Exercice principal S42

1. Question de cours : Définition de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Y}$ de deux variables aléatoires discrètes X et Y, prenant chacune au moins deux valeurs avec une probabilité strictement positive. Indiquer dans quels cas $\rho_{X,Y}$ vaut 1 ou -1.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

2. Pour $r \in \mathbb{R}$, soit M_r la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $M_r = \begin{pmatrix} 1 & r & r & \cdots & r \\ r & 1 & r & \cdots & r \\ r & r & 1 & \cdots & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & r & r & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $(1-r)$ est une valeur propre de M_r et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

b) Trouver une matrice diagonale semblable à M_r.

c) Pour quelles valeurs de r, l'application $(x, y) \mapsto {}^tXM_rY$ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$? (X et Y désignent les matrices-colonnes dont les composantes sont celles des vecteurs x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$)

3. Soit $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$, n variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et possédant toutes une variance égale à 1. On pose : $Z = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_k$.

a) Calculer pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la variance $V(Z_1 + \alpha Z)$ et la covariance $\mathrm{Cov}(Z_1 + \alpha Z, Z_2 + \alpha Z)$.

b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe un réel c_α tel que la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire $\big(c_\alpha(Z_1 + \alpha Z), \cdots, c_\alpha(Z_n + \alpha Z)\big)$ soit égale à une matrice M_r définie dans la question 2.

4. Déduire des résultats précédents que M_r est la matrice de variance-covariance d'un vecteur aléatoire discret *si et seulement si* on a : $\dfrac{1}{1-n} \leqslant r \leqslant 1$.

Exercice sans préparation S42

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k^\alpha}{n^2}\right)$.

1. Montrer que si $\alpha = 2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.
2. Montrer que si $0 \leqslant \alpha < 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

R.

HEC 2012 S42 Correction de l'exercice principal

Q1 $\mathrm{cov}(X,Y) = E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)$ ou $\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

$\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$. $|\rho_{X,Y}| \leq 1$.

$\rho_{X,Y} = 1$ ou -1 si et seulement si X (resp. Y) est une fonction quasi-affine de Y (resp. X).

$\rho_{X,Y} = 1$ ou $-1 \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ P(X = aY+b) = 1$.

$\rho_{X,Y} = 1$ ou $-1 \iff \exists (a',b') \in \mathbb{R}^2,\ P(Y = a'X+b') = 1$.

Q2 Dans ce qui suit nous notons J_r la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à r.

a) $M_r = (1-r)I_n + J_r$; $M_r - (1-r)I_n = J_r = \begin{pmatrix} r & \cdots & r \\ r & \cdots & r \\ \vdots & & \vdots \\ r & \cdots & r \end{pmatrix}$.

Toutes les colonnes de J_r sont égales à $\begin{pmatrix} r \\ r \\ \vdots \\ r \end{pmatrix}$.

1er cas $r = 0$. Alors $1-r = 1$ et $M_r = I_n$.

Donc $1-r$ est valeur propre de M_r et dim $SEP(M_r, 1-r) = n$.

2e cas $r \neq 0$. Alors rg $J_r = 1 < n$. rg$(M_r - (1-r)I_n) = 1 < n$.

Ainsi $M_r - (1-r)I_n$ n'est pas inversible et $1-r$ est valeur propre de M_r.

De plus dim $SEP(M_r, 1-r) = n - \mathrm{rg}(M_r - (1-r)I_n) = n-1$.

Finalement $1-r$ est valeur propre de M_r et dim $SEP(M_r, 1-r) = \begin{cases} n & \text{si } r = 0 \\ n-1 & \text{si } r \neq 0 \end{cases}$.

b) __1er cas..__ $r=0$. $M_r = I_n$. Alors M_r est semblable (!) à la matrice diagonale I_n !

__2ème cas..__ $r \neq 0$ M_r est symétrique et à coefficients réels donc M_r est diagonalisable.
$1-r$ est valeur propre de M_r et dim $SEP(M_r, 1-r) = n-1$.

Alors M_r admet exactement deux valeurs propres. Ainsi il existe un réel α distinct de $1-r$ tel que $Sp\, M_r = \{1-r, \alpha\}$.

$M_{n,1}(\mathbb{R}) = SEP(M_r, 1-r) \oplus SEP(M_r, \alpha)$ et ces deux sous-espaces propres sont orthogonaux.

