HEC 2012 S34

Exercice principal S34

1. Question de cours : Donner deux conditions suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans les deux cas, préciser les propriétés des sous-espaces propres.

Dans tout l'exercice, on associe à tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la matrice-colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On considère des réels a, b et c strictement positifs et la matrice $A = \begin{pmatrix} -b & b & a \\ b & -c & c \\ a & c & -a \end{pmatrix}$.

2. Montrer que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, à valeurs réelles, telle que $\varphi(u, v) = {}^tUAV$ est une forme bilinéaire symétrique.

3.a) Soit $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Déterminer les signes de $\varphi(u, u)$ et $\varphi(v, v)$ respectivement. L'application φ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

b) Montrer que A admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative. (on ne cherchera pas à les calculer)

4. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x, y, z) = x\,e^y + y\,e^z + z\,e^x$.

a) Montrer qu'un point critique $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ de f vérifie les conditions : $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} = -1$, $\overline{x} < 0$, $\overline{y} < 0$ et $\overline{z} < 0$. Donner un point critique de f.

b) Justifier l'existence du développement limité à l'ordre 2 de f en un point critique, et écrire ce développement.

c) La fonction f admet-elle un extremum local ?

Exercice sans préparation S34

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1.a) Montrer que pour tout entier $n > \lambda - 1$, on a : $P(X \geqslant n) \leqslant P(X = n) \times \dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$.

b) En déduire que $P(X \geqslant n) \underset{n \to +\infty}{\sim} P(X = n)$.

2. Montrer que $P(X > n) = o\big(P(X = n)\big)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

HEC 2012 S 34 Correction de l'exercice principal

Q1 $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. M est diagonalisable

$\Updownarrow$ M est semblable à une matrice diagonale

$\Updownarrow$ Il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M

$\Updownarrow$

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\lambda \in Sp\, M} SEP(M,\lambda)$$

$\Updownarrow$

$$n = \sum_{\lambda \in Sp\, M} \dim SEP(M,\lambda)$$

$\Updownarrow$ L'endomorphisme canoniquement associé à M est diagonalisable.

C'est bon, non ?!

Q2

- <u>φ est une application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$</u>
- Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et soit U (resp. V) la matrice de u (resp. v) dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

$$\varphi(u,v) = {}^tUAV = \langle U, AV\rangle = \langle AV, U\rangle = {}^t(AV)U = {}^tV\,{}^tA\,U \overset{A \text{ est symétrique}}{=} {}^tVAU = \varphi(v,u).$$

$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = \varphi(v,u)$ donc <u>φ est symétrique</u>.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient u, v, w trois éléments de $\mathbb{R}^3$ de matrices respectives U, V, W dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. $\lambda V + W$ est la matrice de $\lambda v + w$ dans cette base.

$$\varphi(u, \lambda v + w) = {}^tUA(\lambda V + W) = \lambda\, {}^tUAV + {}^tUAW = \lambda \varphi(u,v) + \varphi(u,w).$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (u,v,w) \in (\mathbb{R}^3)^3$, $\varphi(u, \lambda v + w) = \lambda \varphi(u,v) + \varphi(u,w)$.

Ainsi φ est linéaire à droite. Étant symétrique elle est alors linéaire à gauche.
<u>φ est donc bilinéaire</u>.

Ceci achève de montrer que <u>φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$</u>.

Q3 a)

$$\varphi(u,u) = (1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} -b & b & a \\ b & -c & c \\ a & c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} -b \\ b \\ a \end{pmatrix} = -b.$$ Alors $\underline{\underline{\varphi(u,u) < 0}}$.

$$\varphi(v,v) = (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} -b & b & a \\ b & -c & c \\ a & c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a+b+c.$$ $\underline{\underline{\varphi(v,v) > 0}}$

$u \in \mathbb{R}^3$ et $\varphi(u,u) < 0$ donc φ n'est pas un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

b) • Supposons que A n'admette que des valeurs propres positives ou nulles.

$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A est symétrique donc A est diagonalisable. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2 et α_3. $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ et $\alpha_3 \geq 0$. Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $X = x X_1 + y X_2 + z X_3$. $AX = x A X_1 + y A X_2 + z A X_3 = x \alpha_1 X_1 + y \alpha_2 X_2 + z \alpha_3 X_3$.

Comme (X_1, X_2, X_3) est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: $\langle X, AX \rangle = x(x\alpha_1) + y(y\alpha_2) + z(z\alpha_3)$.

$\langle X, AX \rangle = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 z^2 \geq 0$ $(\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0)$.

Ainsi $\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX A X = \langle X, AX \rangle \geq 0$ ← En fait c'est du cours ou presque...

Or nous avons vu que pour $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: ${}^tVAV < 0$.

