Exercice principal S36

1. Question de cours : Continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos(u_n) = \dfrac{n-1}{n}$ et $u_n \in]0, \pi/2]$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

b) Déterminer une constante réelle C telle que $u_n \sim \dfrac{C}{\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et exp la fonction exponentielle. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right)(1 - \Phi(x))$.

a) On pose pour tout $x > 0$: $\theta(x) = 1 - \Phi(x) - \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. Déterminer le signe de $\theta(x)$.

b) Calculer $f(0)$. Montrer que f est décroissante et bornée sur $\mathbb{R}^+$.

4.a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u_n}{x^2 + u_n^2}\, dx$ et calculer cette intégrale. En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u_n f(x)}{x^2 + u_n^2}\, dx$; on note I_n cette intégrale.

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $K_n = \displaystyle\int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \frac{u_n(f(x) - f(0))}{x^2 + u_n^2}\, dx$.

Montrer que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et a pour limite 0.

c) En déduire la convergence et la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice sans préparation S36

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Établir l'existence d'un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0$.

2. On suppose que la matrice A est inversible. Montrer que A^{-1} s'écrit comme un polynôme en A.

R.

HEC 2012 S36 Correction de l'exercice principal

(Q1) J est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. $a \in J$. f est une application de J dans $\mathbb{R}$.

f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

donc f est continue en a si et seulement si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in J, |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

(Q2) soit $\hat{\varphi}$ l'application de $]0, \frac{\pi}{2}]$ dans $[0,1[$ définie par $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}], \hat{\varphi}(x) = \cos x$.

$\underbrace{\text{dans } [0,1[}_{\text{si } x \in]0, \frac{\pi}{2}],\ \cos x \in [0,1[}$

- $\hat{\varphi}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$
- $\hat{\varphi}$ est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\hat{\varphi}'(x) = -\sin x < 0$. $\hat{\varphi}$ est strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}]$
- $\lim\limits_{x \to 0} \hat{\varphi}(x) = \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ et $\hat{\varphi}(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Ainsi $\hat{\varphi}$ est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0,1[$.

Alors $\forall y \in [0,1[, \exists! x \in]0, \frac{\pi}{2}], \hat{\varphi}(x) = y$.

Donc $\forall y \in [0,1[, \exists! x \in]0, \frac{\pi}{2}], \cos x = y$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! u_n \in]0, \frac{\pi}{2}], \cos u_n = \frac{n-1}{n}$ (car $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n-1}{n} \in [0,1[$).

a) $\boxed{V1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \hat{\varphi}(u_n) = \frac{n-1}{n}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \hat{\varphi}^{-1}(\frac{n-1}{n})$.

$\lim\limits_{x \to 0} \hat{\varphi}(x) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 1} \hat{\varphi}^{-1}(x) = 0$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n} = 1$:

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \hat{\varphi}^{-1}\left(\frac{n-1}{n}\right) = 0$.

Alors la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge et a pour limite 0.

$\boxed{V2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$. donc $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

$\hat{\varphi}$ est décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\hat{\varphi}^{-1}$ est décroissante sur $[0,1[$.

Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\hat{\varphi}^{-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente.

Soit ℓ sa limite. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\ell\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et cos est continue en ℓ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos u_n=\cos\ell$.

Ainsi $\cos\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}\cos u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n}=1$. Alors $\cos\ell=1$ et $\ell\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\ell=0$.

Par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite 0.

b) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $1-\cos u_n=1-\frac{n-1}{n}=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ donc $1-\cos u_n\sim\frac{u_n^2}{2}$. Alors $\frac{u_n^2}{2}\sim\frac{1}{n}$. $u_n^2\sim\frac{2}{n}$.

donc $|u_n|\sim\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$. De plus $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\geqslant0$.

Par conséquent $u_n\sim\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$. $C=\sqrt{2}$ répond à la question.

Q3 Pour faciliter les écritures nous posons : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

Rappelons que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\Phi'=\varphi$.

Notons aussi que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(x)=-x\varphi(x)$.

a) $\forall x\in\left]0,+\infty\right[$, $\theta(x)=1-\Phi(x)-\frac{1}{x}\varphi(x)$.

Φ, $x\mapsto\frac{1}{x}$ et φ sont dérivables sur $\left]0,+\infty\right[$ donc θ est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$.

$\forall x\in\left]0,+\infty\right[$, $\theta'(x)=0-\varphi(x)+\frac{1}{x^2}\varphi(x)-\frac{1}{x}(-x\varphi(x))=\frac{1}{x^2}\varphi(x)=\frac{1}{x^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

donc $\forall x\in\left]0,+\infty\right[$, $\theta'(x)>0$.

