{\sqrt{n(m_4-1)}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\,\dfrac{1}{\sqrt{n(m_4-1)}}\right) = 0$

Par encadrement il vient alors $\lim_{n\to+\infty} P(|U_n - 0| \geqslant \varepsilon) = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $(U_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

Q4 a) • Soit $\omega \in \Omega$ tel que $Y_n^*(\omega) \leqslant x$. Comme $U_n(\omega) \geqslant 0$: $Y_n^*(\omega) - U_n(\omega) \leqslant Y_n^*(\omega) \leqslant x$.

$\forall \omega \in \Omega$, $Y_n^*(\omega) \leqslant x \Rightarrow (Y_n^* - U_n)(\omega) \leqslant x$. Ainsi $\{Y_n^* \leqslant x\} \subset \{Y_n^* - U_n \leqslant x\}$.

Par croissance de P : $P(Y_n^* \leqslant x) \leqslant P(Y_n^* - U_n \leqslant x)$.

• Soit $\omega \in \Omega$ tel que $(Y_n^* - U_n)(\omega) \leqslant x$.

1er cas.. $Y_n^*(\omega) \leqslant x + \varepsilon$ et c'est très bien.

2e cas.. $Y_n^*(\omega) > x + \varepsilon$.

Alors $x \geqslant (Y_n^* - U_n)(\omega) = Y_n^*(\omega) - U_n(\omega) > x + \varepsilon - U_n(\omega)$.

donc $U_n(\omega) > x + \varepsilon - x = \varepsilon$. Alors $U_n(\omega) \geqslant \varepsilon$!

Ainsi $\forall \omega \in \Omega$, $(Y_n^* - U_n)(\omega) \leqslant x \Rightarrow Y_n^*(\omega) \leqslant x + \varepsilon$ ou $U_n(\omega) \geqslant \varepsilon$ noa !

$\{Y_n^* - U_n \leqslant x\} \subset \{Y_n^* \leqslant x + \varepsilon\} \cup \{U_n \geqslant \varepsilon\}$. Par croissance de P :

$P(Y_n^* - U_n \leqslant x) \leqslant P(\{Y_n^* \leqslant x+\varepsilon\} \cup \{U_n \geqslant \varepsilon\}) = P(Y_n^* \leqslant x+\varepsilon) + P(U_n \geqslant \varepsilon) - \underbrace{P(\{Y_n^* \leqslant x+\varepsilon\} \cap \{U_n \geqslant \varepsilon\})}_{\geqslant 0}$

donc $P(Y_n^* - U_n \leqslant x) \leqslant P(Y_n^* \leqslant x+\varepsilon) + P(U_n \geqslant \varepsilon)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n^* \leqslant x) \leqslant P(Y_n^* - U_n \leqslant x) \leqslant P(Y_n^* \leqslant x + \varepsilon) + P(U_n \geqslant \varepsilon)$.

b) $(Y_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite donc $\lim_{n\to+\infty} P(Y_n^* \leqslant x) \overset{(1)}{=} \phi(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} P(Y_n^* \leqslant x+\varepsilon) = \phi(x+\varepsilon)$.

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

Alors $\lim_{n\to+\infty} P(U_n \geqslant \varepsilon) = \lim_{n\to+\infty} P(|U_n| \geqslant \varepsilon) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(P(Y_n^* \leqslant x+\varepsilon) + P(U_n \geqslant \varepsilon)\right) \overset{(2)}{=} \phi(x+\varepsilon)$.

(1) donne l'existence de N'_ε dans $\mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant N'_\varepsilon \Rightarrow |P(Y_n^* \leqslant x) - \phi(x)| < \varepsilon$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant N'_\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < P(Y_n^* \leqslant x) - \phi(x) < \varepsilon \Rightarrow \phi(x) - \varepsilon < P(Y_n^* \leqslant x)$:

(2) donne l'existence de N''_ε dans $\mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant N''_\varepsilon \Rightarrow |P(Y_n^* \leqslant x+\varepsilon) + P(U_n \geqslant \varepsilon) - \phi(x+\varepsilon)| < \varepsilon$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant N''_\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < P(Y_n^* \leqslant x+\varepsilon) + P(U_n \geqslant \varepsilon) - \phi(x+\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow P(Y_n^* \leqslant x+\varepsilon) + P(U_n \geqslant \varepsilon) < \phi(x+\varepsilon)+\varepsilon$

Soit $N_\varepsilon = \max(N'_\varepsilon, N''_\varepsilon)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant N_\varepsilon$. $n \geqslant N'_\varepsilon$ et $n \geqslant N''_\varepsilon$.

