Exercice principal S40

1. Question de cours : Comparaison de séries à termes positifs.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5} \times u_n$.

2. Écrire une fonction Pascal ayant pour argument un entier n et renvoyant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}$.

a) Rappeler le développement limité à l'ordre deux au voisinage de 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$.
Montrer que $\ln v_n = (\alpha+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{5}{2n}\right)$.
Pour quelle valeur α_0 du réel α la série de terme général $\ln v_n$ est-elle convergente ?

b) Expliciter $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln v_k$ sans signe $\sum$, et en déduire qu'il existe un réel strictement positif C tel que $u_n \sim \dfrac{C}{n^{\alpha_0}}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Qu'en déduit-on pour la série $\sum u_n$?

c) Justifier l'existence d'un réel strictement positif D (indépendant de n) tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k u_k \leqslant D \times \sqrt{n}$.

4.a) Établir pour tout entier naturel n, la relation : $2\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} k u_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice sans préparation S40

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suit la loi uniforme sur le segment $[0,1]$.
Déterminer toutes les fonctions g continues et strictement monotones de $]0,1[$ sur $g(]0,1[)$ telles que la variable aléatoire réelle $Y = g(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.

HEC 2012 S 40 Correction de l'exercice principal

Q1 $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ sont deux suites de réels.

R1 On suppose que $\exists p\in [\![n_0,+\infty[\![$, $\forall n\in [\![p,+\infty[\![$, $0\leq u_n\leq v_n$.

. Si la série de terme général v_n converge, la série de terme général u_n converge.

. Si la série de terme général u_n diverge, la série de terme général v_n diverge.

R2 On suppose que $u_n \sim v_n$ et que l'une des deux suites a, à partir d'un certain rang, des termes positifs ou nuls.

Alors les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

R3 On suppose que $\exists p\in [\![n_0,+\infty[\![$, $\forall n\in [\![p,+\infty[\![$, $u_n\geq 0$ et $v_n\geq 0$. On suppose aussi que $u_n=o(v_n)$.

Si la série de terme général v_n converge, la série de terme général u_n converge.

Si la série de terme général u_n diverge, la série de terme général v_n diverge.

Q2

```
Program S40;
var n,k:integer; u,s:real;
begin
write ('Donner n. n='); readln(n);
u:=1; S:=1;
For k:=1 to n do
    begin
    u:=(k+k)/(k+k+3)*u;   ▲
    S:=S+u;
    end;
writeln ('S',n,'=',S);
end.
```

Le programme ne pose aucun problème si l'on pose $\forall k\in\mathbb{N}$, $S_k=\sum_{i=0}^{k}u_i$ et si l'on remarque que :

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $u_k=\frac{2k}{2k+3}u_{k-1}$ et

$S_k=S_{k-1}+u_k$.

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\frac{2k}{2k+3}=\frac{k+k}{k+k+3}$ ce qui remplace deux multiplications par deux additions...

▲ la division est effectuée avant la multiplication ...

$S_{100}\simeq 2,736\,428\,571$

$S_{500}\simeq 2,881\,307\,119$

$S_{1000}\simeq 2,915\,998\,602$

$S_{10000}\simeq 2,973\,415\,518$

Q3 a) $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\ln v_n = \ln\left(\frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}\right) = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2n+2}{2n+5}\right)$.

$\ln v_n = \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{2n+5}{2n+2}\right)$.

$\ln v_n = (\alpha+1) \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{2n+5}{2(n+1)}\right)$.

$\ln v_n = (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+5}{2(n+1)}\right)\right) = (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{2n+5}{2n}\right)$.

Finalement $\ln v_n = (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{5}{2n}\right)$.

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\ln\left(1+\frac{5}{2n}\right) \underset{n \to +\infty}{=} \frac{5}{2n} - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Alors $\ln v_n \underset{n \to +\infty}{=} (\alpha+1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) - \frac{5}{2n} + \frac{1}{2}\,\frac{25}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\ln v_n \underset{n \to +\infty}{=} \left(\alpha+1-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{25}{8} - \frac{\alpha+1}{2}\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$\ln v_n \underset{n \to +\infty}{=} \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{n} + \frac{1}{8}(25 - 4(\alpha+1))\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. $\ln v_n \underset{n \to +\infty}{=} \left(\alpha-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{n} + \frac{21-4\alpha}{8} \times \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

1er cas $\alpha - \frac{3}{2} \neq 0$. Alors $\ln v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \left(\alpha - \frac{3}{2}\right) \times \frac{1}{n}$; $\frac{1}{\alpha - \frac{3}{2}} \ln v_n \sim \frac{1}{n}$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \geq 0$. La divergence de la série de terme général $\frac{1}{n}$ et les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $\frac{1}{\alpha - \frac{3}{2}} \ln v_n$ diverge. Alors la série de terme général $\ln v_n$ diverge.

2ème cas. $\alpha - \frac{3}{2} = 0$.