θ est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right)=0$.

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=1-1-0\times0=0$. Comme θ est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$,

θ est strictement négative sur $\left]0,+\infty\right[$.

b) Rappelons que $\phi(0)=\frac{1}{2}$. Alors $f(0)=e^{0^2/2}(1-\phi(0)) = 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. $f(0)=\frac{1}{2}$.

$x\mapsto e^{x^2/2}$ et $x\mapsto 1-\phi(x)$ sont dérivables sur $[0,+\infty[$ donc f est dérivable sur $[0,+\infty[$.

$\forall x\in[0,+\infty[,\ f'(x)=xe^{x^2/2}(1-\phi(x))+e^{x^2/2}(-\varphi(x))$.

$f'(0)=-\varphi(0)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}<0$.

$\left\{\begin{array}{l} xe^{x^2/2}>0 \\ \theta(x)<0 \end{array}\right.$

$\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=xe^{x^2/2}\left[1-\phi(x)-\frac{1}{x}\varphi(x)\right]=xe^{x^2/2}\theta(x)<0$.

donc $\forall x\in[0,+\infty[,\ f'(x)<0$. f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

De plus $f(0)=\frac{1}{2}$ donc $\forall x\in[0,+\infty[,\ f(x)\leq\frac{1}{2}$.

$\forall x\in[0,+\infty[,\ e^{x^2/2}>0$ et $1-\phi(x)\geq 0$. Donc $\forall x\in[0,+\infty[,\ f(x)\geq 0$.

et même >0 !
ϕ est une fonction de répartition.

Alors $\forall x\in[0,+\infty[,\ 0\leq f(x)\leq\frac{1}{2}$.

Ainsi f est bornée sur $[0,+\infty[$

Q4 a) arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ \arctan' x=\frac{1}{1+x^2}$.

soit $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ \psi_\alpha(x)=\arctan\frac{x}{\alpha}$. Alors ψ_α est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x\in\mathbb{R},\ \psi'_\alpha(x)=\frac{1}{\alpha}\arctan'\frac{x}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\ \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}=\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$.

Alors ψ_α est une primitive de $x\mapsto\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$ sur $\mathbb{R}$. Ce n'est pas un scoop !

soit $n\in\mathbb{N}^*$. $x\mapsto\frac{u_n}{x^2+u_n^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $u_n\in]0,\frac{\pi}{2}]$

Alors $\forall A\in]0,+\infty[,\ \int_0^A\frac{u_n}{x^2+u_n^2}dx=\left[\arctan\frac{x}{u_n}\right]_0^A=\arctan\frac{A}{u_n}$.

$\lim_{A\to+\infty}\frac{A}{u_n}=+\infty$ car $u_n>0$ donc $\lim_{A\to+\infty}\arctan\frac{A}{u_n}=\frac{\pi}{2}$. $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{u_n}{x^2+u_n^2}dx=\frac{\pi}{2}$.

Ainsi $\int_0^{+\infty}\frac{u_n}{x^2+u_n^2}dx$ existe et vaut $\frac{\pi}{2}$.

$x \mapsto \dfrac{u_n}{x^2+u_n^2}$ et f sont continues sur $[0,+\infty[$. Ainsi $g_n : x \mapsto \dfrac{u_n f(x)}{x^2+u_n^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \leq 1$ (!) et $\dfrac{u_n}{x^2+u_n^2} \geq 0$.

Alors 1) $\forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leq g_n(x) = \dfrac{u_n}{x^2+u_n^2} \times f(x) \leq \dfrac{u_n}{x^2+u_n^2}$.

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u_n}{x^2+u_n^2}\,dx$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx$ converge.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u_n f(x)}{x^2+u_n^2}\,dx$ converge.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u_n f(x)}{x^2+u_n^2}\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u_n}{x^2+u_n^2}\,dx$ convergent.

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2}\,dx$ converge comme combinaison linéaire de deux intégrales convergentes.

Alors $\displaystyle\int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2}\,dx$ converge. Donc K_n est bien défini.

$\forall x \in [\sqrt{u_n},+\infty[,\ |f(x)-f(0)| \leq |f(x)|+|f(0)| = |f(x)|+\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ et $\dfrac{u_n}{x^2+u_n^2} \geq 0$.

