Exercice principal S33

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.
Rappeler la signification de la relation : $v_n = o(u_n)$.
Montrer que si $v_n = o(u_n)$ et si la série de terme général u_n est convergente, la série de terme général v_n l'est aussi et que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} v_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$.

2. Soit α un réel strictement positif.
a) Établir la relation : $\mathrm{e}^{-n^\alpha} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
b) En déduire l'existence d'un réel c_α et d'une variable aléatoire X_α à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P([X_\alpha = n]) = c_\alpha\, \mathrm{e}^{-n^\alpha}$$
c) On suppose que $\alpha = 1$.
Identifier la loi de X_1 et calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité conditionnelle $P_{[X_1 \geqslant n]}([X_1 \geqslant n+1])$.

3. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$ et on lui associe X_α comme en 2.b).
a) Établir la relation : $\mathrm{e}^{-(n+1)^\alpha} = o\left(\mathrm{e}^{-n^\alpha} - \mathrm{e}^{-(n+1)^\alpha}\right)$.
b) À l'aide du résultat de la question 1, établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $P([X_\alpha \geqslant n+1]) = o\big(P([X_\alpha = n])\big)$.
c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_{[X_\alpha \geqslant n]}([X_\alpha \geqslant n+1]) = 0$.

4. On suppose dans cette question que $0 < \alpha < 1$ et on lui associe X_α comme en 2.b).
a) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{(n+1)^\alpha}\left(\mathrm{e}^{-n^\alpha} - \mathrm{e}^{-(n+1)^\alpha}\right)$.
b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_{[X_\alpha \geqslant n]}([X_\alpha \geqslant n+1])$.

Exercice sans préparation S33

Soit D la matrice définie par : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^3 - 2M = D$.

HEC 2012 S 33 Correction de l'exercice principal.

Q1 $v_n \underset{n\mapsto+\infty}{=} o(u_n)$ signifie que : il existe un élément p de $\mathbb{N}$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant p}$ de réels tels que 1) $\forall n \in [\![p,+\infty[\![,\ v_n = \varepsilon_n u_n$

2) $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \varepsilon_n = 0$

Comme ici, pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_n>0$ cela signifie encore que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{v_n}{u_n}=0$.

On suppose maintenant que la série de terme général u_n converge et que $v_n \underset{n\mapsto+\infty}{=} o(u_n)$.

Comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$ et $v_n>0$: la série de terme général v_n converge... cours !!

Posons $\forall n\in\mathbb{N}$, $T_n=\sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k$ et $R_n=\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k$ et montrons que $T_n \underset{n\mapsto+\infty}{=} o(R_n)$.

Comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $R_n>0$ il suffit de prouver que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\dfrac{T_n}{R_n}=0$.

Rappelons qu'il existe p dans $\mathbb{N}$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant p}$ de réels tels que $\forall n\in[\![p,+\infty[\![,\ v_n=\varepsilon_n u_n$ et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\varepsilon_n=0$.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. $\exists q\in[\![p,+\infty[\![,\ \forall n\in[\![p,+\infty[\![,\ n\geqslant q \Rightarrow |\varepsilon_n|<\varepsilon$. $\forall q\in[\![p,+\infty[\![,\ \varepsilon_n \underset{\substack{\text{a fait il y a}\\\text{égalité...}}}{\leqslant} |\varepsilon_n|<\varepsilon$.

Soit $n\in[\![q,+\infty[\![$, $0<v_k=\varepsilon_k u_k<\varepsilon u_k$ pour tout $k\in[\![n,+\infty[\![$.
$\uparrow \varepsilon_k<\varepsilon$ et $u_k>0$

$\forall k\in[\![n,+\infty[\![,\ 0<v_k<\varepsilon u_k$. Alors $0<\sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k<\varepsilon\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k$ car ces deux sommes existent.

Donc $\left|\dfrac{T_n}{R_n}-0\right|=\left|\dfrac{T_n}{R_n}\right|=\dfrac{T_n}{R_n}<\dfrac{\varepsilon R_n}{R_n}<\varepsilon$. Donc $\forall n\in[\![q,+\infty[\![,\ \left|\dfrac{T_n}{R_n}-0\right|<\varepsilon$.

