Exercice principal S39

1. Question de cours : Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et E_0 le sous-ensemble de E constitué des fonctions continues s'annulant en 0.
Soit $t \in]0,1[$ et $\varphi_t : E_0 \longrightarrow E_0$ définie par : $\forall f \in E_0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_t(f)(x) = f(x) - f(tx)$.

2.a) Montrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de E et que φ_t est un endomorphisme de E_0.

b) Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire de E_0 dans E.

c) Montrer que l'endomorphisme φ_t est injectif.

3. Soit g une fonction de E_0 telle que : $\exists K > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |g(x) - g(y)| \leqslant K|x - y|$.

a) Soit $f \in E_0$ vérifiant $\varphi_t(f) = g$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} g(t^k x) + f(t^n x)$.

En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(t^k x)$.

b) Montrer que g admet un unique antécédent pour φ_t.

4. Trouver l'ensemble des fonctions $f \in E_0$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - 2f(tx) + f(t^2 x) = x$.

Exercice sans préparation S39

Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1,2\}, P(Y = 1) = P(Y = 2) = \frac{1}{2}$. On pose : $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z.

2. Quelle est la probabilité que Z prenne des valeurs paires ?

R.

HEC 2012 S.39 Correction de l'exercice principal.

(Q1) • E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. F et G sont deux sous-espaces vectoriels E.

• F et G sont supplémentaires dans E si $\forall x \in E, \exists! (y,z) \in F \times G, x = y+z$; autrement dit si tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

• F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $E = F+G$

(*) • Supposons $F \neq \{0_E\}$, et $G \neq \{0_E\}$. Soit $\mathcal{B}_F$ (resp. $\mathcal{B}_G$) une base de F (resp. G).

F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si "$\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$" est une base de E

(*) Ici pour être conforme au programme il est préférable de supposer que $\dim E < +\infty$

• Supposons que E est de dimension finie.

F et G sont supplémentaires si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

(Q2) a) • $E_0 \subset E$

• Soit 0_E la fonction nulle de E. $0_E(0) = 0$ donc $0_E \in E_0$. $E_0 \neq \emptyset$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(f,g) \in E_0^2$. $(\lambda f+g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda \times 0 + 0 = 0$; $\lambda f+g \in E_0$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (f,g) \in E_0^2, \lambda f+g \in E_0$.

Ceci suffit pour dire que <u>E_0 est un sous-espace vectoriel de E.</u>

* Soit f un élément de E_0. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto f(tx)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto tx$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi $x \mapsto f(x) - f(tx)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Alors $\varphi_t(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus $\varphi_t(f)(0) = f(0) - f(t \times 0) = 0$. Donc $\varphi_t(f) \in E_0$.

$\forall f \in E_0, \varphi_t(f) \in E_0$. <u>$\varphi_t$ est une application de E_0 dans E_0.</u>

* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(f,g) \in E_0^2$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_t(\lambda f+g)(x) = (\lambda f+g)(x) - (\lambda f+g)(tx) = \lambda(f(x) - f(tx)) + g(x) - g(tx) = \lambda \varphi_t(f)(x) + \varphi_t(g)(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_t(\lambda f+g)(x) = (\lambda \varphi_t(f) + \varphi_t(g))(x)$. Ainsi $\varphi_t(\lambda f+g) = \lambda \varphi_t(f) + \varphi_t(g)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (f,g) \in E_0^2, \varphi_t(\lambda f+g) = \lambda \varphi_t(f) + \varphi_t(g)$. <u>$\varphi_t$ est linéaire.</u>

Finalement <u>φ_t est un endomorphisme de E_0.</u>

b) Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = 1$. f_1 est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f_1 \in E$. Posons $E_1 = \mathrm{Vect}(f_1)$.

E_1 est un sous-espace vectoriel de E. Montrons que E_1 est un supplémentaire de E_0.

Notons que E_1 est l'ensemble des applications constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in E$. Montrons par analyse/synthèse que $\exists!\,(g,h) \in E_0 \times E_1$, $f = g + h$.

Analyse - Unicité. Supposons que $f = g + h$ avec $g \in E_0$ et $h \in E_1$.

$g(0) = 0$ et $\exists a \in \mathbb{R}$, $h = a f_1$. Alors $f(0) = g(0) + h(0) = 0 + a f_1(0) = a$. $a = f(0)$.