Ainsi $SEP(M_r, \alpha) = (SEP(M_r, 1-r))^{\perp}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$$M_r X = (1-r) X \iff \begin{cases} x_1 + r x_2 + \cdots + r x_n = (1-r) x_1 \\ r x_1 + x_2 + r x_3 + \cdots + r x_n = (1-r) x_2 \\ \cdots \\ r x_1 + r x_2 + \cdots + r x_{n-1} + x_n = (1-r) x_n \end{cases} \iff r(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = 0 \iff x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0.$$

$SEP(M_r, 1-r)$ est l'hyperplan de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ d'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ dans la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est orthonormée (pour le produit scalaire canonique ...).

Alors $(SEP(M_r, 1-r))^{\perp}$ est la droite vectorielle de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ engendrée par $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors $U \in SEP(M_r, \alpha)$ et $\alpha U = AU = \begin{pmatrix} 1+(n-1)r \\ 1+(n-1)r \\ \vdots \\ 1+(n-1)r \end{pmatrix} = (1+(n-1)r) U$.

Comme $U \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$: $\alpha = 1+(n-1)r$.

Ainsi $Sp\, M_r = \{1-r, 1+(n-1)r\}$, dim $SEP(M_r, 1-r) = n-1$ et dim $SEP(M_r, 1+(n-1)r) = 1$

Alors M_r est semblable à la matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$, $Diag(1-r, 1-r, \ldots, 1-r, 1+(n-1)r)$.
Notons que ceci est encore vrai pour $r=0$.

__M_r est semblable à $Diag(1-r, 1-r, \ldots, 1-r, 1+(n-1)r)$ et ceci pour tout r dans $\mathbb{R}$.__

c) • Par définition φ est une application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{R}^n)^3$. Notons X, Y, Z les matrices de x, y, z dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. $\lambda Y + Z$ est la matrice de $\lambda y + z$ dans cette même base.

$\varphi(x, \lambda y+z) = {}^tX M_r(\lambda Y+Z) = \lambda {}^tX M_r Y + {}^tX M_r Z = \lambda \varphi(x,y) + \varphi(x,z)$. M_r est symétrique.

$\varphi(x,y) = {}^tX M_r Y = \langle X, M_r Y\rangle = \langle M_r Y, X\rangle = {}^t(M_r Y)X = {}^tY\,{}^tM_r X = {}^tY M_r X = \varphi(y,x)$.

Ainsi $\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}^n)^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \varphi(x, \lambda y+z) = \lambda \varphi(x,y) + \varphi(x,z)$

et $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \ \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.

Ceci suffit pour dire que <u>φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$.</u>

* Supposons que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Soit λ une valeur propre de M_r et soit X_λ un vecteur propre associé.

Soit x_λ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de matrice X_λ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$X_\lambda \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc $x_\lambda \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Ainsi $\varphi(x_\lambda, x_\lambda) > 0$ car φ est un produit scalaire.

$0 < \varphi(x_\lambda, x_\lambda) = {}^tX_\lambda M_r X_\lambda = {}^tX_\lambda(\lambda X_\lambda) = \lambda\, {}^tX_\lambda X_\lambda = \lambda \|X_\lambda\|^2$ et $\|X_\lambda\|^2 > 0$ car $X_\lambda \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$

Alors $\lambda > 0$. Or $\mathrm{Sp}\, M_r = \{1-r, 1+(n-1)r\}$ (même si $r=0$!).

Ainsi $1-r > 0$ et $1+(n-1)r > 0$ donc $r < 1$ et $r > -\frac{1}{n-1}$. <u>$\frac{1}{1-n} < r < 1$</u>

* Réciproquement supposons que $\frac{1}{1-n} < r < 1$.

Alors $1-r > 0$ et $1+(n-1)r > 0$. Les valeurs propres de M_r sont strictement positives.

Montrons que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Comme φ est bilinéaire symétrique il ne reste plus qu'à montrer que :

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \varphi(x,x) \geq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Notons que $\varphi(0_{\mathbb{R}^n}, 0_{\mathbb{R}^n}) = 0 \geq 0$.

Il ne reste donc plus qu'à montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}, \ \varphi(x,x) > 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Soit X sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. $X \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\varphi(x,x) = {}^tX M_r X$. Montrons que ${}^tX M_r X > 0$.

Si $r=0$: ${}^tX M_r X = {}^tX I_n X = {}^tX X = \|X\|^2 > 0$ car $X \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. Supposons $r \neq 0$.

Version 1. On considère que c'est du cours. La matrice M_r est symétrique, à coefficients réels et à valeurs propres strictement positives donc pour tout élément Z de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ différent de $0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$, $M_r Z > 0$.

Alors ${}^tX M_r X > 0$ car $X \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$

Version 2. On redémontre. Soit $(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$ une base orthonormée de $SEP(M_r, 1-r)$ et (X_n) une base orthonormée de $SEP(M_r, 1+(n-1)r)$.

