R.



# HEC Mathématiques II 2013

## PARTIE I Polynômes factoriels ascendants et lois binomiales négatives

**Q1** a) $X^{\langle 2\rangle}-X^{\langle 1\rangle}=(X+1-1)(X+2-1)-(X+1-1)=X(X+1)-X=X^2+X-X=X^2$.

$X^{\langle 3\rangle}-3X^{\langle 2\rangle}+X^{\langle 1\rangle}=(X+1-1)(X+2-1)(X+3-1)-3(X+1-1)(X+2-1)+(X+1-1)$.

$X^{\langle 3\rangle}-3X^{\langle 2\rangle}+X^{\langle 1\rangle}=X(X+1)(X+2)-3X(X+1)+X=X\left[(X+1)(X+2)-3(X+1)+1\right]$

$X^{\langle 3\rangle}-3X^{\langle 2\rangle}+X^{\langle 1\rangle}=X\left[X^2+2X+X+2-3X-3+1\right]=X\,X^2=X^3$.

$X^{\langle 2\rangle}-X^{\langle 1\rangle}=X^2$ et $X^{\langle 3\rangle}-3X^{\langle 2\rangle}+X^{\langle 1\rangle}=X^3$.

b)

$\boxed{V1}$ $X^{\langle 4\rangle}=X(X+1)(X+2)(X+3)$. le coefficient de $X^3$ dans $X^{\langle 4\rangle}$ est $1+2+3$ donc $6$, non ?

le coefficient de $X^3$ dans $X^{\langle 3\rangle}$ est $1$ et c'est $0$ dans $X^{\langle 2\rangle}$ et $X^{\langle 1\rangle}$.

Calculons alors $X^{\langle 4\rangle}-6X^{\langle 3\rangle}$.

$X^{\langle 4\rangle}-6X^{\langle 3\rangle}=X(X+1)(X+2)(X+3)-6X(X+1)(X+2)=X(X+1)(X+2)(X+3-6)$.

$X^{\langle 4\rangle}-6X^{\langle 3\rangle}=X(X^2+3X+2)(X-3)=(X^2+3X+2)(X^2-3X)=(X^2+3X)(X^2-3X)+2(X^2-3X)$.

$X^{\langle 4\rangle}-6X^{\langle 3\rangle}=X^4-9X^2+2X^2-6X=X^4-7X^2-6X=X^4-7X(X+1)+7X-6X=X^4-7X^{\langle 2\rangle}+X^{\langle 1\rangle}$.

donc $X^4=X^{\langle 4\rangle}-6X^{\langle 3\rangle}+7X^{\langle 2\rangle}-X^{\langle 1\rangle}$.

$\boxed{V2}$ $X^{\langle 4\rangle}=X(X+1)(X+2)(X+3)=(X^2+X)(X^2+5X+6)=X^4+5X^3+6X^2+X^3+5X^2+6X$.

$X^{\langle 4\rangle}=X^4+6X^3+11X^2+6X\overset{a)}{=}X^4+6\left(X^{\langle 3\rangle}-3X^{\langle 2\rangle}+X^{\langle 1\rangle}\right)+11\left(X^{\langle 2\rangle}-X^{\langle 1\rangle}\right)+6X^{\langle 1\rangle}$.

$X^{\langle 4\rangle}=X^4+6X^{\langle 3\rangle}+(-18+11)X^{\langle 2\rangle}+(6-11+6)X^{\langle 1\rangle}=X^4+6X^{\langle 3\rangle}-7X^{\langle 2\rangle}+X^{\langle 1\rangle}$.

donc $X^4=X^{\langle 4\rangle}-6X^{\langle 3\rangle}+7X^{\langle 2\rangle}-X^{\langle 1\rangle}$.

c) Soit $n\in\mathbb{N}$. $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\deg X^{\langle k\rangle}=k$. Alors $(X^{\langle 0\rangle},X^{\langle 1\rangle},\dots,X^{\langle n\rangle})$ est une famille d'éléments non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$ de degrés échelonnés.

$(X^{\langle 0\rangle}, X^{\langle 1\rangle}, \dots, X^{\langle n\rangle})$ est donc une famille libre d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ dont le cardinal $n+1$ coïncide avec la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi $\underline{(X^{\langle 0\rangle}, X^{\langle 1\rangle}, \dots, X^{\langle n\rangle}) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$.

Alors $\underline{X^n \text{ est combinaison linéaire de } X^{\langle 0\rangle}, X^{\langle 1\rangle}, \dots, X^{\langle n\rangle} \text{ et ceci pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}}$.

<u>Les polynômes $X^n$ ($n\in\mathbb{N}$) de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ (!!!) sont tous des combinaisons linéaires de polynômes factoriels ascendants.</u>

⚠ La notion de base d'un espace vectoriel est dans le programme et sans aucun intérêt ici.