Nous avons donc montré que : $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists q\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant q\Rightarrow\left|\dfrac{T_n}{R_n}-0\right|<\varepsilon$.

Ainsi $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\dfrac{T_n}{R_n}=0$. Donc $T_n\underset{n\mapsto+\infty}{=}o(R_n)$ ou $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k \underset{n\mapsto+\infty}{=} o\left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$

<u>Si la série de terme général u_n converge, la série de terme général v_n converge et</u>

<u>$\sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k \underset{n\mapsto+\infty}{=} o\left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$.</u>

<u>Exercice..</u> montrer ce résultat en supposant que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant 0$ et $v_n\geqslant 0$.

Q2 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n^2 e^{-n^\alpha} = \dfrac{(n^\alpha)^{\frac{2}{\alpha}}}{e^{n^\alpha}}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\frac{2}{\alpha}}}{e^x} = 0$ par croissance comparée.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$ $(\alpha>0)$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n^\alpha)^{2/\alpha}}{e^{n^\alpha}} = 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 e^{-n^\alpha}) = 0$.

Ainsi $e^{-n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Notons que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $e^{-n^\alpha} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n^2}\geqslant 0$. Alors les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général e^{-n^α} converge.

Posons $a_\alpha = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n^\alpha}$. $a_\alpha>0$ car $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $e^{-n^\alpha}>0$. Posons alors $c_\alpha = \dfrac{1}{a_\alpha}$.

Posons encore $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f_\alpha(n) = c_\alpha e^{-n^\alpha}$

1) $\mathbb{N}^*$ est dénombrable ;

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f_\alpha(n)\geqslant 0$

3) La série de terme général $f(n)$ converge car la série de terme général e^{-n^α} converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_\alpha(n) = c_\alpha \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n^\alpha} = c_\alpha a_\alpha = 1$

Alors f_α est la loi d'un probabilité d'une variable aléatoire discrète X_α à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Il existe un réel c_α et une variable aléatoire X_α à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(X_\alpha = n) = c_\alpha e^{-n^\alpha}$.

▼ Remarque.. Notons que $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_\alpha(n)\geqslant 0$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_\alpha(n) = 1$ donne nécessairement : $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_\alpha(n)\in[0,1]$. Donc il n'est pas nécessaire de montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_\alpha(n)\leqslant 1$. Notons cependant que c'est une évidence. ▼

Rappel.. $c_\alpha = \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n^\alpha}\right)^{-1}$. Ainsi $c_\alpha>0$.

c) Ici $\alpha=1$. Alors $c_1 = \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n}\right)^{-1} = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-n-1}\right)^{-1} = \left(e^{-1}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n\right)^{-1} = \left(e^{-1} \dfrac{1}{1-\frac{1}{e}}\right)^{-1} = \left(\dfrac{1}{e-1}\right)^{-1} = e-1$!

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(X_1=n) = c_1 e^{-n} = (e-1)e^{-n} = (1-\frac{1}{e})e e^{-n} = (1-\frac{1}{e})\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$. De plus $1-\frac{1}{e}\in]0,1[$ et $\frac{1}{e} = 1-(1-\frac{1}{e})$.

Alors X_1 suit la loi géométrique de paramètre $1-\frac{1}{e}$.

$k=i+n$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $P(X_1\geqslant n)=\sum_{k=n}^{+\infty}P(X_1=k)=\sum_{k=n}^{+\infty}(1-\frac{1}{e})(\frac{1}{e})^{k-1}=(1-\frac{1}{e})\sum_{i=0}^{+\infty}(\frac{1}{e})^{i+n-1}$.

$P(X_1\geqslant n)=(1-\frac{1}{e})(1/e)^{n-1}\sum_{i=0}^{+\infty}(\frac{1}{e})^{i}=(1-\frac{1}{e})(\frac{1}{e})^{n-1}\frac{1}{1-\frac{1}{e}}=(\frac{1}{e})^{n-1}$. Notons que $P(X_1\geqslant n)\neq 0$.