Alors 1°/ $P(Y_n^* \leqslant x) \leqslant P(Y_n^* - U_n \leqslant x) + P(Y_n^* \leqslant x+\varepsilon) + P(U_n \geqslant \varepsilon)$

2°/ $\phi(x) - \varepsilon < P(Y_n^* \leqslant x)$ donc $\phi(x) - \varepsilon \leqslant P(Y_n^* \leqslant x)$

3°/ $P(Y_n^* \leqslant x+\varepsilon) + P(U_n \geqslant \varepsilon) < \phi(x+\varepsilon)+\varepsilon$ donc $P(Y_n^* \leqslant x+\varepsilon) + P(U_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \phi(x+\varepsilon)+\varepsilon$

Ainsi $\phi(x) - \varepsilon \leqslant P(Y_n^* - U_n \leqslant x) \leqslant \phi(x+\varepsilon)+\varepsilon$.

$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow \phi(x) - \varepsilon \leqslant P(Y_n^* - U_n \leqslant x) \leqslant \phi(x+\varepsilon)+\varepsilon$.

c) Ici c'est plus délicat que le seul point d'interrogation le laisse supposer.
Oublions le "soit x et ε deux réels arbitraires avec $\varepsilon > 0$".
Montrons que $(Y_n^* - U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi ~~vers~~ une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. Soit à montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to +\infty} P(Y_n^* - U_n \leqslant x) = \phi(x)$

Fixons x dans $\mathbb{R}$. Montrons, en utilisant la définition que
$\lim_{n \to +\infty} P(Y_n^* - U_n \leqslant x) = \phi(x)$. Montrons donc que : $\forall \varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*, \exists P_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant P_{\varepsilon'} \Rightarrow |P(Y_n^* - U_n \leqslant x) - \phi(x)| < \varepsilon'$

Fixons ε' dans $\mathbb{R}_+^*$. ϕ est continue en x donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, |y-x| < \alpha \Rightarrow |\phi(y) - \phi(x)| < \frac{\varepsilon'}{2}$.

Posons $\varepsilon = \min\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\varepsilon'}{2}\right)$. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $|(x+\varepsilon) - x| = |\varepsilon| = \varepsilon < \alpha$ donc $|\phi(x+\varepsilon) - \phi(x)| < \frac{\varepsilon'}{2}$.

Alors $\phi(x+\varepsilon) - \phi(x) < \frac{\varepsilon'}{2}$ donc $\phi(x+\varepsilon) < \phi(x) + \frac{\varepsilon'}{2}$;

Ainsi $\phi(x+\varepsilon) + \varepsilon < \phi(x) + \frac{\varepsilon'}{2} + \varepsilon \leqslant \phi(x) + \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2}$ donc $\phi(x+\varepsilon)+\varepsilon < \phi(x) + \varepsilon'$.

de plus $\phi(x) - \varepsilon' < \phi(x) - \varepsilon$ car $\varepsilon < \varepsilon'$.

Appliquons alors le résultat b).

$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow \phi(x) - \varepsilon \leqslant P(Y_n^* - U_n \leqslant x) \leqslant \phi(x+\varepsilon)+\varepsilon$.

Notons que N_ε dépend de ε et que ε dépend de ε'. Posons alors $P_{\varepsilon'} = N_\varepsilon$ (!).

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant P_{\varepsilon'} \Rightarrow \phi(x) - \varepsilon' < \phi(x) - \varepsilon \leqslant P(Y_n^* - U_n \leqslant x) \leqslant \phi(x+\varepsilon)+\varepsilon < \phi(x) + \varepsilon'$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq p_{\varepsilon'} \Rightarrow \phi(x)-\varepsilon' < P(Y_n^*-U_n\leq x) < \phi(x)+\varepsilon' \Rightarrow |P(Y_n^*-U_n\leq x)-\phi(x)|<\varepsilon'.$

Finalement nous avons montré que :

$\forall \varepsilon'\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists p_{\varepsilon'}\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq p_{\varepsilon'} \Rightarrow |P(Y_n^*-U_n\leq x)-\phi(x)|<\varepsilon'.$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Y_n^*-U_n\leq x)=\phi(x)$ et ceci pour tout réel x.