$\alpha = \frac{3}{2}$ et $\frac{21-4\alpha}{8} = \frac{21-6}{8} = \frac{15}{8}$. Donc $\ln v_n \underset{n \to +\infty}{=} \frac{15}{8} \times \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Alors
- $\ln v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{15}{8}\times\frac{1}{n^2}$
- $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{15}{8}\times\frac{1}{n^2}\geqslant 0$
- la série de terme général $\frac{15}{8}\times\frac{1}{n^2}$ converge (cours !)

les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $\ln v_n$ converge.

Finalement la série de terme général $\ln v_n$ converge si et seulement si $\alpha=\frac{3}{2}$. $\alpha_0=\frac{3}{2}$!

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\sum_{k=1}^{n}\ln v_k=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{(k+1)^\alpha u_{k+1}}{k^\alpha u_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left((k+1)^\alpha u_{k+1}\right)-\ln\left(k^\alpha u_k\right)\right]$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln v_k=\ln\left((n+1)^\alpha u_{n+1}\right)-\ln\left(1^\alpha u_1\right)\underset{u_1=\frac{2}{5}}{=}\ln\left((n+1)^\alpha u_{n+1}\right)-\ln\frac{2}{5}.$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\ln v_k=\ln\left((n+1)^\alpha u_{n+1}\right)-\ln\frac{2}{5}$

Je préfère : $\forall n\in [\![2,+\infty[\![,\ \ln(n^\alpha u_n)=\sum_{k=1}^{n-1}\ln v_k+\ln\frac{2}{5}$.

Posons $\alpha=\alpha_0$. Alors la série de terme général $\ln v_k$ converge. Posons $S=\sum_{k=1}^{+\infty}\ln v_k+\ln\frac{2}{5}$.

Alors $\lim_{n\to+\infty}\ln(n^{\alpha_0}u_n)=S$. Par continuité de la fonction exponentielle en S il vient :

$\lim_{n\to+\infty}(n^{\alpha_0}u_n)=\lim_{n\to+\infty}e^{\ln(n^{\alpha_0}u_n)}=e^S$. Comme $e^S\neq 0$: $n^{\alpha_0}u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}e^S$.

donc $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{e^S}{n^{\alpha_0}}$. Posons $C=e^S$. $C>0$ et $u_n\sim\frac{C}{n^{\alpha_0}}$.

De plus $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{C}{n^{\alpha_0}}>0$ et la série de terme général $\frac{C}{n^{\alpha_0}}$ converge car $\alpha_0>1$.

les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que

la série de terme général u_n converge.

c) $u_\ell \underset{\ell\to+\infty}{\sim} \dfrac{c}{\ell^{\alpha_0}} = \dfrac{c}{\ell^{3/2}}$ donc $k^{3/2} u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} c$. $\sqrt{k}\, k u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} c$; $k u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{c}{\sqrt{k}}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \dfrac{k-(k-1)}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{k}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{k}}\right)}$.

$\lim\limits_{k\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{k}}\right) = 2$ donc $\sqrt{k} - \sqrt{k-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$. $2c\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{c}{\sqrt{k}} \underset{k\to+\infty}{\sim} k u_k$.

Alors $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{k u_k}{2c\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)} = 1$ car $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $2c\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right) \neq 0$.

Ainsi la suite $\left(\dfrac{k u_k}{2c\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)}\right)_{k\geq 1}$ est convergente. Elle est donc bornée.

$\exists M \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{k u_k}{2c\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)} = \left|\dfrac{k u_k}{2c\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)}\right| \leq M$. $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*$, $2c\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right) > 0$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k u_k \leq 2cM\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$

Posons $D = 2cM$. $D > 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k u_k \leq D\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$.

Mieux $\forall k \in \mathbb{N}$, $k u_k \leq D\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$ (Pour $k=0$, $k u_k = 0$ et $D\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right) = D > 0$).

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k u_k \leq \sum\limits_{k=0}^{n} D\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right) = D \sum\limits_{k=0}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right) = D\sqrt{n}$.

Ainsi $\exists D \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k u_k \leq D\sqrt{n}$.

Q4 a) $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = \dfrac{2k+2}{2k+5} u_k$; $\forall k \in \mathbb{N}$, $(2k+5) u_{k+1} = (2k+2) u_k$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$2\sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \sum_{k=1}^{n+1} (2k+3) u_k \underset{k \leftarrow k+1}{=} \sum_{k=0}^{n} (2k+5) u_{k+1} = \sum_{k=0}^{n} (2k+2) u_k = 2\sum_{k=0}^{n} k u_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $2\sum\limits_{k=1}^{n+1} k u_k + 3\sum\limits_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum\limits_{k=0}^{n} k u_k + 2\sum\limits_{k=}^{n} u_k$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $2\sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} k u_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k$

Alors $3\sum_{k=\underline{0}}^{n+1} u_k - 3u_0 - 2\sum_{k=0}^{n} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} k u_k - 2\sum_{k=1 \text{ ou } \underline{0}}^{n+1} k u_k = -2(n+1)u_{n+1}$. (*)

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{c}{n^{3/2}}$; $n u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{c}{\sqrt{n}}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} (n u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{c}{\sqrt{n}} = 0$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \left(-2(n+1)u_{n+1}\right) = 0$.