Alors $P(X_1\geqslant n+1)=(\frac{1}{e})^{n}$.

$$P_{\{X_1\geqslant n\}}(X_1\geqslant n+1)=\frac{P(\{X_1\geqslant n\}\cap\{X_1\geqslant n+1\})}{P(X_1\geqslant n)}=\frac{P(X_1\geqslant n+1)}{P(X_1\geqslant n)}=\frac{(1/e)^n}{(1/e)^{n-1}}=\frac{1}{e}.$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P_{\{X_1\geqslant n\}}(X_1\geqslant n+1)=\frac{1}{e}$.

Q3 a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $(n+1)^\alpha>n^\alpha$ car $\alpha>0$ donc $e^{(n+1)^\alpha}>e^{n^\alpha}$.

Alors $e^{-n^\alpha}>e^{-(n+1)^\alpha}$ donc $e^{-n^\alpha}-e^{-(n+1)^\alpha}>0$.

$$\frac{e^{-(n+1)^\alpha}}{e^{-n^\alpha}-e^{-(n+1)^\alpha}}=\frac{1}{e^{(n+1)^\alpha}(e^{-n^\alpha}-e^{-(n+1)^\alpha})}=\frac{1}{e^{(n+1)^\alpha-n^\alpha}-1}.$$

Rappelons que $(1+x)^\alpha-1\underset{x\to0}{\sim}\alpha x$ donc $(n+1)^\alpha-n^\alpha=n^\alpha\left[(1+\frac{1}{n})^\alpha-1\right]\underset{n\to+\infty}{\sim}n^\alpha\times\alpha\times\frac{1}{n}=\alpha n^{\alpha-1}$

$(n+1)^\alpha-n^\alpha\underset{n\to+\infty}{\sim}\alpha n^{\alpha-1}$ et $\alpha-1>0$ donc $\lim_{n\to+\infty}((n+1)^\alpha-n^\alpha)=\lim_{n\to+\infty}(\alpha n^{\alpha-1})=+\infty$.

Alors $\lim_{n\to+\infty}\left(e^{(n+1)^\alpha-n^\alpha}-1\right)=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-(n+1)^\alpha}}{e^{-n^\alpha}-e^{-(n+1)^\alpha}}=0$

Ainsi $e^{-(n+1)^\alpha}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(e^{-n^\alpha}-e^{-(n+1)^\alpha}\right)$.

Posons $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\begin{cases}753 & \text{si } n=0\ !! \\ c_\alpha e^{-n^\alpha}-c_\alpha e^{-(n+1)^\alpha} & \text{si } n\geqslant 1\end{cases}$ et $v_n=c_\alpha e^{-(n+1)^\alpha}$.

D'après ce que nous avons vu dans Q2b, la série de terme général $c_\alpha e^{-n^\alpha}$ converge. Ainsi la séries de terme général v_n converge.

Par différence <u>la série de terme général u_n converge</u>.

De plus 2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$

$C_\alpha > 0$ et $-n^\alpha > -(n+1)^\alpha$

3) $u_0 = 753 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = C_\alpha\left(e^{-n^\alpha} - e^{-(n+1)^\alpha}\right) > 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

3) $e^{-(n+1)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(e^{-n^\alpha} - e^{-(n+1)^\alpha}\right)$ donc $C_\alpha e^{-(n+1)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(C_\alpha\left(e^{-n^\alpha} - e^{-(n+1)^\alpha}\right)\right)$.

Ainsi $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.

Alors d'après Q1 : $\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$ (nous avons déjà dit que la série de terme général v_n converge, non ?).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n}^{+\infty} v_k = \sum_{k=n}^{+\infty} C_\alpha e^{-(k+1)^\alpha} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} C_\alpha e^{-k^\alpha} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X_\alpha = k) = P(X_\alpha \geq n+1)$.