Alors $\underline{\underline{(Y_n^*-U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}}}$ <u>converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.</u>

(Q5) soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\sum\limits_{\ell=1}^{n}\left((X_\ell-\overline{X}_n)^2-1\right)=\sum\limits_{\ell=1}^{n}\left(X_\ell^2-2X_\ell\overline{X}_n+\overline{X}_n^2-1\right)=\sum\limits_{\ell=1}^{n}(X_\ell^2-1)-2\overline{X}_n\sum\limits_{\ell=1}^{n}X_\ell+n\overline{X}_n^2$

$$\sum_{\ell=1}^{n}\left((X_\ell-\overline{X}_n)^2-1\right)=\sum_{\ell=1}^{n}(X_\ell^2-1)-2\overline{X}_n(n\overline{X}_n)+n\overline{X}_n^2=\sum_{\ell=1}^{n}(X_\ell^2-1)-n\overline{X}_n^2.$$

$$\sum_{\ell=1}^{n}\left((X_\ell-\overline{X}_n)^2-1\right)=\sqrt{n(m_4-1)}\,Y_n^*-\sqrt{n(m_4-1)}\,U_n=\sqrt{n}\sqrt{m_4-1}\,(Y_n^*-U_n).$$

donc $Z_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{\ell=1}^{n}\left((X_\ell-\overline{X}_n)^2-1\right)=\sqrt{m_4-1}\,(Y_n^*-U_n)$. soit $x\in\mathbb{R}$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(Z_n\leq x)=P(\sqrt{m_4-1}\,(Y_n^*-U_n)\leq x)\overset{\sqrt{m_4-1}>0}{=}P\left(Y_n^*-U_n\leq\frac{x}{\sqrt{m_4-1}}\right).$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}P(Z_n\leq x)=\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(Y_n^*-U_n\leq\frac{x}{\sqrt{m_4-1}}\right)=\phi\left(\frac{x}{\sqrt{m_4-1}}\right)$ et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}$.

Soit W une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et de variance m_4-1.

$$P(W\leq x)=P\left(\frac{W-0}{\sqrt{m_4-1}}\leq\frac{x-0}{\sqrt{m_4-1}}\right)=P\left(\frac{W-E(W)}{\sqrt{V(W)}}\leq\frac{x}{\sqrt{m_4-1}}\right)=\phi\left(\frac{x}{\sqrt{m_4-1}}\right) \text{ car } \frac{W-E(W)}{\sqrt{V(W)}}\hookrightarrow\mathcal{N}(0,1)$$

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty}P(Z_n\leq x)=P(W\leq x)$

Alors <u>$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et de variance m_4-1.</u>

R..

Question 5 **HEC 2012-5-S20** $\boxed{\text{F 2}}$

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Soit T l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $F = T(f)$ définie par :

$$F(0) = f(0) \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[,\ F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?

Q2. Déterminer les réels λ et les fonctions f vérifiant $T(f) = \lambda f$.

Question de cours. *Théorème de la limite centrée.*

(Q1) • Soit $f \in E$. Posons $F = T(f)$ et montrons que $F \in E$.

Posons $\forall x \in [0,+\infty[$, $P_f(x) = \int_0^x f(t)dt$. P_f est la primitive de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0 (f est continue sur $[0,+\infty[$).

P_f est donc de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. De plus $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

Alors par produit $F = T(f)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

Donc F est largement continue sur $]0,+\infty[$.

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right) = \lim_{x\to 0}\frac{P_f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{P_f(x)-P_f(0)}{x-0} = P_f'(0) = f(0)$. Ainsi F est continue en 0.

F est donc continue sur $[0,+\infty[$. $F \in E$.

$\forall f \in E$, $T(f) \in E$. T est une application de E dans E.

• Montrons que T est linéaire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(f,g) \in E^2$.

→ $T(\lambda f+g)(0) = (\lambda f+g)(0) = \lambda f(0)+g(0) = \lambda T(f)(0) + T(g)(0) = (\lambda T(f)+T(g))(0)$.

→ Soit $x \in]0,+\infty[$. $T(\lambda f+g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x(\lambda f+g)(u)du = \lambda\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt + \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt$.

$T(\lambda f+g)(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x) = (\lambda T(f)+T(g))(x)$.