**Q2** $(r,s)$ est un couple de réels et $n\in\mathbb{N}$.

**a)** $r^{\langle n+1\rangle} = \prod_{k=1}^{n+1}(r+k-1)$

<u>1er cas</u>. $n\geqslant 1$. $r^{\langle n+1\rangle} = \left(\prod_{k=1}^{n}(r+k-1)\right)(r+n+1-1) = r^{\langle n\rangle}(r+n)$.

<u>2e cas</u>. $n=0$. $r^{\langle n+1\rangle} = r+1-1 = r = 1\times(r+0) = r^{\langle 0\rangle}(r+0) = r^{\langle n\rangle}(r+n)$.

Dans les deux cas $\underline{r^{\langle n+1\rangle} = r^{\langle n\rangle}(r+n) = (r+n)\,r^{\langle n\rangle}}$.

<u>Remarque</u>. Notons que ceci donne $\underline{X^{\langle n+1\rangle} = (X+n)X^{\langle n\rangle}}$.

**b)** Soit $k\in[\![0,n]\!]$.

$$r^{\langle k+1\rangle}s^{\langle n-k\rangle} + r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k+1\rangle} \overset{Q2\,a)}{=} (r+k)\,r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k\rangle} + r^{\langle k\rangle}(s+n-k)\,s^{\langle n-k\rangle}.$$

$$r^{\langle k+1\rangle}s^{\langle n-k\rangle} + r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k+1\rangle} = (r+k+s+n-k)\,r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k\rangle} = (r+s+n)\,r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k\rangle}.$$

Ainsi $\underline{\forall k\in[\![0,n]\!],\ (r+s+n)\,r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k\rangle} = r^{\langle k+1\rangle}s^{\langle n-k\rangle} + r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k+1\rangle}}$.

**c)** • $(r+s)^{\langle 0\rangle} = 1$ et $\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}r^{\langle k\rangle}s^{\langle 0-k\rangle} = \binom{0}{0}r^{\langle 0\rangle}s^{\langle 0-0\rangle} = 1\times1\times1 = 1$.

donc $(r+s)^{\langle 0\rangle} = \sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}r^{\langle k\rangle}s^{\langle 0-k\rangle}$.

La propriété est vraie pour $n=0$.

• supposons la propriété vraie pour un élément $n$ de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$$(r+s)^{\langle n+1\rangle} \overset{Q2a)}{=} (r+s+n)(r+s)^{\langle n\rangle} \overset{\text{hypothèse de récurrence}}{=} (r+s+n)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} r^{\langle k\rangle} s^{\langle n-k\rangle}.$$

$$(r+s)^{\langle n+1\rangle} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(r+s+n)\, r^{\langle k\rangle} s^{\langle n-k\rangle} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[r^{\langle k+1\rangle} s^{\langle n-k\rangle} + r^{\langle k\rangle} s^{\langle n-k+1\rangle}\right]$$

$$(r+s)^{\langle n+1\rangle} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} r^{\langle k+1\rangle} s^{\langle n-k\rangle} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} r^{\langle k\rangle} s^{\langle n+1-k\rangle}.$$

$$\Big\downarrow k \leftarrow k-1$$

$$(r+s)^{\langle n+1\rangle} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1} r^{\langle k\rangle} s^{\langle n-(k-1)\rangle} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} r^{\langle k\rangle} s^{\langle n+1-k\rangle}.$$

$$(r+s)^{\langle n+1\rangle} \overset{*}{=} \binom{n}{n+1-1} r^{\langle n+1\rangle} s^{\langle n-n\rangle} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1} r^{\langle k\rangle} s^{\langle n+1-k\rangle} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} r^{\langle k\rangle} s^{\langle n+1-k\rangle} + \binom{n}{0} r^{\langle 0\rangle} s^{\langle n+1-0\rangle}$$

$$(r+s)^{\langle n+1\rangle} \overset{*}{=} 1\times r^{\langle n+1\rangle} s^{\langle 0\rangle} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right] r^{\langle k\rangle} s^{\langle n+1-k\rangle} + 1\times r^{\langle 0\rangle} s^{\langle n+1\rangle}.$$

$$(r+s)^{\langle n+1\rangle} \overset{*}{=} \binom{n+1}{n+1} r^{\langle n+1\rangle} s^{\langle n+1-(n+1)\rangle} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} r^{\langle k\rangle} s^{\langle n+1-k\rangle} + \binom{n+1}{0} r^{\langle 0\rangle} s^{\langle n+1-0\rangle}.$$

$$(r+s)^{\langle n+1\rangle} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} r^{\langle k\rangle} s^{\langle n+1-k\rangle}.$$ ceci achève la récurrence.