Ainsi les valeurs propres de A ne sont pas toutes positives ou nulles. A possède une valeur propre strictement négative.

ou l'on change A en $-A$!

• Supposons que A n'admette que des valeurs propres négatives ou nulles.

On montre de même (ou on utilise le cours) que $\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \leq 0$.

Or si $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ${}^tVAV > 0$!! Ainsi les valeurs propres de A ne sont pas toutes négatives ou nulles. A possède une valeur propre strictement

A admet au moins une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative.

Q4 a) Posons $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $p(x,y,z) = x$, $q(x,y,z) = y$ et $r(x,y,z) = z$.

$f = pe^q + qe^r + re^p$. Soyons prévoyants et montrons que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$.

p, q, r sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$ car ce sont des fonctions polynômiales.

Comme $\exp$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Par composition e^p, e^q, e^r sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$.

Par sommes et produit f est de classe $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R}^3$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$!

$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=e^y+ze^x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=xe^y+e^z$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=ye^z+e^x$.

Soit $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ un point critique de f.

$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\frac{\partial f}{\partial z}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=0$. $\begin{cases} e^{\bar{y}}+\bar{z}e^{\bar{x}}=0\\ \bar{x}e^{\bar{y}}+e^{\bar{z}}=0\\ \bar{y}e^{\bar{z}}+e^{\bar{x}}=0\end{cases}$. $\begin{cases} \bar{z}=-e^{\bar{y}-\bar{x}}\\ \bar{x}=-e^{\bar{z}-\bar{y}}\\ \bar{y}=-e^{\bar{x}-\bar{z}}\end{cases}$.

Alors $\bar{x}<0$, $\bar{y}<0$ et $\bar{z}<0$

De plus $\bar{x}\bar{y}\bar{z}=-e^{\bar{z}-\bar{y}+\bar{x}-\bar{z}+\bar{y}-\bar{x}}=-e^0=-1$.

Si $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ est un point critique de f : $\bar{x}<0,\bar{y}<0,\bar{z}<0$ et $\bar{x}\bar{y}\bar{z}=-1$.

Soit $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ un élément de $\mathbb{R}^3$. $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ est un point critique de f si et seulement si :

$\bar{z}=-e^{\bar{y}-\bar{x}}$, $\bar{x}=-e^{\bar{z}-\bar{y}}$ et $\bar{y}=-e^{\bar{x}-\bar{z}}$.

Il est clair que si l'on pose $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=-1$ ces trois égalités sont vérifiées.

Ainsi $(-1,-1,-1)$ est un point critique de f.

b) Nous avons vu que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ donc f admet un développement limité à l'ordre 2 en tout point de $\mathbb{R}^3$. Soit $t=(x,y,z)$ un élément de $\mathbb{R}^3$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(t)=e^y+ze^x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(t)=xe^y+e^z$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(t)=ye^z+e^x$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t)=ze^x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t)=xe^y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(t)=ye^z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(t)=e^y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(t)=e^x$ et

$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(t)=e^z$. Alors $\nabla^2 f(t)=\begin{pmatrix} ze^x & e^y & e^x\\ e^y & xe^y & e^z\\ e^x & e^z & ye^z\end{pmatrix}$. Notons q_t la forme quadratique associée à la Hessienne de f en t. Le développement limité de f à l'ordre 2 en t est

$$f(t+h)\underset{h\to 0_{\mathbb{R}^3}}{=}f(t)+\langle\nabla f(t),h\rangle+\frac{1}{2}q_t(h)+o(\|h\|^2).$$

Si t est un point critique de f le développement limité à l'ordre 2 de f en t devient $f(t+h)\underset{h\to 0_{\mathbb{R}^3}}{=}f(t)+\frac{1}{2}q_t(h)+o(\|h\|^2)$

c) soit $t=(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ un point critique de f. $\bar{z}e^{\bar{x}}=-e^{\bar{y}}$, $\bar{x}e^{\bar{y}}=-e^{\bar{z}}$ et $\bar{y}e^{\bar{z}}=-e^{\bar{x}}$.

Alors $\nabla^2 f(t)=\begin{pmatrix} \bar{z}e^{\bar{x}} & e^{\bar{y}} & e^{\bar{x}} \\ e^{\bar{y}} & \bar{x}e^{\bar{y}} & e^{\bar{z}} \\ e^{\bar{x}} & e^{\bar{z}} & \bar{y}e^{\bar{z}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -e^{\bar{y}} & e^{\bar{y}} & e^{\bar{x}} \\ e^{\bar{y}} & -e^{\bar{z}} & e^{\bar{z}} \\ e^{\bar{x}} & e^{\bar{z}} & -e^{\bar{x}} \end{pmatrix}$.

Posons $a'=e^{\bar{x}}$, $b'=e^{\bar{y}}$, $c'=e^{\bar{z}}$.