Comme $SEP(M_r, 1-r)$ et $SEP(M_r, 1+(n-1)r)$ sont supplémentaires et orthogonaux dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$. $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base orthonormée de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M_r associés aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ avec $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 1-r$ et $\alpha_n = 1+(n-1)r$.

Soit $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ la famille des coordonnées de X dans cette base.

$X = \sum_{k=1}^{n} \beta_k X_k$. $M_r X = \sum_{k=1}^{n} \beta_k M_r X_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \alpha_k X_k$.

${}^tX M_r X = \langle X, M_r X\rangle = \sum_{k=1}^{n} \beta_k(\beta_k \alpha_k) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 \alpha_k$ car $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base orthonormée.

Or par hypothèse $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\alpha_k = 1-r > 0$ et $\alpha_n = 1+(n-1)r > 0$.

Alors ${}^tX M_r X = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 \alpha_k \geqslant 0$.

Supposons que ${}^tX M_r X = 0$. Alors $\sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 \alpha_k = 0$ avec $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\beta_k^2 \alpha_k \geqslant 0$

donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\beta_k^2 \alpha_k = 0$ et $\alpha_k > 0$. Alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\beta_k^2 = 0$.

Ainsi $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\beta_k = 0$. Alors $X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$!!

Finalement ${}^tX M_r X \geqslant 0$ et ${}^tX M_r X \neq 0$. Alors ${}^tX M_r X > 0$. C'est ce qu'il fallait démontrer pour dire que φ est un produit scalaire.

Conclusion. φ est un produit scalaire si et seulement si $\frac{1}{1-n} < r < 1$

Remarques. 1. Si $\frac{1}{1-n} < r < 1$, φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et M_r est sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

2. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un produit scalaire si et seulement si elle est symétrique à valeurs propres strictement positives.

Q3 a) **Remarques** 1. $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ sont indépendantes donc $V(\sum_{k=1}^{n} Z_k) = \sum_{k=1}^{n} V(Z_k)$.

Or $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $V(Z_k) = 1$. Donc $V(\sum_{k=1}^{n} Z_k) = n$.

$V(Z) = V(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k) = \frac{1}{n^2} V(\sum_{k=1}^{n} Z_k) = \frac{1}{n^2} \times n = \frac{1}{n}$. $\underline{V(Z) = \frac{1}{n}}$.

2. Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Cov}(Z_i, Z) = \mathrm{cov}(Z_i, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{cov}(Z_i, Z_k)$.

Si $k \in [\![1,n]\!] - \{i\}$, Z_i et Z_k sont indépendantes donc $\mathrm{cov}(Z_i, Z_k) = 0$.

Alors $\mathrm{cov}(Z_i, Z) = \frac{1}{n}\mathrm{cov}(Z_i, Z_i) = \frac{1}{n} V(Z_i) = \frac{1}{n}$.

$\underline{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathrm{cov}(Z_i, Z) = \frac{1}{n}}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Ne négligeons pas... soit $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,n]\!] - \{i\}$.

$V(Z_i + \alpha Z) = \mathrm{cov}(Z_i + \alpha Z, Z_i + \alpha Z) = \mathrm{cov}(Z_i, Z_i) + \alpha\,\mathrm{cov}(Z_i, Z) + \alpha\,\mathrm{cov}(Z, Z_i) + \alpha^2\,\mathrm{cov}(Z, Z)$.

$V(Z_i + \alpha Z) = 1 + \alpha \times \frac{1}{n} + \alpha \times \frac{1}{n} + \alpha^2 \times \frac{1}{n} = 1 + \frac{2\alpha}{n} + \frac{\alpha^2}{n}$.

$\mathrm{cov}(Z_i + \alpha Z, Z_j + \alpha Z) = \underbrace{\mathrm{cov}(Z_i, Z_j)}_{=0 \text{ car } i \neq j} + \alpha\,\mathrm{cov}(Z_i, Z) + \alpha\,\mathrm{cov}(Z, Z_j) + \alpha^2\,\mathrm{cov}(Z, Z)$.

$\mathrm{cov}(Z_i + \alpha Z, Z_j + \alpha Z) = 0 + \alpha \times \frac{1}{n} + \alpha \times \frac{1}{n} + \alpha^2 \times \frac{1}{n} = \frac{2\alpha + \alpha^2}{n}$.

$\underline{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall i \in [\![1,n]\!],\ V(Z_i + \alpha Z) = \mathrm{cov}(Z_i + \alpha Z, Z_i + \alpha Z) = 1 + \frac{2\alpha + \alpha^2}{n}}$.