$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n}^{+\infty}\left(C_\alpha e^{-k^\alpha} - C_\alpha e^{-(k+1)^\alpha}\right) = \lim_{q\to+\infty}\left(\sum_{k=n}^{q} C_\alpha e^{-k^\alpha} - C_\alpha e^{-(k+1)^\alpha}\right) = \lim_{q\to+\infty}\left[C_\alpha e^{-n^\alpha} - C_\alpha e^{-(q+1)^\alpha}\right] = C_\alpha e^{-n^\alpha}$

donc $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = P(X_\alpha = n)$.

Alors $\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$ donne : $\underline{\underline{P(X_\alpha \geq n+1) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(P(X_\alpha = n)\right)}}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que $P(X_\alpha \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} C_\alpha e^{-k^\alpha} > 0$ donc $P(X_\alpha \geq n) \neq 0$.

$P_{\{X_\alpha \geq n\}}(X_\alpha \geq n+1) = \dfrac{P(\{X_\alpha \geq n\} \cap \{X_\alpha \geq n+1\})}{P(X_\alpha \geq n)} = \dfrac{P(X_\alpha \geq n+1)}{P(X_\alpha \geq n)} = \dfrac{P(X_\alpha \geq n+1)}{P(X_\alpha \geq n+1) + P(X_\alpha = n)}$.

Alors $P_{\{X_\alpha \geq n\}}(X_\alpha \geq n+1) = \dfrac{\dfrac{P(X_\alpha \geq n+1)}{P(X_\alpha = n)}}{\dfrac{P(X_\alpha \geq n+1)}{P(X_\alpha = n)} + 1}$ car $P(X_\alpha = n) = C_\alpha e^{-n^\alpha} \neq 0$.

Or $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{P(X_\alpha \geq n+1)}{P(X_\alpha = n)} = 0$ car $P(X_\alpha \geq n+1) \underset{n\to+\infty}{=} o(P(X_\alpha = n))$ donc $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} P_{\{X_\alpha \geq n\}}(X_\alpha \geq n+1) = 0}}$.

(Q4) a) $e^{(n+1)^\alpha}(e^{-n^\alpha}-e^{-(n+1)^\alpha}) = e^{(n+1)^\alpha-n^\alpha}-1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

$(n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right] \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} n^\alpha\times\alpha\times\frac{1}{n} = \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$ car $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{n}=0$.

Ainsi $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}((n+1)^\alpha-n^\alpha) = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}\right) = 0$ car $1-\alpha>0$ puisque $\alpha<1$.

donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left[e^{(n+1)^\alpha}(e^{-n^\alpha}-e^{-(n+1)^\alpha})\right] = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}(e^{(n+1)^\alpha-n^\alpha}-1) = e^0-1 = 0$.

b) Par ~~conséquent~~ $e^{-n^\alpha}-e^{-(n+1)^\alpha} \underset{n\mapsto+\infty}{=} o(e^{-(n+1)^\alpha})$.

Pour ici $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n = \begin{cases} e^{-n^\alpha}-e^{-(n+1)^\alpha} & \text{si } n\in\mathbb{N}^* \\ 432 & \text{si } n=0\end{cases}$ et $u_n = e^{-(n+1)^\alpha}$.

1) $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$.

2) $v_0 = 432>0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = e^{-n^\alpha}-e^{-(n+1)^\alpha}>0$ donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n>0$.

$-n^\alpha > -(n+1)^\alpha$ car $\alpha>0$

3) la série de terme général u_n converge ($\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = e^{-(n+1)^\alpha}$).

(Q5) donc alors $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k \underset{n\mapsto+\infty}{=} o\left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$ et avant tout la convergence de la série de terme général v_n...

$\sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k = \sum\limits_{k=n}^{+\infty}(e^{-k^\alpha}-e^{-(k+1)^\alpha}) = e^{-n^\alpha}$ comme nous l'avons déjà vu ... ou presque.

donc $e^{-n^\alpha} \underset{n\mapsto+\infty}{=} o\left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} e^{-(k+1)^\alpha}\right)$ donc $e^{-n^\alpha} \underset{n\mapsto+\infty}{=} o\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k^\alpha}\right)$.