Alors $a'>0, b'>0, c'>0$ et $\nabla^2 f(t)=\begin{pmatrix} -b' & b' & a' \\ b' & -c' & c' \\ a' & c' & -a' \end{pmatrix}$

Q3 b) permet de dire que $\nabla^2 f(t)$ admet au moins une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative.

(*) Ainsi f n'a pas d'extremum local et a fortiori global en t.

Or f étant de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$, si f admet un extremum local en un point de $\mathbb{R}^3$ ce point est un point critique de f.

Ainsi f n'a pas d'extremum local.

Remarque.. On peut considérer cette déduction comme n'étant pas du programme ... Alors apportons une preuve.

$t=(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ est toujours un point critique et la hessienne $\nabla^2 f(t)$ de f en t admet une valeur propre strictement positive α_1 et une valeur propre strictement négative α_2.

Soit U_1 (resp. U_2) un vecteur propre de $\nabla^2 f(t)$ associé à la valeur propre α_1 (resp. α_2).

Soit u_1 (resp. u_2) l'élément de $\mathbb{R}^3$ de matrice U_1 (resp. U_2) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $i\in[\![1,2]\!]$! $q_t(u_i)={}^tU_i\nabla^2 f(t)U_i={}^tU_i(\alpha_iU_i)=\alpha_i\,{}^tU_iU_i=\alpha_i\|U_i\|^2$.

Notons aussi que $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $q_t(\lambda u_i)={}^t(\lambda U_i)\nabla^2 f(t)(\lambda U_i)=\lambda^2\,{}^tU_i\nabla^2 f(t)U_i=\lambda^2 q_t(u_i)=\lambda^2\alpha_i\|U_i\|^2$

$f(t+h)\underset{h\mapsto 0_{\mathbb{R}^3}}{=}f(t)+\frac{1}{2}q_t(h)+o(\|h\|^2)$.

Alors $f(t+\lambda u_i)\underset{\lambda\mapsto 0}{=}f(t)+\frac{1}{2}q_t(\lambda u_i)+o(\|\lambda u_i\|^2)$. $f(t+\lambda u_i)\underset{\lambda\mapsto 0}{=}f(t)+\frac{\alpha_i\|U_i\|^2}{2}\lambda^2+o(\|u_i\|^2\lambda^2)$

on peut aussi écrire $\|u_i\|^2$

$\|U_i\|^2=\|u_i\|^2$

Ceci peut encore s'écrire $f(t+\lambda u_i)-f(t) \underset{\lambda \mapsto 0}{=} \frac{\alpha_i \|u_i\|^2}{2}\lambda^2 + o(\lambda^2)$.

Or $\frac{\alpha_i \|u_i\|^2}{2} \neq 0$ donc $f(t+\lambda u_i)-f(t) \underset{\lambda \mapsto 0}{\sim} \frac{\alpha_i \|u_i\|^2}{2}\lambda^2$.

Alors $\lim\limits_{\lambda \mapsto 0} \frac{f(t+\lambda u_i)-f(t)}{\frac{\alpha_i \|u_i\|^2}{2}\lambda^2} = 1$.

$\exists \eta_i \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, |\lambda| < \eta_i \Rightarrow \frac{f(t+\lambda u_i)-f(t)}{\frac{\alpha_i \|u_i\|^2}{2}\lambda^2} \geq \frac{1}{2}$. arbitraire. on aurait pu prendre n'importe quel réel de l'intervalle $]0,1[$.

Rappelons que $\alpha_1 > 0$, α_2 0, $\|u_1\|^2 > 0$ et $\|u_2\|^2 > 0$.

Alors $\forall \lambda \in]-\eta_1, \eta_1[- \{0\}$, $f(t+\lambda u_1)-f(t) \geq \frac{1}{2}\frac{\alpha_1 \|u_1\|^2}{2}\lambda^2 > 0$.

$\forall \lambda \in]-\eta_2, \eta_2[- \{0\}$, $f(t+\lambda u_2)-f(t) \leq \frac{1}{2}\frac{\alpha_2 \|u_2\|^2}{2}\lambda^2 < 0$

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. $\forall t \in]-\eta, \eta[- \{0\}$, $f(t+\lambda u_1) > f(t)$ et $f(t+\lambda u_2) < f(t)$.

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\lambda_1 = \min\left(\frac{\eta}{2}, \frac{r}{2\|u_1\|}\right)$ et $\lambda_2 = \min\left(\frac{\eta}{2}, \frac{r}{2\|u_2\|}\right)$.

λ_1 et λ_2 sont deux éléments de $]-\eta, \eta[- \{0\}$. Alors $f(t+\lambda u_1) > f(t)$ et $f(t+\lambda u_2) < f(t)$

De plus $\|t+\lambda_1 u_1 - t\| = \|\lambda_1 u_1\| = |\lambda_1|\,\|u_1\| = \lambda_1 \|u_1\| \leq \frac{r}{2\|u_1\|}\|u_1\| = \frac{r}{2} < r$.