Alors $h = f(0) f_1$ et $g = f - f(0) f_1$. Ceci donne l'unicité du couple (g,h).

Synthèse - Existence. Posons $h = f(0) f_1$ et $g = f - f(0) f_1$.

→ $g + h = f - f(0) f_1 + f(0) f_1 = f$.

→ $g(0) = f(0) - f(0) f_1(0) = f(0) - f(0) \times 1 = 0$; $g \in E_0$.

→ $h = f(0) f_1$ donc $h \in \mathrm{Vect}(f_1)$; $h \in E_1$.

ceci montre l'unicité du couple (g,h).

Ainsi $\forall f \in E, \exists!\,(g,h) \in E_0 \times E_1$, $f = g + h$. E_0 et E_1 sont supplémentaires dans E.

Vect(f_1) est un supplémentaire de E_0 dans E.

ou $\{f \in E \mid \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a\}$ est un supplémentaire de E_0 dans E.

c) Montrons que $\mathrm{Ker}\,\varphi_t = \{0_{E_0}\}$. Soit $f \in \mathrm{Ker}\,\varphi_t$. $\varphi_t(f) = 0_{E_0}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $0 = \varphi_t(f)(x) = f(x) - f(tx)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(tx)$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(t^n x)$.

- C'est clair pour $n = 0$ car $t^0 = 1$.
- Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}$ et montrons-la pour $n+1$.

Rappelons que $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(y) = f(ty)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\underbrace{f(x) = f(t^n x)}_{\text{hypothèse de récurrence}} = f(t\,t^n x) = f(t^{n+1} x)$ et la récurrence s'achève.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(t^n x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{n \to +\infty} (t^n x) = 0$ car $t \in]0,1[$. Comme f est continue en 0 ; $\lim\limits_{n \to +\infty} f(t^n x) = f(0) \overset{f \in E_0}{=} 0$

la suite $(f(t^n x))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 0 et c'est la suite constante égale à $f(x)$.

Ainsi $f(x)=0$ et ceci pour tout $x\in\mathbb{R}$. Alors $f=0_{E_0}$.

ceci achève de montrer que $\operatorname{Ker}\varphi_t=\{0_{E_0}\}$. donc φ_t est injectif.

Q3) Si $f\in E_0$ et $\varphi_t(f)=g$. $\forall x\in\mathbb{R}$,

Soit $x\in\mathbb{R}$. $\forall y\in\mathbb{R}$, $f(y)-f(ty)=\varphi_t(f)(y)=g(y)$.

Alors $\forall k\in\mathbb{N}$, $f(t^k x)-f(t^{k+1}x)=g(t^k x)$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} g(t^k x)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(t^k x)-f(t^{k+1}x)\right)=f(t^0 x)-f(t^n x)=f(x)-f(t^n x)$

(*) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f(x)=\sum_{k=0}^{n-1} g(t^k x)+f(t^n x)$ et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. $\lim_{n\to+\infty}(t^n x)=0$ car $t\in]0,1[$. Comme f est continue et nulle en 0 :

$\lim_{n\to+\infty} f(t^n x)=f(0)=0$. Montrons alors que la série de terme général $g(t^k x)$ converge.

$g\in E_0$ et $\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2$, $|g(u)-g(v)|\leq K|u-v|$.

donc $\forall u\in\mathbb{R}$, $|g(u)|=|g(u)-g(0)|\leq K|u-0|=K|u|$.

Alors $\forall k\in\mathbb{N}$, $|g(t^k x)|\leq K|t^k x|=K|x|t^k$

$\forall k\in\mathbb{N}$, $0\leq|g(t^k x)|\leq K|x|t^k$. De plus la série de terme général t^k converge car

$|t|<1$ donc il en est de même pour la série de terme général $K|x|t^k$.

les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $|g(t^k x)|$ converge. Alors la série de terme général $g(t^k x)$ est absolument convergente donc convergente.

Alors en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (*) il vient $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} g(t^k x)$.

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, la série de terme général $g(t^k x)$ converge et $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} g(t^k x)$

b) Nous avons montré dans a) (sans utiliser $\varphi_t(f)=g$!) que pour tout x dans $\mathbb{R}$ la série de terme général $g(t^k x)$ converge.
Posons alors $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} g(t^k x)$. Montrons que $f\in E_0$ et que $\varphi_t(f)=g$.