$\underline{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow \mathrm{cov}(Z_i + \alpha Z, Z_j + \alpha Z) = \frac{2\alpha + \alpha^2}{n}}$.

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $1 + \frac{2\alpha + \alpha^2}{n} = \frac{(\alpha+1)^2 - 1}{n} + 1 = \frac{(\alpha+1)^2 + (n-1)}{n} > 0$. ($n \geqslant 2$)

Posons $c_\alpha = \dfrac{1}{\left(1 + \frac{2\alpha + \alpha^2}{n}\right)^{1/2}}$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $T_i = c_\alpha (Z_i + \alpha Z)$.

$\mathrm{cov}(T_i, T_i) = c_\alpha^2\,\mathrm{cov}(Z_i + \alpha Z, Z_i + \alpha Z) = \dfrac{1}{\left(1 + \frac{2\alpha + \alpha^2}{n}\right)} \times \left(1 + \frac{2\alpha + \alpha^2}{n}\right) = 1$ et ceci

pour tout i dans $[\![1,n]\!]$.

$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ i\neq j \Rightarrow \mathrm{cov}(T_i,T_j)= c_\alpha^2\,\mathrm{cov}(Z_i+\alpha Z, Z_j+\alpha Z)= \dfrac{1}{1+\frac{2\alpha+\alpha^2}{n}} \times \dfrac{2\alpha+\alpha^2}{n}.$

Posons $r= \dfrac{1}{1+\frac{2\alpha+\alpha^2}{n}} \times \dfrac{2\alpha+\alpha^2}{n}.$

$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ \mathrm{cov}(T_i,T_j)=\begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ r & \text{si } i\neq j\end{cases}$. Alors la matrice de covariance du vecteur aléatoire $(T_1,T_2,\dots,T_n)$ donc du vecteur aléatoire $(c_\alpha(Z_1+\alpha Z), c_\alpha(Z_2+\alpha Z),\dots,c_\alpha(Z_n+\alpha Z))$ est M_r.

<u>Pour tout α dans $\mathbb{R}$, il existe un réel c_α tel que la matrice de covariance du vecteur aléatoire $(c_\alpha(Z_1+\alpha Z), c_\alpha(Z_2+\alpha Z),\dots,c_\alpha(Z_n+\alpha Z))$ soit égale à une matrice M_r définie dans Q2.</u>

(Q4) <u>Remarque</u>.- Dans Q2 c) nous avons redémontré que :

$\left(\forall X\in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ X\neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})},\ {}^tXM_rX>0\right) \iff \mathrm{Sp}\, M_r\subset \mathbb{R}_+^* \iff \dfrac{1}{1-n}<r<1.$

Le cours ou une démonstration semblable donne :

$\left(\forall X\in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXM_rX\geqslant 0\right) \iff \mathrm{Sp}\, M_r\subset \mathbb{R}_+ \iff \dfrac{1}{1-n}\leqslant r\leqslant 1.$

* Supposons que M_r soit la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire $(W_1,W_2,\dots,W_n)$. Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $W=\sum_{k=1}^{n} x_k W_k$.

Posons $M_r=(m_{i,j})$. $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!],\ m_{i,j}=\mathrm{cov}(W_i,W_j)$.

${}^tXM_rX=\sum_{i=1}^{n} x_i\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\,x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j m_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j\,\mathrm{cov}(W_i,W_j).$

${}^tXM_rX = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\mathrm{cov}(W_i, \sum_{j=1}^{n} x_j W_j) = \mathrm{cov}(\sum_{i=1}^{n} x_i W_i, \sum_{j=1}^{n} x_j W_j)=\mathrm{cov}(W,W)$

donc ${}^tXM_rX=\mathrm{cov}(W,W)=V(W)\geqslant 0$.

Ainsi $\forall X\in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXM_rX\geqslant 0$. $\mathrm{Sp}\,M_r\subset\mathbb{R}_+$. Ainsi $\dfrac{1}{1-n}\leqslant r\leqslant 1$.

* Réciproquement supposons que $\frac{1}{1-n} \leq r \leq 1$.

Soit $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ n variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et possédant toutes une variance égale à 1.