De même $\|t+\lambda_2 u_2 - t\| < r$.

Ainsi $t+\lambda_1 u_1$ et $t+\lambda_2 u_2$ sont deux éléments de la boule $B(t,r)$ tels que

$f(t+\lambda_1 u_1) > f(t)$ et $f(t+\lambda_2 u_2) < f(t)$.

Alors $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists t_1 \in B(t,r)$, $\exists t_2 \in B(t,r)$, $f(t_1) > f(t)$ et $f(t_2) < f(t)$.

Par conséquent f n'a pas d'extremum local en t.

R..

Question 10 **HEC 2012-10-S34** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit X une variable aléatoire défine sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

Q1. a) Montrer que pour tout entier n strictement supérieur à $\lambda - 1$, on a : $P(X \geqslant n) \leqslant P(X = n)\, \dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$.

b) En déduire que $P(X \geqslant n) \underset{n \to +\infty}{\sim} P(X = n)$.

Q2. Montrer que $P(X > n) = \mathrm{o}\big(P(X = n)\big)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Question de cours. *Donner deux conditions suffisantes de diagonalisibilité d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans les deux cas, préciser les propriétés des sous-espaces propres .*

Q1 a) Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que $n > \lambda - 1$.

$$P(X \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^{k-n} \times \frac{n!}{k!} = P(X=n) \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^{k-n} \frac{n!}{k!}.$$

Soit $k \in [\![n+1, +\infty [\![$, $\dfrac{n!}{k!} = \dfrac{1}{k(k-1)\cdots(n+1)} = \displaystyle\prod_{i=n+1}^{k} \frac{1}{i} \leqslant \prod_{i=n+1}^{k} \frac{1}{n+1} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{k-n}$.

Notons que $\forall k \in [\![n+1, +\infty [\![$, $\dfrac{n!}{k!} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^{k-n}}$ et $\lambda^{k-n} \geqslant 0$.

Donc $\forall k \in [\![n+1, +\infty [\![$, $\lambda^{k-n} \dfrac{n!}{k!} \leqslant \left(\dfrac{\lambda}{n+1}\right)^{k-n}$. Notons que ceci vaut encore pour $k=n$.

Alors $\forall k \in [\![n, +\infty [\![$, $\lambda^{k-n} \dfrac{n!}{k!} \leqslant \left(\dfrac{\lambda}{n+1}\right)^{k-n}$. Or $0 \leqslant \dfrac{\lambda}{n+1} \underset{n > \lambda - 1}{<} 1$ donc la série de terme général $u_i = \left(\dfrac{\lambda}{n+1}\right)^i$ converge.

Ainsi $P(X \geqslant n) = P(X=n) \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^{k-n} \frac{n!}{k!} \underset{P(X=n) \geqslant 0}{\leqslant} P(X=n) \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^{k-n} = P(X=n) \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^{i}$.

$$P(X \geqslant n) \leqslant P(X=n) \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n+1}} = P(X=n) \frac{n+1}{n+1-\lambda}.$$

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\quad n > \lambda - 1 \Rightarrow P(X \geqslant n) \leqslant P(X=n) \frac{n+1}{n+1-\lambda}.}}$$

b) Posons $n_0 = \mathrm{Ent}(\lambda)$. Alors $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n_0 \geqslant \mathrm{Ent}(\lambda) > \lambda - 1$.

Soit $n \in [\![n_0, +\infty [\![$. $n \geqslant n_0$ donc $n > \lambda - 1$.

Ainsi $P(X \geqslant n) \leqslant P(X=n) \dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$.

De plus $\{X=n\} \subset \{X \geqslant n\}$. Alors par croissance de P : $P(X=n) \leqslant P(X \geqslant n)$.

Finalement : $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $P(X=n) \leqslant P(X \geqslant n) \leqslant P(X=n) \dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$ et $P(X=n) > 0$.

Donc $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $1 \leqslant \dfrac{P(X \geqslant n)}{P(X=n)} \leqslant \dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{n+1}{n+1-\lambda} = 1$.

Alors, par encadrement, il vient $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{P(X \geqslant n)}{P(X=n)} = 1$. Donc $\underline{\underline{P(X \geqslant n) \underset{n \mapsto +\infty}{\sim} P(X=n)}}$.

Q2 $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{P(X > n)}{P(X=n)} = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{P(X \geqslant n) - P(X=n)}{P(X=n)} = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\dfrac{P(X \geqslant n)}{P(X=n)} - 1 \right) \overset{\downarrow}{=} 0$

Ainsi $\underline{\underline{P(X > n) \underset{n \mapsto +\infty}{=} o(P(X=n))}}$.