La série de terme général u_k converge. Posons $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (*) il vient : $3S - 3u_0 - 2S = 0$. $S = 3u_0 = 3$.

Ainsi $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 3$ ou $\underline{\underline{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 3}}$.

<u>Exercice.</u>. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b} u_n$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la série de terme général u_n converge. Montrer que si la série de terme général u_n converge : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{b-1}{b-1-a}$.

Question 13 **HEC 2012-13-S40** $\boxed{\text{F 2}}$

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

Déterminer toutes les fonctions g continues et strictement monotones de $]0,1[$ sur $g(]0,1[)$ telles que la variable aléatoire $Y = g(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.

Question de cours. Comparaison des séries à termes positifs.

• Analyse.. Soit g une application continue et strictement monotone de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$.

1) $I = g(]0,1[)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2) g définit une bijection de $]0,1[$ sur I

Supposons encore que $Y = g(X) = g \circ X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Notons F_Y (resp. F_X) la fonction de répartition de Y (resp. X)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } \forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ x & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1,+\infty[. \end{cases}$$

$\forall x \in]0,1[,\ F_Y(g(x)) = P(Y \leqslant g(x)) = P(g \circ X \leqslant g(x))$.

1er cas.. g est strictement croissante sur $]0,1[$.

soit $x \in]0,1[$, $F_Y(g(x)) = P(g \circ X \leqslant g(x)) = P(X \leqslant x) = F_X(x) \underset{x \in]0,1[}{=} x$

de plus $F_Y(g(x)) = 0$ ou $1 - e^{-g(x)}$. Donc $x = 0$ ou $x = 1 - e^{-g(x)}$.

Or $x \in]0,1[$. Ainsi $x = 1 - e^{-g(x)}$. $e^{-g(x)} = 1 - x$; $-g(x) \underset{x \in]0,1[}{=} \ln(1-x)$; $g(x) = -\ln(1-x)$.

$\forall x \in]0,1[,\ g(x) = -\ln(1-x)$.

2ième cas.. g est strictement décroissante sur $]0,1[$.

soit $x \in]0,1[$, $F_Y(g(x)) = P(g \circ X \leqslant g(x)) = P(X \geqslant x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \leqslant x)$

Alors $F_Y(g(x)) = 1 - x$ car $x \in]0,1[$. Or $F_Y(g(x)) = 0$ ou $1 - e^{-g(x)}$.

Comme $x \neq 1$: $1 - x = F_Y(g(x)) = 1 - e^{-g(x)}$; $x = e^{-g(x)}$; $\ln x = -g(x)$.

$\forall x \in]0,1[,\ g(x) = -\ln(x)$.

• Synthèse. Posons $\forall x \in]0,1[,\ g_1(x) = -\ln(1-x)$ et $g_2(x) = -\ln x$.

Notons que g_1 et g_2 sont continues et strictement monotones sur $]0,1[$ et que, $g_1 \circ X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $g_2 \circ X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

Posons $Y_1 = g_1 \circ X$ et $Y_2 = g_2 \circ X$.

$u : x \to 1-x$ est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$, $\forall x \in]0,1[$, $u(x) \in]0,1[$,

$-\ln$ est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$.

Par composition g_1 est continue et strictement croissante sur $]0,1[$.

$\forall x \in]0,1[$, $g_1(x) = -\ln(1-x) \in]0,+\infty[$. Alors $Y_1 = g_1 \circ X$ prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$.

Soit F_{Y_1} la fonction de répartition de Y_1. $\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_{Y_1}(x) = 0$. Soit $x \in]0,+\infty[$.

$F_{Y_1}(x) = P(g_1 \circ X \leqslant x) = P(-\ln(1-X) \leqslant x) = P(\ln(1-X) \geqslant -x) = P(1-X \geqslant e^{-x})$.

$F_{Y_1}(x) = P(X \leqslant 1-e^{-x}) = 1-e^{-x}$

$\left[\begin{array}{l} 1-e^{-x} \in]0,1[\text{ car } x \in]0,+\infty[\\ X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[). \end{array}\right.$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ou $F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. g_1 est solution.

$\forall x \in]0,1[$, $g_2(x) = -\ln x$. g_2 est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$.

$\forall x \in]0,1[$, $g_2(x) = -\ln x = -\ln(1-(1-x)) = g_1(1-x)$. $Y_2 = g_1(1-X)$.

$X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$. Rappelons alors que $1-X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$. Mais alors, d'après ce qui précède ("$X \leftarrow 1-X$" !), $g_1(1-X) \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ donc $Y_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. g_2 est solution.

Les fonctions g continues et strictement monotones de $]0,1[$ sur $g(]0,1[)$ telles que la variable aléatoire $Y = g(X)$ suit la loi exponentielle sont les fonctions g_1 et g_2 définies par $\forall x \in]0,1[$, $g_1(x) = -\ln(1-x)$ et $g_2(x) = -\ln x$.