- $f(0)=\sum_{k=0}^{+\infty} g(t^k\times 0)=\sum_{k=0}^{+\infty} g(0)=0$ car $g(0)=0$ puisque $g\in E_0$. $\underline{f(0)=0.}$

- Montrons la continuité de f en tout point de $\mathbb{R}$. Soit $a\in\mathbb{R}$. Montrons que f est continue au point a.

Soit $x\in\mathbb{R}$. $|f(x)-f(a)|=\left|\sum_{k=0}^{+\infty}(g(t^k x)-g(t^k a))\right|$.

$\forall k\in\mathbb{N},\ |g(t^k x)-g(t^k a)|\leq K\,|t^k x-t^k a|=K|x-a||t^k|=K|x-a|t^k$.

$\forall k\in\mathbb{N},\ 0\leq|g(t^k x)-g(t^k a)|\leq K|x-a|\,t^k$. De plus la série de terme général $K|x-a|t^k$ converge car la série de terme général t^k converge car $|t|<1$. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général $|g(t^k x)-g(t^k a)|$.

De plus $\sum_{k=0}^{+\infty}|g(t^k x)-g(t^k a)|\leq K|x-a|\sum_{k=0}^{+\infty} t^k=\frac{K}{1-t}|x-a|$.

La série de terme général $|g(t^k x)-g(t^k a)|$ converge donc la série de terme général $g(t^k x)-g(t^k a)$ est absolument convergente. Ceci permet d'écrire :

$$|f(x)-f(a)|=\left|\sum_{k=0}^{+\infty}(g(t^k x)-g(t^k a))\right|\leq\sum_{k=0}^{+\infty}|g(t^k x)-g(t^k a)|\leq\frac{K}{1-t}|x-a|.$$

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R},\ 0\leq|f(x)-f(a)|\leq\frac{K}{1-t}|x-a|$ et $\lim_{x\to a}\left(\frac{K}{1-t}|x-a|\right)=0$.

Alors par encadrement il vient $\lim_{x\mapsto a} f(x)=f(a)$, ce qui montre la continuité de f en a et ceci pour tout point a de $\mathbb{R}$.

$\underline{f\text{ est continue sur }\mathbb{R}.}$ Comme $f(0)=0$: $\underline{f\text{ appartient à }E_0.}$

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)-f(tx)=\sum_{k=0}^{+\infty} g(t^k x)-\sum_{k=0}^{+\infty} g(t^{k+1}x)=\sum_{k=0}^{+\infty} g(t^k x)-\sum_{k=1}^{+\infty} g(t^k x)=g(t^0 x)=g(x)$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi_t(f)(x)=g(x)$. $\underline{\varphi_t(f)=g.}$

g admet un antécédent par φ_t dans E_0 nécessairement unique car φ_t est injectif.

cet antécédent est la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(t^k x)$.

(Q4) **Remarque.** – Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x$. g est continue sur $\mathbb{R}$ et $g(0)=0$ donc $g \in E_0$

soit $f \in E_0$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x$

$\Updownarrow$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) - f(tx) - (f(tx) - f(t^2x)) = g(x)$

$\Updownarrow$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad \varphi_t(f)(x) - \varphi_t(f)(tx) = g(x).$

$\Updownarrow$

$\varphi_t(\varphi_t(f))(x) = g(x)$

$\Updownarrow$

$\varphi_t^2(f) = g.$

φ_t est injectif donc $\varphi_t^2 = \varphi_t \circ \varphi_t$ est aussi injectif. le problème a au plus une solution.

nous allons d'abord étudier l'équation $h \in E_0$ et $\varphi_t(h) = g$. si cette équation admet une solution (nécessairement unique) $\hat{h}$ nous étudierons l'équation $f \in E_0$ et $\varphi_t(f) = \hat{h}$.

Pour ne pas faire deux fois la même chose (ou presque) prenons $\lambda \in \mathbb{R}^*$, posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g_\lambda(x) = \lambda x$ remarquons que $g_\lambda \in E_0$ et étudions l'équation $h \in E_0$ et $\varphi_t(h) = g_\lambda$.