1er cas.. $r = 1$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!],\ \mathrm{cov}(Z_i, Z_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $\quad$ // $M_r = I_n$

// la matrice de covariance du vecteur aléatoire $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ est I_n.

donc M_r est la matrice de variance d'un vecteur aléatoire discret

2ème cas.. $r \neq 1$ donc $\frac{1}{1-n} \leq r < 1$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Posons $c_\alpha = \frac{1}{1+(2\alpha+\alpha^2)/n}$. Nous avons vu que la matrice de covariance du vecteur aléatoire $V_\alpha = (c_\alpha(Z_1+\alpha Z), c_\alpha(Z_2+\alpha Z), \dots, c_\alpha(Z_n+\alpha Z))$ est M_{r_α} avec

$r_\alpha = \frac{1}{1+(2\alpha+\alpha^2)/n} \frac{2\alpha+\alpha^2}{n}$. Cherchons alors α tel que $r_\alpha = r$.

$r_\alpha = r \iff \frac{2\alpha+\alpha^2}{n+2\alpha+\alpha^2} = r \iff 2\alpha+\alpha^2 = r(2\alpha+\alpha^2) + rn \iff (r-1)(2\alpha+\alpha^2) + rn = 0$.

$r_\alpha = r \underset{r\neq 1}{\iff} \alpha^2 + 2\alpha + \frac{rn}{r-1} = 0 \iff (\alpha+1)^2 = \frac{-rn}{r-1} + 1 \iff (\alpha+1)^2 = \frac{rn+1-r}{1-r}$

$r_\alpha = r \iff (\alpha+1)^2 = \frac{1-(1-n)r}{1-r}$. Or $r < 1$ donc $1-r > 0$.

de plus $\frac{1}{1-n} \leq r$; $\frac{1}{n-1} \geq -r$ et $n-1 \geq 0$; $1 \geq -(n-1)r$; $1+(n-1)r \geq 0$; $1-(1-n)r \geq 0$.

Alors $\frac{1-(1-n)r}{1-r} \geq 0$.

Posons $\alpha = -1 + \sqrt{\frac{1-(1-n)r}{1-r}}$. Alors $(\alpha+1)^2 = \frac{1-(1-n)r}{1-r}$. Ainsi $M_{r_\alpha} = M_r$.

Pour finir, si $\alpha = -1+\sqrt{\dfrac{1-(1-n)r}{1-r}}$, en posant $c_\alpha = \dfrac{1}{1+(2\alpha+\alpha^2)/n}$ on peut dire que $(c_\alpha(Z_1+\alpha Z), c_\alpha(Z_2+\alpha Z), \dots, c_\alpha(Z_n+\alpha Z))$ est un vecteur aléatoire discret dont la matrice de covariance est Π_r. Ceci achève de montrer que

Π_r est la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire discret si et seulement si on a

$\dfrac{1}{1-n} \leq r \leq 1.$

R..

Question 14 HEC 2012-14-S42 $\boxed{\text{F1}}$

α est un réel positif ou nul. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^\alpha}{n^2}\right)$.

Q1. Montrer que si $\alpha = 2$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.

Q2. Montrer que si $0 \leqslant \alpha < 1$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Question de cours. Définition de la covariance et du coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$ de deux variables aléatoires discrètes X et Y, prenant chacune au moins deux valeurs avec une probabilité strictement positive. Indiquer dans quels cas $\rho_{X,Y}$ vaut 1 ou -1

Q1 Ici $\alpha=2$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\ln u_n = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\ln u_n = n\times\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right)$. Posons $\forall t\in[0,1]$, $f(t)=\ln(1+t^2)$.

f est continue sur $[0,1]$. Alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = I$ où $I=\int_0^1 f(t)\,dt$.

Notons que f est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,1]$. Ainsi $I>0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty}\left(n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right)=+\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right)\right)=+\infty$.

$\lim_{n\to+\infty}(\ln u_n)=+\infty$. Alors $\lim_{n\to+\infty}u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{\ln u_n}\right)=+\infty$. $\underline{\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty}$.

Q2 Ici $0\leqslant\alpha<1$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $u_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^\alpha}{n^2}\right)\geqslant 1$.

Alors $0\leqslant \ln u_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^\alpha}{n^2}\right) \underset{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \ln x\leqslant x-1}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n}\frac{k^\alpha}{n^2} \underset{\alpha\geqslant 0}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n}\frac{n^\alpha}{n^2} = n\times\frac{n^\alpha}{n^2} = \frac{1}{n^{1-\alpha}}$.

De plus $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}}=0$ car $1-\alpha>0$. Donc par encadrement on obtient $\lim_{n\to+\infty}(\ln u_n)=0$

Par continuité de la fonction exponentielle en 0 il vient $\lim_{n\to+\infty}e^{\ln u_n}=e^0$.

Ainsi $\underline{\lim_{n\to+\infty}u_n=1}$.

Exercice.. Etudier $\lim_{n\to+\infty}u_n$ pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$.