Donc $\forall x \in [\sqrt{u_n},+\infty[,\ \left|\dfrac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2}\right| = \left|\dfrac{u_n}{x^2+u_n^2}\right| |f(x)-f(0)| = \dfrac{u_n}{x^2+u_n^2}|f(x)-f(0)| \leq \dfrac{u_n}{x^2+u_n^2}$.

La convergence de $\displaystyle\int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \frac{u_n}{x^2+u_n^2}\,dx$ et les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \left|\frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2}\right| dx$ converge.

De plus $\displaystyle\int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \left|\frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2}\right| dx \leq \int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \frac{u_n}{x^2+u_n^2}\,dx$.

Alors $\int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2} dx$ est absolument convergente ce qui permet d'écrire :

$|K_n| = \left| \int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2} dx \right| \leq \int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \left| \frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2} \right| dx$. Avec ce que nous avons vu plus haut nous obtenons $|K_n| \leq \int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \frac{u_n}{x^2+u_n^2} dx$.

Soit $A \in]\sqrt{u_n}, +\infty[$. $\int_{\sqrt{u_n}}^{A} \frac{u_n}{x^2+u_n^2} dx = \left[\arctan \frac{x}{u_n} \right]_{\sqrt{u_n}}^{A} = \arctan \frac{A}{u_n} - \arctan \frac{1}{\sqrt{u_n}}$.

$\lim_{A \to +\infty} \arctan \frac{A}{u_n} = \frac{\pi}{2}$ car $\lim_{A \to +\infty} \frac{A}{u_n} = +\infty$ $(u_n > 0)$. Ainsi $\int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \frac{u_n}{x^2+u_n^2} dx = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{\sqrt{u_n}}$.

Finalement $\underline{0 \leq |K_n| \leq \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{\sqrt{u_n}}}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{u_n} > 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{u_n} = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{u_n}} = +\infty$. Ainsi $\lim_{n \to +\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt{u_n}} = \frac{\pi}{2}$.

Alors $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{\sqrt{u_n}} \right) = 0$. Il en résulte alors par encadrement $\underline{\underline{\lim_{n \to +\infty} K_n = 0}}$.

<u>$(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite 0.</u>

c) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, posons $L_n = \int_0^{\sqrt{u_n}} \frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2} dx$ et $H_n = \int_0^{+\infty} \frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2} dx$

Nous avons vu plus haut que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n existe.

Mieux nous pouvons dire que $H_n = \int_0^{+\infty} \frac{u_n f(x)}{x^2+u_n^2} dx - f(0) \int_0^{+\infty} \frac{u_n}{x^2+u_n^2} dx$ car toutes ~~les intégrales~~ convergent, et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = I_n - f(0) \int_0^{+\infty} \frac{u_n}{x^2+u_n^2} dx = I_n - f(0) \frac{\pi}{2}$.

Nous allons montrer que $\lim_{n \to +\infty} H_n = 0$ ce qui donnera $\lim_{n \to +\infty} I_n = f(0) \frac{\pi}{2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = L_n + K_n$ et nous avons montré que $\lim_{n \to +\infty} K_n = 0$.

Il ne reste donc plus qu'à montrer que $\lim_{n \to +\infty} L_n = 0$. Nous allons le faire en utilisant la définition.

$x \mapsto |f(x)-f(0)|$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc pour tout $\alpha \in [0,+\infty[$, $\max_{x\in[0,\alpha]} |f(x)-f(0)|$ existe

(une fonction continue sur un segment y possède un maximum)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $|L_n| = \left|\int_0^{\sqrt{u_n}} \frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2} dx\right| \leq \int_0^{\sqrt{u_n}} \left|\frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2}\right| dx = \int_0^{\sqrt{u_n}} \frac{u_n}{x^2+u_n^2} |f(x)-f(0)| dx$.

donc $|L_n| \leq \max_{z\in[0,\sqrt{u_n}]} |f(z)-f(0)| \int_0^{\sqrt{u_n}} \frac{u_n}{x^2+u_n^2} dx \leq \max_{z\in[0,\sqrt{u_n}]} |f(z)-f(0)| \int_0^{+\infty} \frac{u_n}{x^2+u_n^2} dx$ car

cette dernière intégrale est convergente et $x \mapsto \frac{u_n}{x^2+u_n^2}$ est positive sur $[0,+\infty[$.