Ainsi $\forall x \in [0,+\infty[$, $T(\lambda f+g)(x) = (\lambda T(f)+T(g))(x)$. $T(\lambda f+g) = \lambda T(f)+T(g)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f,g) \in E^2$, $T(\lambda f+g) = \lambda T(f)+T(g)$. T est linéaire.

Finalement T est un endomorphisme de E

• Soit $f \in \operatorname{Ker} T$. $T(f) = 0_E$. $\forall x \in]0,+\infty[$, $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = 0$. $\forall x \in]0,+\infty[$, $\int_0^x f(t)dt = 0$.

Mieux $\forall x \in [0,+\infty[$, $\int_0^x f(t)\,dt = 0$. En dérivant on obtient : $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x)=0$. $f = 0_E$.

Ainsi $\mathrm{Ker}\, T = \{0_E\}$. **T est injectif.**

Remarque.. Nous avons vu que si $f \in E$, $T(f)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

Les éléments de $\mathrm{Im}\, T$ sont donc de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Posons $\forall x \in [0,+\infty[$, $h(x) = |x-1|$.

h est continue sur $[0,+\infty[$ mais n'est pas dérivable en 1. Ainsi $h \in E$ mais $h \notin \mathrm{Im}\, T$.

Alors T n'est pas surjectif.

Exercice.. Montrer que $\mathrm{Im}\, T$ est l'ensemble des éléments g de E tels que :

1/ g est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$;

2/ $\lim_{x \mapsto 0^+} (x g'(x)) = 0$.

(Q2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $\mathcal{E}_\lambda = \{f \in E \mid T(f) = \lambda f\}$. Notons que $\mathcal{E}_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda\, \mathrm{Id}_E)$.

Si $\lambda = 0$: $\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_0 = \mathrm{Ker}\, T = \{0_E\}$. Donc nous supposerons dans ce qui suit $\lambda \neq 0$.

Analysons un peu ! Partons d'un élément f appartenant à $\mathcal{E}_\lambda$.

Notons de nouveau P_f la primitive de f sur $[0,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0.

$T(f)(0) = \lambda f(0)$ donc $f(0) = \lambda f(0)$, $(\lambda-1) f(0) = 0$. Notons que si $\lambda \neq 1$: $f(0) = 0$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $P_f'(x) = f(x) = \frac{1}{\lambda x}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{\lambda x} P_f(x)$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $P_f'(x) - \frac{1}{\lambda x} P_f(x) = 0$.

Notons que $x \mapsto \frac{1}{\lambda} \ln x$ est une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction continue sur $]0,+\infty[$, $x \mapsto \frac{1}{\lambda x}$.

Le cours permet de dire que : $\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]0,+\infty[$, $P_f(x) = C\, e^{\frac{1}{\lambda}\ln x}$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = P_f'(x) = \frac{1}{\lambda x} P_f(x) = C \frac{1}{\lambda x} e^{\frac{1}{\lambda}\ln x} = C \frac{1}{\lambda x} x^{1/\lambda} = \frac{C}{\lambda} x^{\frac{1}{\lambda}-1}$.

Donc $\exists d \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = d\, x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ et $f(0) = 0$ si $\lambda \neq 1$. Poursuivons l'analyse.

f est continue en 0 donc $f(0) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \left(\alpha x^{\frac{1}{\lambda}-1}\right)$. Notons que cette limite est finie !

Si $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0$ $\quad \lim\limits_{x \mapsto 0^+} (x^{\frac{1}{\lambda}-1}) = +\infty$ donc nécessairement $\alpha = 0$.

Si $\frac{1}{\lambda} - 1 = 0$ $\quad f(0) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} (\alpha x^0) = \alpha$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \alpha x^{\frac{1}{\lambda}-1} = \alpha x^0 = \alpha$.

donc $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \alpha$. Posons $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_1(x) = 1$. $\underline{f = \alpha f_1}$

Si $\frac{1}{\lambda} - 1 > 0$ $\quad$ Alors $f(0) = 0$ car $\lambda \neq 1$ et ainsi $f(0) = \alpha \times 0$.

de plus $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \alpha \times x^{\frac{1}{\lambda}-1}$

Posons $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. $\underline{f = \alpha f_\lambda}$.

Résumons cette analyse.

Si $\lambda = 0$: $\mathcal{S}_\lambda = \{0_E\}$. Si $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0$: $\mathcal{S}_\lambda \subset \{0_E\}$. Si $\frac{1}{\lambda} - 1 = 0$ donc si $\lambda = 1$:

$\mathcal{S}_1 \subset \mathrm{Vect}(f_1)$. Si $\frac{1}{\lambda} - 1 > 0$, $\mathcal{S}_\lambda \subset \mathrm{Vect}(f_\lambda)$.