Alors $P(X_\alpha=n) = c_\alpha e^{-n^\alpha} \underset{n\mapsto+\infty}{=} o\left(c_\alpha\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k^\alpha}\right)$.

$P(X_\alpha=n) \underset{n\mapsto+\infty}{=} o\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} P(X_\alpha=k)\right)$. donc $P(X_\alpha=n) \underset{n\mapsto+\infty}{=} o(P(X_\alpha\geqslant n+1))$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P_{(X_\alpha\geqslant n)}(X_\alpha\geqslant n+1) = \dfrac{P((X_\alpha\geqslant n)\cap(X_\alpha\geqslant n+1))}{P(X_\alpha\geqslant n)} = \dfrac{P(X_\alpha\geqslant n+1)}{P(X_\alpha\geqslant n)} = \dfrac{P(X_\alpha\geqslant n+1)}{P(X_\alpha=n)+P(X_\alpha\geqslant n+1)}$.

$P(X_\alpha\geqslant n)\neq 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{\{X_\alpha \geq n\}}(X_\alpha \geq n+1) = \frac{1}{\dfrac{P(X_\alpha = n)}{P(X_\alpha \geq n+1)} + 1} \qquad (P(X_\alpha \geq n+1) \neq 0)$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{P(X_\alpha = n)}{P(X_\alpha \geq n+1)} = 0$ car $P(X_\alpha = n) \underset{n \to +\infty}{=} o(P(X_\alpha \geq n+1))$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} P_{\{X_\alpha \geq n\}}(X_\alpha \geq n+1) = 1$.

R.

Question 9 HEC 2012-9-S33 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit D une matrice définie par : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^3 - 2M = D$.

Question de cours. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. Rappeler la signification de la relation : $v_n = o(u_n)$.

Montrer que si $v_n = o(u_n)$ et si la série de terme général u_n est convergente, la série de terme général v_n l'est et que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} v_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ telle que $M^3 - 2M = D$.

Alors $MD = M(M^3-2M) = M^4 - 2M^2 = (M^3-2M)M = DM$. M et D commutent.

Alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -a & 4b \\ -c & 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 4c & 4d \end{pmatrix}$; $\begin{cases} 4b = -b \\ -c = 4c \end{cases}$; $b = c = 0$.

Donc si $M \in M_2(\mathbb{R})$ et si $M^3 - 2M = D$, M est diagonale. Cherchons donc les matrices diagonales solution du problème. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Posons $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

$\Delta^3 - 2\Delta = D \iff \begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 0 & \beta^3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha^3 - 2\alpha = -1 \\ \beta^3 - 2\beta = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha^3 - 2\alpha + 1 = 0 \\ \beta^3 - 2\beta - 4 = 0. \end{cases}$

1 (resp. 2) est un zéro de $P = X^3 - 2X + 1$ (resp. $Q = X^3 - 2X - 4$).

$P = (X-1)(X^2 + X - 1) = (X-1)\left[\left(X+\frac12\right)^2 - \frac54\right] = (X-1)\left(X + \frac12 + \frac{\sqrt5}{2}\right)\left(X + \frac12 - \frac{\sqrt5}{2}\right)$.

$Q = (X-2)(X^2 + 2X + 2) = (X-2)\left((X+1)^2 + 1\right)$.

Les racines réelles de P sont : 1, $-\frac12 - \frac{\sqrt5}{2}$, $-\frac12 + \frac{\sqrt5}{2}$. 2 est la seule racine réelle de Q.

Ainsi $\Delta^3 - 2\Delta = D \iff \begin{cases} \alpha \in \left\{1, -\frac12 - \frac{\sqrt5}{2}, -\frac12 + \frac{\sqrt5}{2}\right\} \\ \beta = 2 \end{cases}$

<u>L'équation $M \in M_2(\mathbb{R})$ et $M^3 - 2M = D$ admet trois solutions :</u>

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt5}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt5}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.