HEC 2012 S 23

Exercice principal S23

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est *convexe* si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0,1], \quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle et on note $\langle\,,\rangle$ son produit scalaire canonique.

1. Question de cours : Développement limité d'ordre 1 au point $a \in \mathbb{R}^n$ pour une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

2. Soit f_1 et f_2 deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ convexes et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Les fonctions suivantes sont-elles convexes : $f_1 + f_2$, αf_1 , $\min(f_1, f_2)$ et $\max(f_1, f_2)$?

b) Lorsque $n = 1$ a-t-on $f_1 \circ f_2$ convexe ?

3. Soit f une fonction convexe et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.
Pour tout $(x,h) \in (\mathbb{R}^n)^2$, soit $g_{x,h}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g_{x,h}(t) = f(x+th)$.

a) Montrer que $g_{x,h}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $g_{x,h}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'_{x,h}(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

c) En déduire que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\langle \nabla f(x), y - x\rangle \leqslant f(y) - f(x)$, où $\nabla f(x)$ est le gradient de f en x.

d) Soit a un point critique de f. Montrer que f admet un minimum global au point a.

4. Dans cette question, soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n et soit f la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{1}{2}\langle Ax, x\rangle$.

a) Vérifier que f est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \nabla f(x) = Ax$.

b) En déduire que si f est convexe, alors toutes les valeurs propres de A sont positives.

Exercice sans préparation S23

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, vérifiant les conditions suivantes :

- $P(X=0) = 0$;
- $P(X>0) = \alpha > 0$;
- $P_{[X>0]}(X \leqslant x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ avec $a > 0$;
- (*) $P_{[X<0]}(-X \leqslant x) = \begin{cases} 1 - e^{-bx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ avec $b > 0$.

1. Déterminer la fonction de répartition de X.
2. La variable aléatoire X est-elle à densité ?
3. Établir l'existence de $E(X)$. Calculer $E(X)$.

(*) Ici je propose plutôt $P_{[X<0]}(X<x)$, non ?

Je propose également de $]0,1[$.

Q1 f est une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. $a \in \mathbb{R}^n$

1) f admet un développement limité d'ordre 1 au point a.

2) ce développement limité est :

$$f(a+h) \underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + o(\|h\|).$$

__Remarque__.. Posons $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

$\forall h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n, \ \langle \nabla f(a), h \rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\, h_k$.

Q2 a) • Soit $\lambda \in [0,1]$ et soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

$(f_1+f_2)(\lambda x+(1-\lambda)y) = f_1(\lambda x+(1-\lambda)y) + f_2(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y) + \lambda f_2(x) + (1-\lambda) f_2(y)$.

$(f_1+f_2)(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda (f_1+f_2)(x) + (1-\lambda)(f_1+f_2)(y)$.

Ainsi __f_1+f_2 est convexe sur $\mathbb{R}$.__

• Supposons que $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

$\forall \lambda \in [0,1], \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, f_1(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y)$. Comme $\alpha \geq 0$:

$\forall \lambda \in [0,1], \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \alpha f_1(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda \alpha f_1(x) + (1-\lambda)\alpha f_1(y)$.

$\forall \lambda \in [0,1], \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, (\alpha f_1)(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda (\alpha f_1)(x) + (1-\lambda)(\alpha f_1)(y)$.

__Donc si $\alpha \in \mathbb{R}_+$: αf_1 est convexe.__

Il est clair que si $\alpha \in]-\infty, 0[$, αf_1 est concave donc est "rarement" convexe !

Prenons $\alpha = -1$. Posons $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \hat{f}_1(x) = x_1^2$.

Rappelons que $t \mapsto t^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (... sa dérivée seconde est positive).

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Soit $\lambda \in [0,1]$.

$$\hat{f}_1(\lambda x+(1-\lambda)y) = (\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1)^2 \underset{t \mapsto t^2 \text{ est convexe}}{\leq} \lambda x_1^2 + (1-\lambda) y_1^2 = \lambda \hat{f}_1(x) + (1-\lambda)\hat{f}_1(y).$$

Ainsi $\hat{f}_1$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

Considérons les éléments $x = (1,0,\dots,0)$ et $y = (2,0,\dots,0)$ de $\mathbb{R}^n$. Posons $\lambda = 1/2$

$\hat{f}_1(\lambda x+(1-\lambda)y) - \lambda \hat{f}_1(x) - (1-\lambda)\hat{f}_1(y) = \left(\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2\right)^2 - \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{2} \times 2^2 = \frac{9}{4} - \frac{5}{2} = -\frac{1}{4} < 0$.

Donc $\hat{f}_1(\lambda x+(1-\lambda)y) < \lambda \hat{f}_1(x) + (1-\lambda)\hat{f}_1(y)$. Alors $(-\hat{f}_1)(\lambda x+(1-\lambda)y) > \lambda(-\hat{f}_1)(x) + (1-\lambda)(-\hat{f}_1)(y)$.

$\exists \lambda \in [0,1]$, $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(-f_1)(\lambda x + (1-\lambda) y) > \lambda (-f_1)(x) + (1-\lambda)(-f_1)(y)$.

Ainsi $-\hat{f}_1$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^n$.

Nous avons donc trouvé un réel strictement négatif $\hat{\alpha}$ ($\hat{\alpha} = -1$) et une application convexe $\hat{f}_1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\hat{\alpha} \hat{f}_1$ ne soit pas convexe.

Ainsi si $\alpha < 0$, αf_1 n'est pas "nécessairement" convexe.

- Posons $\psi = \max(f_1, f_2)$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et soit $\lambda \in [0,1]$.

  $f_1(x) \leq \psi(x)$, $f_1(y) \leq \psi(y)$, $\lambda \in [0,1]$ et $1-\lambda \in [0,1]$.

  Alors $\lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y) \leq \lambda \psi(x) + (1-\lambda) \psi(y)$.

  Ainsi $f_1(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y) \leq \lambda \psi(x) + (1-\lambda) \psi(y)$.

  Donc $f_1(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda \psi(x) + (1-\lambda) \psi(y)$. De même $f_2(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda \psi(x) + (1-\lambda) \psi(y)$.

  Alors $\psi(\lambda x + (1-\lambda) y) = \max(f_1(\lambda x + (1-\lambda) y), f_2(\lambda x + (1-\lambda) y)) \leq \lambda \psi(x) + (1-\lambda) \psi(y)$.

Ceci achève de montrer que ψ est convexe.

Ainsi $\max(f_1, f_2)$ est convexe.

Montrons qu'il n'en est pas de même pour $\min(f_1, f_2)$.

Posons $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\hat{f}_1((x_1, x_2, \dots, x_n)) = x_1^2$ et $\hat{f}_2((x_1, x_2, \dots, x_n)) = (x_1 - 4)^2$.

Nous avons déjà vu que $\hat{f}_1$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$. On montre de la même manière que $\hat{f}_2$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$ en utilisant le fait que $t \mapsto (t-4)^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée seconde est positive sur $\mathbb{R}$).

Posons $\varphi = \min(\hat{f}_1, \hat{f}_2)$.

Considérons les éléments $x = (1, 0, \dots, 0)$ et $y = (3, 0, \dots, 0)$ de $\mathbb{R}^n$ et posons $\lambda = \frac{1}{2}$.

$\lambda x + (1-\lambda) y = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} y = (2, 0, \dots, 0)$.

$\hat{f}_1(\lambda x + (1-\lambda) y) = 2^2 = 4$. $\hat{f}_2(\lambda x + (1-\lambda) y) = (2-4)^2 = 4$. Alors $\varphi(\lambda x + (1-\lambda) y) = 4$.

$\hat{f}_1(x) = 1$, $\hat{f}_1(y) = 9$, $\hat{f}_2(x) = (1-4)^2 = 9$, $\hat{f}_2(y) = (3-4)^2 = 1$.

Ainsi $\varphi(x) = \min(1, 9)$ et $\varphi(y) = \min(9, 1)$. $\varphi(x) = \varphi(y) = 1$.

Alors $\lambda \varphi(x) + (1-\lambda) \varphi(y) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 = 1 < 4 = \varphi(\lambda x + (1-\lambda) y)$.

$\exists \lambda \in [0,1]$, $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\varphi(\lambda x + (1-\lambda) y) > \lambda \varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$.

Donc φ n'est pas convexe.

Nous avons donc trouvé deux applications convexes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$, telles que

$\min(\hat{f}_1, \hat{f}_2)$ ne soit pas convexe.

Ainsi <u>$\min(f_1, f_2)$ n'est pas nécessairement convexe.</u>

<u>b)</u> Ici encore la réponse est négative.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}_1(x) = -2x$ et $\tilde{f}_2(x) = x^2$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(\tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2)(x) = -2x^2$. $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$ et $\hat{f}_1 \circ \hat{f}_2$ sont deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_1''(x) = 0 \geq 0$, $\hat{f}_2''(x) = 2 \geq 0$ et $(\hat{f}_1 \circ \hat{f}_2)''(x) = -4 < 0$.

Alors $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$ sont convexes mais $\hat{f}_1 \circ \hat{f}_2$ n'est pas convexe.

<u>Pour $n=1$, $f_1 \circ f_2$ n'est pas nécessairement convexe.</u>

(Q3) <u>a)</u> Soit $\lambda \in [0,1]$. Soit $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$

$g_{x,h}(\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2) = f(x + (\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2) h) \underset{\substack{\uparrow \\ 1 = \lambda + (1-\lambda) \text{ donc } x = \lambda x + (1-\lambda) x}}{=} f(\lambda(x + t_1 h) + (1-\lambda)(x + t_2 h))$.

Comme f est convexe sur $\mathbb{R}^n$: $g_{x,h}(\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2) \leq \lambda f(x + t_1 h) + (1-\lambda) f(x + t_2 h) = \lambda g_{x,h}(t_1) + (1-\lambda) g_{x,h}(t_2)$.

$\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, $g_{x,h}(\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2) \leq \lambda g_{x,h}(t_1) + (1-\lambda) g_{x,h}(t_2)$.

<u>$g_{x,h}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.</u>

<u>b)</u> Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, le cours (*) indique que <u>$g_{x,h}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.</u>

(*) le programme parle de la dérivée de $t \mapsto (f \circ u)(t)$ dans le cas où $u(t) = A + tV$...

De plus <u>$\forall t \in \mathbb{R}$, $g_{x,h}'(t) = \langle \nabla f(x + th), h \rangle$.</u>

<u>En posant $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ on a encore $\forall t \in \mathbb{R}$, $g_{x,h}'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a + th) \times h_k$</u>

c) Poursuivons avec le couple (x,h).

$g_{x,h}$ étant convexe sur $\mathbb{R}$ on a $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$, $g_{x,h}(b) \geq g'_{x,h}(a)(b-a) + g_{x,h}(a)$.

Appliquons cela avec $a=0$ et $b=1$. $g_{x,h}(1) \geq g'_{x,h}(0)(1-0)+g_{x,h}(0)$.

$g_{x,h}(1)=f(x+h)$, $g_{x,h}(0)=f(x)$ et $g'_{x,h}(0)=\langle \nabla f(x), h\rangle$.

Alors $f(x+h)\geq \langle\nabla f(x),h\rangle + f(x)$. ou $\langle \nabla f(x), h\rangle \leq f(x+h)-f(x)$.

$\forall (x,h)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, $\langle \nabla f(x), h\rangle \leq f(x+h)-f(x)$.

Prenons un couple (x,y) quelconque d'éléments de $\mathbb{R}^n$. Posons $h=y-x$. $y=x+h$.

Alors $\langle \nabla f(x), y-x\rangle = \langle\nabla f(x),h\rangle \leq f(x+h)-f(x) = f(y)-f(x)$.

Ainsi $\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2$, $\langle \nabla f(x), y-x\rangle \leq f(y)-f(x)$.

d) Soit a un point critique de f. $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

$\forall y\in\mathbb{R}^n$, $f(y)-f(a)\geq \langle \nabla f(a), y-a\rangle = \langle 0_{\mathbb{R}^n}, y-a\rangle = 0$.

Donc $\forall y\in\mathbb{R}^n$, $f(y)\geq f(a)$.

Si a est un point critique de f, f admet en a un minimum global.

Remarque.. Soit a un point de $\mathbb{R}^n$. Comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$:

f admet un minimum global en a si et seulement si a est un point critique de f.

C'est le gros intérêt des fonctions convexes en optimisation.

Si g est une fonction numérique C^1 et concave sur $\mathbb{R}^n$ et si $a\in\mathbb{R}^n$:

g admet un maximum global en a si et seulement si a est un point critique de g.

Q4 Notons que le texte oblige à identifier $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Nous nous y plierons.

a) Posons $A=(a_{i,j})$.

$\forall x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right)x_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_ix_j$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ car f est une fonction polynomiale.

Posons $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\forall x=(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u_{i,j}(x) = x_i x_j$.

soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $u_{i,j}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ car $u_{i,j}$ est polynomiale.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\forall x=(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\dfrac{\partial u_{i,j}}{\partial x_k}(x) = \begin{cases} 2x_k & \text{si } i=j=k \\ x_i & \text{si } i\neq k \text{ et } j=k \\ x_j & \text{si } i=k \text{ et } j\neq k \\ 0 & \text{si } i\neq k \text{ et } j\neq k \end{cases}$

soit $k \in [\![1,n]\!]$ et soit $x=(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x_k}(x).$$

Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \dfrac{1}{2}\left[a_{k,k}2x_k + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} a_{i,k}x_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{k,j}x_j\right]$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}x_i + \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j$ (on a réparti le $a_{k,k}2x_k$ entre les deux sommes ...)

Or A est symétrique.

Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_{k,i}x_i + \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}x_i$.

Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ est la $k^{\text{ième}}$ composante de Ax

Par conséquent $\underline{\nabla f(x) = Ax}$.

b) Supposons que f est convexe et notons que $\nabla f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Alors $0_{\mathbb{R}^n}$ est un point critique de la fonction convexe f. donc f admet en $0_{\mathbb{R}^n}$ un minimum global.

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $0 = f(0) \leq f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle$. Alors $\underline{\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x\rangle \geq 0}$.

V1 Montrons alors que les valeurs propres de la matrice symétrique A sont positives ou nulles.

V2 soit $\lambda \in S_p A$. $\exists x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et $Ax = \lambda x$.

Alors $0 \leq \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2$ et $\|x\|^2 > 0$ donc $\lambda \geq 0$.

<u>Si f est convexe les valeurs propres de A sont positives ou nulles.</u>

Remarque. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et A est la hessienne de f en tout point de $\mathbb{R}^n$...

R.

Question 6 **HEC 2012-6-S23** $\boxed{\text{F 1}}$ **I. KARDASZEWICZ**

a, b sont deux réels strictement positifs. α est réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabili~~s~~sé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, vérifiant les conditions suivantes :

- $P(X=0)=0$;
- $P(X>0)=\alpha$;
- $P_{\{X>0\}}(X \leqslant x) = \begin{cases} 1-e^{-ax} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$;
- $P_{\{X<0\}}(-X \leqslant x) = \begin{cases} 1-e^{-bx} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. *Je mettrais plutôt* $P_{\{X<0\}}(-X<x) = \begin{cases} 1-e^{-bx} & si\ x>0 \\ 0 & si\ x \leqslant 0 \end{cases}$.

Q1. Déterminer la fonction de répartition de X.

Q2. La variable aléatoire X est-elle à à densité ?

Q3. Établir l'existence de $E(X)$. Calculer $E(X)$.

Question de cours. *Développement limité d'ordre 1 au point a de* $\mathbb{R}^n$ *pour une fonction numérique f de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^n$.

Q1 $(\{X>0\}, \{X=0\}, \{X<0\})$ est un système complet d'événements.

Alors $1 = P(X>0)+P(X=0)+P(X<0) = \alpha + 0 + P(X<0)$. $\underline{P(X<0) = 1-\alpha}$. Dans la suite nous supposerons $\alpha \in]0,1[$.

soit $x \in]-\infty, 0]$

$P(X\leq x) = P(\{X\leq x\} \cap \{X<0\}) + P(\{X \leq x\} \cap \{X=0\}) + P(\{X\leq x\} \cap \{X>0\})$.

$\{X \leq x\} \cap \{X>0\} = \emptyset$ donc $P(\{X\leq x\} \cap \{X>0\}) = 0$ ... car $x \leq 0$

$\{X\leq x\} \cap \{X=0\} \subset \{X=0\}$. Alors $0 \leq P(\{X\leq x\} \cap \{X=0\}) \leq P(X=0)=0$.

donc $P(\{X\leq x\} \cap \{X=0\}) = 0$.

Alors $P(X\leq x) = P(\{X \leq x\} \cap \{X<0\}) = P(\{-X \geq -x\} \cap \{X<0\})$

$P(X\leq x) = P(X<0)\, P_{\{X<0\}}(-X \geqslant -x) = (1-\alpha)\left(1 - P_{\{X<0\}}(-X<-x)\right) = (1-\alpha)\left[1-(1-e^{-b(-x)})\right]$

$P_{\{X<0\}}$ est une probabilité... $-x \geqslant 0$ donc dans si $-x>0$ et encore vrai si $-x=0$!!

$\underline{P(X\leq x) = (1-\alpha)\, e^{bx} \text{ si } x \in]-\infty, 0].}$

soit $x \in]0, +\infty[$.

$P(X\leq x) = P(\{X\leq x\} \cap \{X<0\}) + P(\{X\leq x\} \cap \{X=0\}) + P(\{X \leq x\} \cap \{X>0\})$.

$P(\{X\leq x\} \cap \{X<0\}) = P(X<0) = 1-\alpha$ et comme plus haut $P(\{X\leq x\} \cap \{X=0\}) = 0$ car $P(X=0)=0$.

Ainsi $P(X\leq x) = 1-\alpha + P(X>0)\, P_{\{X>0\}}(X\leq x) = 1-\alpha+\alpha(1-e^{-ax}) = 1-\alpha e^{-ax}$.

La fonction de répartition de X est la fonction F_X définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} (1-\alpha)e^{bx} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 1-\alpha e^{-ax} & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}.$$

Q2 $(1-\alpha)e^{b\times 0} = 1-\alpha = 1-\alpha e^{-a\times 0}$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} (1-\alpha)e^{bx} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 1-\alpha e^{-ax} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$

$x \mapsto (1-\alpha)e^{bx}$ et $x \mapsto 1-\alpha e^{-ax}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc F_X est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$. Ceci suffit pour dire que :

1) F_X est continue sur $\mathbb{R}$

2) F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{0\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Ainsi X est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F'_X(x) = (1-\alpha)b e^{bx}$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ F'_X(x) = \alpha a e^{-ax}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \begin{cases} \alpha a e^{-ax} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ (1-\alpha)b e^{bx} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\end{cases}$.

f_X est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide sur $\mathbb{R}-\{0\}$, donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points, avec F'_X donc f_X est une densité de X.

Q3 Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

g est une densité d'une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre λ. Alors $\int_0^{+\infty} x g(x)\,dx$ converge et vaut $E(Y)$.

donc $\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$ converge et vaut $\frac{1}{\lambda}$. (1) $-Y$ est aussi une variable aléatoire à densité et $h : x \mapsto \frac{1}{|-1|} g(-x)$ en est une densité.

$E(-Y)$ existe et vaut $-E(Y)$ donc $-\frac{1}{\lambda}$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, h(x)\,dx$ existe et vaut $-\frac{1}{\lambda}$. Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda x} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Donc $\int_{-\infty}^{0} \lambda x e^{\lambda x}\,dx$ existe et vaut $-\frac{1}{\lambda}$. ②

Notons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x f_X(x) = \begin{cases} \alpha a x e^{-ax} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ (1-\alpha) b x e^{bx} & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi • $\int_{0}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$ converge et vaut $\alpha \times \frac{1}{a}$ (d'après ①).

• $\int_{-\infty}^{0} x f_X(x)\,dx$ converge et vaut $(1-\alpha)\left(-\frac{1}{b}\right)$ (d'après ②).

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$ converge et vaut $\frac{\alpha}{a} - \frac{1-\alpha}{b}$.

Donc X possède une espérance et $E(X) = \frac{\alpha}{a} - \frac{1-\alpha}{b}$.