$g_\lambda \in E_0$ est clair car $x \mapsto \lambda x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0.

de plus $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |g_\lambda(x) - g_\lambda(y)| = |\lambda x - \lambda y| = |\lambda|\,|x-y| \overset{!!}{\leq} |\lambda|\,|x-y|.$

comme $|\lambda| > 0$ Q3 montre l'existence d'une unique application h_λ de E_0 telle que $\varphi_t(h_\lambda) = g_\lambda$. de plus $\forall x \in \mathbb{R},\ h_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_\lambda(t^k x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda(t^k x) = \lambda x \sum_{k=0}^{+\infty} t^k = \frac{\lambda}{1-t} x.$

donc $h_\lambda = g_{\lambda/1-t}$.

Ainsi $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, l'équation $h \in E_0$ et $\varphi_t(h) = g_\lambda$ admet une solution et une seule : $g_{\frac{\lambda}{1-t}}$.

Rappelons que nous avons posé $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x$. $g = g_1$!

Alors l'équation $h \in E_0$ et $\varphi_t(h) = g$ admet une solution et une seule : $g_{\frac{1}{1-t}}$.

Comme $\frac{1}{1-t} \in \mathbb{R}^*$, l'équation $f \in E_0$ et $\varphi_t(f) = g_{\frac{1}{1-t}}$ admet une solution et une seule : $g_{\frac{\frac{1}{1-t}}{1-t}}$ donc $g_{\frac{1}{(1-t)^2}}$.

Alors l'équation $f \in E_0$ et $\varphi_t^2(f) = g$ admet une solution et une seule : $g_{\frac{1}{(1-t)^2}}$.

Ainsi il existe une application f appartenant à E_0 et une seule telle que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(1-t)^2}x$.

Question 12 **HEC 2012-12-S39** $\boxed{\textbf{F 1}}$

Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de poisson de paramètre λ et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1, 2\}$, $P(Y = 1) = P(Y = 2) = \frac{1}{2}\cdot$ On pose $Z = XY$.

Q1. Déterminer la loi de Z.

Q2. Quelle est la probabilité que Z prenne des valeurs paires ?

Question de cours. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Q1 $Z(\Omega)=\mathbb{N}$. Soit $k\in\mathbb{N}$. $(\{Y=1\},\{Y=2\})$ est un système complet d'événements.

$P(Z=k)=P(\{Y=1\}\cap\{Z=k\})+P(\{Y=2\}\cap\{Z=k\})$ d'après la formule des probabilités totales

$P(Z=k)=P(\{Y=1\}\cap\{X=k\})+P(\{Y=2\}\cap\{X=\frac{k}{2}\})$. Ce qui donne par indépendance :

$P(Z=k)=P(Y=1)P(X=k)+P(Y=2)P(X=\frac{k}{2})=\frac{1}{2}\left[P(X=k)+P(X=\frac{k}{2})\right]$.

$\forall k\in\mathbb{N}$, $P(Z=k)=\frac{1}{2}\left[P(X=k)+P(X=\frac{k}{2})\right]$.

$P(X=\frac{2k+1}{2})=0$

Alors $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(Z=2k)=\frac{1}{2}\left[P(X=2k)+P(X=k)\right]$ et $P(Z=2k+1)=\frac{1}{2}P(X=2k+1)$.

$\forall k\in\mathbb{N}$, $P(Z=2k)=\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}+\frac{\lambda^{k}}{k!}\right]e^{-\lambda}$ et $P(Z=2k+1)=\frac{1}{2}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}e^{-\lambda}$.

Q2 Soit A l'événement Z prend une valeur paire. $A=\bigcup_{k=0}^{+\infty}\{Z=2k\}$

Par incompatibilité il vient $P(A)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Z=2k)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left[P(X=2k)+P(X=k)\right]$.

$P(A)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=2k)+\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)}_{=1}$ car les deux séries convergent.

$P(A)=\frac{e^{-\lambda}}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}+\frac{1}{2}$. Calculons $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$. $e^{\lambda}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k}}{k!}$ et $e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^{k}}{k!}$.

$e^{\lambda}+e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k}+(-\lambda)^{k}}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1+(-1)^{k}}{k!}\lambda^{k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1+(-1)^{2k}}{(2k)!}\lambda^{2k}=2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$.

$1+(-1)^{k}=0$ si k est impair

Ainsi $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}=\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}$. Alors $P(A)=\frac{e^{-\lambda}}{2}\times\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+e^{-2\lambda}}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-2\lambda}$

La probabilité pour que Z prenne des valeurs paires est $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-2\lambda}$

Exercice.- Calculer $E(Z)$ ... de deux manières différentes ...