Finalement $|L_n| \leq \frac{\pi}{2} \max_{z\in[0,\sqrt{u_n}]} |f(z)-f(0)|$ Pour montrer que $\lim_{n\to+\infty} L_n = 0$ nous allons utiliser

par définition. Prenons ε quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$ et montrons qu'il existe p dans $\mathbb{N}^*$ tel que

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq p \Rightarrow |L_n| < \varepsilon$. f est continue en 0.

Ainsi $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall z \in \mathbb{R}^+$, $|z-0| < \alpha \Rightarrow |f(z)-f(0)| < \frac{2}{\pi}\varepsilon$.

$\forall x \in [0,\alpha[$, $\forall z \in [0,x]$, $|z-0| = z \leq x < \alpha$

donc $\forall x \in [0,\alpha[$, $\forall z \in [0,x]$, $|z-0| < \alpha$. $\forall x \in [0,\alpha[, \forall z \in [0,x], |f(z)-f(0)| < \frac{2}{\pi}\varepsilon$.

Alors $\forall x \in [0,\alpha[$, $\max_{z\in[0,x]} |f(z)-f(0)| < \frac{2}{\pi}\varepsilon$ ou $\frac{\pi}{2}\max_{z\in[0,x]} |f(z)-f(0)| < \varepsilon$.

Or $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = 0$. Alors $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq p \Rightarrow \sqrt{u_n} = |\sqrt{u_n} - 0| < \alpha$.

Alors $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $\sqrt{u_n} \in [0,\alpha[$. Ainsi $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $|L_n| \leq \frac{\pi}{2} \max_{z\in[0,\sqrt{u_n}]} |f(z)-f(0)| < \varepsilon$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq p \Rightarrow |L_n| < \varepsilon$.

Ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq p \Rightarrow |L_n| < \varepsilon$. donc $\lim_{n\to+\infty} L_n = 0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} H_n = \lim_{n\to+\infty} (L_n + K_n) = 0 + 0 = 0$.

donc $0 = \lim_{n\to+\infty} H_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2} dx = \lim_{n\to+\infty} \left[\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{u_n f(x)}{x^2+u_n^2}}_{I_n} - f(0)\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{u_n}{x^2+u_n^2} dx}_{=\pi/2}\right]$.

donc $\lim_{n\to+\infty} \left(I_n - f(0)\frac{\pi}{2}\right) = 0$. $\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{2} f(0) = \frac{\pi}{4}$.

R..

Question 11 HEC 2012-11-S36 $\boxed{\text{F 1}}$

n appartient à $\mathbb{N}^*$ et A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q1. Établir l'existence d'un polynôme non nul P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Q2. On suppose que la matrice A est inversible. Montrer que A^{-1} s'écrit comme un polynôme en A.

Question de cours. *Continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle.*

Q1 $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$ et $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ est une famille de n^2+1 éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Elle est donc liée.

$\exists (a_0, a_1, \dots, a_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2+1}$, $(a_0, a_1, \dots, a_{n^2}) \neq 0_{\mathbb{R}^{n^2+1}}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Posons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$. $P \in \mathbb{R}[X]$, $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

<u>Il existe un polynôme non nul P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.</u>

Q2 Supposons que A est inversible. $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$.

$\{k \in [\![0, n^2]\!] \mid a_k \neq 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$. Elle possède donc un plus petit élément que nous notons r (r est la valuation de P).

Alors $a_r \neq 0$ et $\displaystyle\sum_{k=r}^{n^2} a_k A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. En multipliant par $(A^{-1})^r$ on obtient $\displaystyle\sum_{k=r}^{n^2} a_k A^{k-r} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ (en clair : $a_r I_n + a_{r+1} A + \dots + a_{n^2} A^{n^2-r} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$).

Si $r = n^2$: $a_{n^2} A^0 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Donc $a_{n^2} I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Alors $a_{n^2} = 0$. $a_r = 0$.

Ainsi $a_r = 0$. Ce qui n'est pas. Par conséquent $r < n^2$.

Alors $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = a_r I_n + \displaystyle\sum_{k=r+1}^{n^2} a_k A^{k-r} = a_r I_n + A\left(\sum_{k=r+1}^{n^2} a_k A^{k-r-1}\right)$.

Ainsi $A\left(\displaystyle\sum_{k=r+1}^{n^2} \left(-\frac{a_k}{a_r}\right) A^{k-r-1}\right) = I_n$. En multipliant à gauche par A^{-1} on obtient : $A^{-1} = \displaystyle\sum_{k=r+1}^{n^2} \left(-\frac{a_k}{a_r}\right) A^{k-r-1}$.

Par conséquent <u>A^{-1} s'écrit comme un polynôme en A.</u>