Notons que $0_E \in \mathcal{S}_\lambda$, que $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-\lambda}{\lambda} < 0 \Leftrightarrow \lambda \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ et

$\frac{1-\lambda}{\lambda} > 0 \Leftrightarrow \lambda \in]0, 1[$.

Alors 1°/ $\forall \lambda \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$, $\mathcal{S}_\lambda = \{0_E\}$.

2°/ $\mathcal{S}_1 \subset \mathrm{Vect}(f_1)$ où $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_1(x) = 1$.

3°/ $\forall \lambda \in]0, 1[$, $\mathcal{S}_\lambda \subset \mathrm{Vect}(f_\lambda)$ où $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Reste à envisager deux réciproques.

Notons que $\mathcal{S}_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}_E)$ donc $\mathcal{S}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de E ceci pour tout λ dans $\mathbb{R}$.

f_1 est continue sur $[0, \infty[$. $f_1 \in E$. $\quad T(f_1)(0) = f_1(0)$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $T(f_1)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x 1\,dt = \frac{1}{x} \times x = 1 = f_1(x)$.

Alors $\forall x \in [0, +\infty[$, $T(f_1)(x) = 1 \times f_1(x)$. $T(f_1) = 1 \times f_1$. $f_1 \in \mathcal{S}_1$.

Donc $\mathrm{Vect}(f_1) \subset S_1$. Alors $S_1 = \mathrm{Vect}(f_1)$.

Soit $\lambda \in]0,1[$. $S_\lambda \subset \mathrm{Vect}(f_\lambda)$. Pour montrer que $\mathrm{Vect}(f_\lambda) \subset S_\lambda$ il suffit de montrer que $f_\lambda \in S_\lambda$ car S_λ est un sous-espace vectoriel de E.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$.

f_λ est continue sur $]0,+\infty[$. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} x^{\frac{1}{\lambda}-1} \underset{\frac{1}{\lambda}-1>0}{=} 0 = f_\lambda(0)$ donc f_λ est continue en 0.

Ainsi f_λ est continue sur $[0,+\infty[$. $f_\lambda \in E$.

$T(f_\lambda)(0) = f_\lambda(0) = 0 = \lambda f_\lambda(0)$. Soit $x \in]0,+\infty[$.

Soit $\varepsilon \in]0,+\infty[$. $\int_\varepsilon^x f_\lambda(t)\,dt = \int_\varepsilon^x t^{\frac{1}{\lambda}-1}\,dt = \left[\frac{t^{1/\lambda}}{1/\lambda}\right]_\varepsilon^x = \lambda\left[x^{1/\lambda} - \varepsilon^{1/\lambda}\right]$.

Alors $\int_0^x f_\lambda(t)\,dt = \lim\limits_{\varepsilon\mapsto 0^+}\left(\lambda\left[x^{1/\lambda} - \varepsilon^{1/\lambda}\right]\right) = \lambda x^{1/\lambda}$ car $\frac{1}{\lambda} > 0$.

Alors $T(f_\lambda)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_\lambda(t)\,dt = \frac{1}{x}\lambda x^{1/\lambda} = \lambda\, x^{\frac{1}{\lambda}-1} = \lambda f_\lambda(x)$.

Finalement $\forall x \in [0,+\infty[$, $T(f_\lambda)(x) = \lambda f_\lambda(x)$. $T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$; $f_\lambda \in S_\lambda$.

Alors $\mathrm{Vect}(f_\lambda) \subset S_\lambda$ et finalement $S_\lambda = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$.

Conclusion.
- $\forall \lambda \in]-\infty,0]\cup]1,+\infty[$, $S_\lambda = \{0_E\}$
- $S_1 = \mathrm{Vect}(f_1)$ où f_1 est l'élément de E défini par $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_1(x) = 1$
- $\forall \lambda \in]0,1[$, $S_\lambda = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$ où f_λ est l'élément de E défini par :
  $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

Ainsi
→ $\mathrm{Sp}\,T =]0,1]$
→ $\mathrm{SEP}(T,\lambda) = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$ pour tout $\lambda \in]0,1]$.

Remarque. – On aurait sans doute pu poser $\forall \lambda \in]0,1]$, $\forall x \in \underline{[}0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ ...