HEC 2012 S 27

Exercice principal S27

1. Question de cours : Ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par : $P(X) = X^3 - X^2 - 1$.
a) Montrer que toutes les racines de P sont simples.
b) Montrer que P admet une racine réelle, notée b, et deux racines complexes conjuguées, notées z et $\bar{z}$.
c) Calculer le produit $bz\bar{z}$. Comparer b et $|z|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{S}$ une partie de $[\![1, n]\!]$ qui possède la propriété suivante : si $p \in \mathcal{S}$, alors $p+1$ et $p+2$ n'appartiennent pas à $\mathcal{S}$; on dit que $\mathcal{S}$ est une "partie spéciale" de $[\![1, n]\!]$. Par exemple, l'ensemble vide est une partie spéciale.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note t_n le nombre de parties spéciales de $[\![1, n]\!]$ et on pose $t_0 = 1$.
a) Calculer t_1 , t_2 et t_3.
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $t_{n+3} = t_n + t_{n+2}$.

* 4. Soit V l'ensemble des suites réelles $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $(v_0, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+3} = v_n + v_{n+2}$.
a) Montrer que V est un espace vectoriel.
b) Déterminer la dimension de V ainsi qu'une base de V.

5) Soit M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & z & \bar{z} \\ b^2 & z^2 & \bar{z}^2 \end{pmatrix}$.
a) Montrer que la matrice M est inversible.
b) Quelles sont les suites géométriques de V ?
c) Soit α, β et γ des constantes complexes telles que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha b^n + \beta z^n + \gamma \bar{z}^n = 0$.
Montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
d) En déduire qu'il existe une constante réelle A et une constante complexe B vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t_n = Ab^n + Bz^n + \overline{B}\bar{z}^n$.

Exercice sans préparation S27

Soit X une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_*^+$.

1. On suppose que la variable aléatoire $X + \dfrac{1}{X}$ admet une espérance. Montrer que X admet une espérance.

2. La réciproque est-elle vraie ?

* dans cette question 4 il faudrait sans doute remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

HEC 2012 S27 Correction de l'exercice principal

Q1 Soit $\hat{P}$ un élément non nul de $\mathbb{K}[X]$, soit α un élément de $\mathbb{K}$ et soit k un élément de $\mathbb{N}^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) α est une racine de $\hat{P}$ d'ordre de multiplicité k.

i') $(X-\alpha)^k$ divise $\hat{P}$ et $(X-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas $\hat{P}$.

ii) $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$, $\hat{P} = (X-\alpha)^k Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

iii) $\hat{P}(\alpha) = \hat{P}'(\alpha) = \cdots = \hat{P}^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $\hat{P}^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

▼ <u>Remarque</u>.. Le plus souvent on prend i') comme définition. ▲

Q2 a) Soit α une racine de P. Supposons que α ne soit pas une racine simple de P.

Alors $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$. $\begin{cases} \alpha^3 - \alpha^2 - 1 = 0 \\ 3\alpha^2 - 2\alpha = 0 \end{cases}$

$3\alpha^2 - 2\alpha = 0$ donc $\alpha = 0$ ou $\alpha = \frac{2}{3}$. Si $\alpha = 0$: $\alpha^3 - \alpha^2 - 1 = -1$ et si $\alpha = \frac{2}{3}$:

$\alpha^3 - \alpha^2 - 1 = -\frac{31}{27}$. Dans les deux cas $\alpha^3 - \alpha^2 - 1 \neq 0$!

<u>Toutes les racines de P sont simples.</u>

<u>b)</u> Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 - 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2x = 3x(x - \frac{2}{3})$.

$f'(0) = f'(\frac{2}{3}) = 0$; $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]\frac{2}{3}, +\infty[$, $f'(x) > 0$; $\forall x \in]0, \frac{2}{3}[$, $f'(x) < 0$.

Alors f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[\frac{2}{3}, +\infty[$. f est strictement décroissante sur $[0, \frac{2}{3}]$. Ajoutons que $f(0) = -1$, $f(\frac{2}{3}) = -\frac{31}{27}$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

x	$-\infty$		0		$2/3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{31}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $f(x) \leq f(0) = -1$ (f est croissante sur $]-\infty, 0]$).

$\forall x \in [0, \frac{2}{3}]$, $f(x) \in [-\frac{31}{27}, -1]$ (f est décroissante sur $[0, \frac{2}{3}]$).

Alors f ne s'annule pas sur $]-\infty, \frac{2}{3}]$.

f est continue et strictement croissante sur $]\frac{2}{3}, +\infty[$, $\lim_{x \to \frac{2}{3}} f(x) = -\frac{31}{27}$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

R.

f définit donc une bijection de $]\frac{2}{3},+\infty[$ sur $]-\frac{31}{27},+\infty[$.

Or $0\in]-\frac{31}{27},+\infty[$ donc $\exists!\, b\in]\frac{2}{3},+\infty[,\ f(b)=0$.

Finalement $\exists!\, b\in\mathbb{R},\ f(b)=0$. $b\in]\frac{2}{3},+\infty[$.

Alors P admet une racine réelle, notée b, et une seule. L'ordre de multiplicité de b dans P est 1.

▼ Remarque.. $f(1)=-1$ et $f(2)=3$ donc $b\in]1,2[$. ▲

$\exists(c,d,e)\in\mathbb{R}^3,\ P(X)=(X-b)(cX^2+dX+e)$. Posons $Q=cX^2+dX+e$.

Q est un polynôme de degré deux, à coefficients réels n'ayant pas de racine dans $\mathbb{R}$.

Ainsi Q admet deux racines complexes conjuguées que nous noterons z et $\bar{z}$.

Finalement P admet une racine réelle notée b, et deux racines complexes conjuguées, notées z et $\bar{z}$.

▼ Remarque.. les admirateurs de Cardan pourrait montrer que :

$$b=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{29}{27}+\sqrt{\frac{31}{27}}\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{29}{27}-\sqrt{\frac{31}{27}}\right)}+\frac{1}{3}\ ;\quad b\simeq 1,465\,571\,232.$$

On peut aussi prendre $z=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{29}{27}+\sqrt{\frac{31}{27}}\right)}\,j+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{29}{27}+\sqrt{\frac{31}{27}}\right)}\,j^2+\frac{1}{3}$. ▲

c) $P(X)=X^3-X^2-1=(X-b)(X-z)(X-\bar{z})$. De plus les coefficients constants de X^3-X^2-1 et de $(X-b)(X-z)(X-\bar{z})$ sont respectivement -1 et $-bz\bar{z}$.

Alors $bz\bar{z}=1$. Ainsi $b|z|^2=1$. $|z|=\frac{1}{\sqrt{b}}$.

Notons que $b\in]1,2[$ comme nous l'avons dit plus haut. Alors $|z|=\frac{1}{\sqrt{b}}<1$.

Finalement $|z|<1<b$ donc $|z|<b$

(Q3) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ nous noterons $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$. $\operatorname{card}\mathcal{P}_n=2^n$

a) $\mathcal{P}_1=\{\emptyset,\{1\}\}$

les parties spéciales de $[\![1,1]\!]$ sont donc $\emptyset$ et $\{1\}$

Ainsi $t_1=2$.

$\mathcal{P}_2=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$. les parties spéciales de $[\![1,2]\!]$ sont $\emptyset$, $\{1\}$ et $\{2\}$. $t_2=3$.

$\mathcal{P}_3=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.
les parties spéciales de $[\![1,3]\!]$ sont $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$. Ainsi $t_3=4$.

▼ Remarque.. Les parties spéciales de $[\![1,4]\!]$ sont $\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,4\}$.
Ainsi $t_4=6$. ▲

b) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ notons $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des parties spéciales de $[\![1,n]\!]$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{S}'_{n+3}$ (resp. $\mathcal{S}''_{n+3}$) l'ensemble des parties spéciales de $[\![1,n+3]\!]$ qui contiennent (resp. qui ne contiennent pas) $n+3$.

$\mathcal{S}_{n+3}=\mathcal{S}'_{n+3}\cup\mathcal{S}''_{n+3}$ et $\mathcal{S}'_{n+3}\cap\mathcal{S}''_{n+3}=\emptyset$. Ainsi $t_{n+3}=\operatorname{card}\mathcal{S}_{n+3}=\operatorname{card}\mathcal{S}'_{n+3}+\operatorname{card}\mathcal{S}''_{n+3}$.

Notons qu'une partie de $\mathcal{S}'_{n+3}$ ne contient ni $n+2$ ni $n+1$. Mieux une partie de $\mathcal{S}'_{n+3}$ est la réunion d'une partie de $\mathcal{S}_n$ avec $\{n+3\}$.

Alors $\operatorname{card}\mathcal{S}'_{n+3}=\operatorname{card}\mathcal{S}_n=t_n$. $\operatorname{card}\mathcal{S}'_{n+3}=t_n$.

Rappelons que $\mathcal{S}''_{n+3}$ est l'ensemble des parties spéciales de $[\![1,n+3]\!]$ qui ne contient pas $n+3$ et remarquons que $\mathcal{S}''_{n+3}$ n'est autre que l'ensemble des parties spéciales de $[\![1,n+2]\!]$. Alors $\operatorname{card}\mathcal{S}''_{n+3}=t_{n+2}$.

Ainsi $t_{n+3}=\operatorname{card}\mathcal{S}'_{n+3}+\operatorname{card}\mathcal{S}''_{n+3}=t_n+t_{n+2}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $t_{n+3}=t_n+t_{n+2}$. Par convention $t_0=1$.

Alors $t_{0+3}=t_3=4=1+3=t_0+t_2=t_0+t_{0+2}$. La formule est encore vraie pour $n=0$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $t_{n+3}=t_n+t_{n+2}$.

Ici il faut lire les solutions en pensant que l'on peut remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ ...

(Q4) a) Notons E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

- $V\subset E$
- La suite nulle appartient clairement à V ($0=0+0$!!).
- Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soient $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de V.

$\lambda u+v=(\lambda u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\lambda u_{n+3}+v_{n+3}=\lambda(u_n+u_{n+2})+(v_n+v_{n+2})=(\lambda u_n+v_n)+(\lambda u_{n+2}+v_{n+2})$.

Donc $\lambda u+v\in V$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(u,v)\in V^2$, $\lambda u+v\in V$.

ceci achève de montrer que V est un sous-espace vectoriel de E.

Ainsi <u>V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.</u>

<u>b)</u> Posons $\forall v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in V$, $\varphi(v)=(v_0,v_1,v_2)$. φ est une application de V dans $\mathbb{R}^3$.

• Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soient $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de V.

$\varphi(\lambda u+v)=(\lambda u_0+v_0,\lambda u_1+v_1,\lambda u_2+v_2)=\lambda(u_0,u_1,u_2)+(v_0,v_1,v_2)=\lambda\varphi(u)+\varphi(v)$.

<u>φ est linéaire</u>

• Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\ker\varphi$. $\varphi(u)=0_{\mathbb{R}^3}$. $(u_0,u_1,u_2)=0_{\mathbb{R}^3}$. $u_0=u_1=u_2=0$.

montrons par une récurrence "d'ordre 3" que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=0$.

la propriété est vraie pour $n=0$, $n=1$, $n=2$.

Supposons la vraie pour n, $n+1$ et $n+2$ avec $n\in\mathbb{N}$. Montrons la pour $n+3$.

$u_{n+3}=u_n+u_{n+2}=0+0=0$! ceci achève la récurrence.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=0$. $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=0_V$.

Alors $\ker\varphi=\{0_V\}$. <u>φ est injective.</u>

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. le principe de récurrence montre qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0=a$, $u_1=b$, $u_2=c$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+3}=u_n+u_{n+2}$.

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in V$ et $\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}})=(u_0,u_1,u_2)=(a,b,c)$.

$\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $\exists u\in V$, $\varphi(u)=(a,b,c)$. <u>φ est surjective.</u>

Finalement <u>φ est une application linéaire bijective de V sur $\mathbb{R}^3$.</u>

V et $\mathbb{R}^3$ sont isomorphes et $\dim\mathbb{R}^3=3$.

Alors <u>V est de dimension 3.</u> Soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$.

<u>φ^{-1} est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur V et (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.</u>

Alors $\underline{(\varphi^{-1}(e_1), \varphi^{-1}(e_2), \varphi^{-1}(e_3))}$ est une base de V.

Posons $\varphi^{-1}(e_1) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\varphi^{-1}(e_2) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\varphi^{-1}(e_3) = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+3} = a_n + a_{n+2}$;

$b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $b_{n+3} = b_n + b_{n+2}$;

$c_0 = c_1 = 0$, $c_2 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $c_{n+3} = c_n + c_{n+2}$.

Q5 a) V1 Soit $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ tel que ${}^t M\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})}$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & b & b^2\\ 1 & z & z^2\\ 1 & \bar z & \bar z^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+\beta b+\gamma b^2\\ \alpha+\beta z+\gamma z^2\\ \alpha+\beta\bar z+\gamma\bar z^2\end{pmatrix}. \quad \begin{cases}\alpha+\beta b+\gamma b^2=0\\ \alpha+\beta z+\gamma z^2=0\\ \alpha+\beta\bar z+\gamma\bar z^2=0\end{cases} . \quad \text{Posons } R = \alpha+\beta X+\gamma X^2.$$

$R\in\mathbb{C}_2[X]$, $R(b) = R(z) = R(\bar z) = 0$. Notons que $b\neq z$, $b\neq\bar z$ et $z\neq\bar z$.

Alors R est un polynôme de degré au plus 2 ayant trois racines distinctes.

R est donc le polynôme nul. Ainsi $\alpha=\beta=\gamma=0$.

$\forall\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, ${}^tM\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})} \Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})}$. ${}^tM$ est inversible.

(*) Alors $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} {}^tM = 3$. Donc $\underline{M \text{ est inversible}}$.

V2 Soit $U = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ tel que $MU = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})}$. $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0 & L_1\\ \alpha b+\beta z+\gamma\bar z=0 & L_2\\ \alpha b^2+\beta z^2+\gamma\bar z^2=0 & L_3\end{cases}$

$L_2\leftarrow L_2 - bL_1$ et $L_3\leftarrow L_3 - bL_2$ donnent $\begin{cases}\beta(z-b)+\gamma(\bar z-b)=0 & L'_1\\ \beta z(z-b)+\gamma\bar z(\bar z-b)=0 & L'_2\end{cases}$

$L'_2\leftarrow L'_2 - zL'_1$ donne $\gamma(\bar z - z)(\bar z - b) = 0$. Comme $\bar z\neq z$ et $\bar z\neq b$: $\gamma=0$.

En renvoyant dans L'_1 il vient $\beta=0$ car $z\neq b$. En renvoyant dans L_1 il vient $\alpha=0$.

Donc $\alpha=\beta=\gamma=0$. $U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}}(\mathbb{C})$.

$\forall U\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, $MU = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})} \Rightarrow U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})}$. M est inversible.

On peut passer directement de ${}^tM$ inversible à M inversible en utilisant la définition sans utiliser $\operatorname{rg}{}^tM = \operatorname{rg} M$.

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrie de réels. Soit q sa raison. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=q^n u_0$.

1er cas.. $q=0$ et $u_0=0$. Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=0$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in V$.

2ème cas.. $q=0$ et $u_0\neq 0$ Alors $u_1=u_2=u_3=0$. Donc $u_3=0$ et $u_0+u_2=u_0\neq 0$

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\notin V$

3ème cas.. $q\neq 0$ et $u_0=0$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle et elle appartient à V.

4ème cas.. $q\neq 0$ et $u_0\neq 0$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in V \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3}=u_n+u_{n+2} \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ u_0 q^{n+3}=u_0 q^n+u_0 q^{n+2}$.

comme $u_0\neq 0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ q^n\neq 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in V \Leftrightarrow q^3=q^0+q^2 \Leftrightarrow P(q)=0$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{q\in\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} q=b$.

Les suites géométriques de V sont la suite nulle et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

▼ Remarque.. On montre de la même manière que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients complexes, géométriques et vérifiant $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3}=u_n+u_{n+2}$ sont la suite nulle, et les suites $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\jmath^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\bar{\jmath}^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

C'est sans doute ce qu'il fallait démontrer. ▲

c) Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha b^n+\beta \jmath^n+\gamma\bar{\jmath}^n=0$.

Alors $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha b+\beta\jmath+\gamma\bar{\jmath}=0\\ \alpha b^2+\beta\jmath^2+\gamma\bar{\jmath}^2=0\end{cases}$. Donc $\begin{pmatrix}1&1&1\\ b&\jmath&\bar{\jmath}\\ b^2&\jmath^2&\bar{\jmath}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. $M\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=0_{M_{3,1}(\mathbb{C})}$.

comme M est inversible : $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=0_{M_{3,1}(\mathbb{C})}$. $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Si $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3$, $(\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha b^n+\beta\jmath^n+\gamma\bar{\jmath}^n=0)\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$.

La famille $((b^n)_{n\in\mathbb{N}},(\jmath^n)_{n\in\mathbb{N}},(\bar{\jmath}^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est libre dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes indexées par $\mathbb{N}$.

d) En déduire ?!! Tu rigoles, coco ! Tout est à refaire !!

D'abord il fallait considérer l'ensemble V' des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ complexes qui vérifient $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3} = u_n + u_{n+2}$. Puis :

- comme dans Q4 a) on montre que V' est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
- on pose $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V'$, $\varphi'((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_0, u_1, u_2)$ et on montre que φ' est un isomorphisme de V' sur $\mathbb{C}^3$. Alors $\dim V' = 3$.
- On montre que les suites géométriques de V' sont $0_{V'}$, $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\bar{z}^n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Q4 c) montre que $((b^n)_{n\in\mathbb{N}}, (z^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\bar{z}^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une famille libre de V' donc une base de V' car $\dim V' = 3$.

__Alors__ comme $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V'$ $(V \subset V')$: $\exists (A,B,C)\in\mathbb{C}^3, \forall n\in\mathbb{N}, t_n = A\,b^n + B\,z^n + C\bar{z}^n$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $0 = t_n - t_n = t_n - \bar{t}_n = A b^n + B z^n + C\bar{z}^n - \bar{A} b^n - \bar{B}\bar{z}^n - \bar{C} z^n$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $(A-\bar{A}) b^n + (B-\bar{C}) z^n + (C-\bar{B})\bar{z}^n = 0$. Alors d'après Q5 c) $A-\bar{A} = B-\bar{C} = C-\bar{B} = 0$.

Donc $A = \bar{A}$ et $C = \bar{B}$. Ainsi $A\in\mathbb{R}$ et $C = \bar{B}$.

Alors $\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ t_n = A b^n + B z^n + \bar{B}\bar{z}^n \text{ avec } A\in\mathbb{R} \text{ et } B\in\mathbb{C}}$.

__Exercice..__ Réécrire le topo !

R..

Question 7 **HEC 2012-7-S27** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit X une variable à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Q1. On suppose que la variable aléatoire $X + \dfrac{1}{X}$ admet une espérance. Montrer que X admet une espérance.

Q2. La réciproque est-elle vraie ?

Question de cours. *Ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.*

Q1 X est une variable aléatoire à densité qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc X possède une densité f définie sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $]-\infty, 0]$.

- X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$;
- $t \mapsto t + \frac{1}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$;
- f est une densité de X ;
- $E(X + \frac{1}{X})$ existe

le théorème de transfert montre alors que $\int_0^{+\infty} (t + \frac{1}{t}) f(t)\, dt$ est absolument convergente donc convergente.

$\int_{-\infty}^0 t f(t)\, dt$ existe et vaut 0. $\forall t \in]0, +\infty[$, $0 \leq t \leq t + \frac{1}{t}$ et $f(t) \geq 0$.

donc $\forall t \in]0, +\infty[$, $0 \leq t f(t) \leq (t + \frac{1}{t}) f(t)$ et $\int_0^{+\infty} (t + \frac{1}{t}) f(t)\, dt$ converge.

Alors $\int_0^{+\infty} t f(t)\, dt$ converge.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$ converge. donc <u>X possède une espérance.</u>

Q2 La réciproque est fausse. Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

- <u>X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$</u> (non ?)
- <u>$E(X)$ existe.</u>
- <u>la fonction g définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$</u> <u>est une densité de X</u>

$t \mapsto t + \frac{1}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc, d'après le théorème de transfert, $X + \frac{1}{X}$ possède une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} (t + \frac{1}{t}) g(t)\, dt$ est absolument convergente.

Or $(t + \frac{1}{t})\, g(t) \underset{0}{\sim} \frac{\lambda}{t}$; $\forall t \in]0, +\infty[$, $\frac{\lambda}{t} \geq 0$ et $\int_0^1 \frac{\lambda}{t}\, dt$ diverge. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^1 (t + \frac{1}{t}) g(t)$ diverge. Alors $\int_0^{+\infty} (t + \frac{1}{t}) g(t)\, dt$ diverge. <u>$X + \frac{1}{X}$ n'a pas d'espérance.</u>