Remarque.. $*$ est vraie à un petit abus près... En toute rigueur il aurait fallu distinguer deux cas : $n=0$ et $n \geq 1$.

$$\forall (r,s)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\quad (r+s)^{\langle n\rangle} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} r^{\langle k\rangle} s^{\langle n-k\rangle}.$$

---

Q3) $r$ est un réel strictement positif. $x$ est un réel appartenant à $]0,1[$.

a) $$\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r^{\langle n+2\rangle}\, x^{n+2}}{(n+1)!\,(1-x)^{r+1}} \times \frac{n!\,(1-x)^{r+1}}{r^{\langle n+1\rangle}\, x^{n+1}} = \frac{r^{\langle n+2\rangle}}{r^{\langle n+1\rangle}}\times\frac{x}{n+1} = \frac{(r+n+1)\, r^{\langle n+1\rangle}}{r^{\langle n+1\rangle}}\times\frac{x}{n+1}$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r+n+1}{n+1}\times x\ ;\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n}\times x = x$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = x.$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = x$.

Alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p_\varepsilon \Rightarrow \left| \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - x \right| < \varepsilon$

$\dfrac{1-x}{2} \in \mathbb{R}_+^*$ car $x \in ]0,1[$ donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \left| \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - x \right| < \dfrac{1-x}{2}$.

Alors $\forall n \in [\![N,+\infty[\![,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - x \leq \left| \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - x \right| < \dfrac{1-x}{2}$.

$x \in ]0,1[$ et $r>0$

$\forall n \in [\![N,+\infty[\![,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < x + \dfrac{1-x}{2} = \dfrac{1+x}{2}$ et $u_n = \dfrac{r^{\langle n+1 \rangle} x^{n+1}}{n!\,(1-x)^{r+1}} > 0$

Donc $\forall n \in [\![N,+\infty[\![,\ u_{n+1} < \dfrac{1+x}{2} u_n$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{N+n} \leq u_N \left(\dfrac{1+x}{2}\right)^n$.

- la propriété est vraie pour $n=0$ car $\left(\dfrac{1+x}{2}\right)^0 = 1$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément $n$ de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$N+n \geq N$ donc $u_{N+n+1} \leq \dfrac{1+x}{2} u_{N+n}$ et $u_{N+n} \leq u_N \left(\dfrac{1+x}{2}\right)^n$ par hypothèse.

Comme $\dfrac{1+x}{2} \geq 0$: $u_{N+n+1} \leq \dfrac{1+x}{2} u_{N+n} \leq \dfrac{1+x}{2}\, u_N \left(\dfrac{1+x}{2}\right)^n = u_N \left(\dfrac{1+x}{2}\right)^{n+1}$.

Ceci achève la récurrence. Finalement :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{N+n} \leq u_N \left(\frac{1+x}{2}\right)^n.$$

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{N+n} \leq u_N \left(\dfrac{1+x}{2}\right)^n$.

donc $\forall n \in [\![N,+\infty[\![,\ u_n \leq u_N \left(\dfrac{1+x}{2}\right)^{n-N}$. Ainsi

$\forall n \in [\![N,+\infty[\![,\ 0 \leq u_n \leq u_N \left(\dfrac{1+x}{2}\right)^{n-N}$ et $\left|\dfrac{1+x}{2}\right| < 1$ car $x \in ]0,1[$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left( u_N \left(\dfrac{1+x}{2}\right)^{n-N} \right) = u_N \times 0 = 0$. Ainsi par encadrement il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$

d] $r$ Posons : $\forall z \in ]-\infty, 1[, \ f_r(z) = (1-z)^{-r}$.

montrons par récurrence que pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$ $f_r$ est $k$ fois dérivable sur $]-\infty, 1[$ et que $\forall z \in ]-\infty, 1[, \ f_r^{(k)}(z) = r^{\langle k \rangle}(1-z)^{-r-k}$.

- La propriété est vraie pour $k=0$ car $r^{\langle 0 \rangle} = 1$...
- Supposons la propriété vraie pour un élément $k$ de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

Par hypothèse $f_r$ est $k$ fois dérivable sur $]-\infty, 1[$ et $\forall z \in ]-\infty, 1[, f_r^{(k)}(z) = r^{\langle k \rangle}(1-z)^{-r-k}$.

$\forall z \in ]-\infty, 1[, \ 1-z > 0$ donc $z \mapsto (1-z)^{-r-k}$ est dérivable sur $]-\infty, 1[$.

Alors $f_r^{(k)}$ est dérivable sur $]-\infty, 1[$ donc $f_r$ est $k+1$ fois dérivable sur $]-\infty, 1[$.

De plus $\forall z \in ]-\infty, 1[, \ f_r^{(k+1)}(z) = \left(f_r^{(k)}\right)'(z) = r^{\langle k \rangle}(-r-k)(-1)(1-z)^{-r-k-1}$.

$\forall z \in ]-\infty, 1[, \ f_r^{(k+1)}(z) = r^{\langle k \rangle}(r+k)(1-z)^{-r-(k+1)} \underset{\text{Q2 c]}}{=} r^{\langle k+1 \rangle}(1-z)^{-r-(k+1)}$

ceci achève la récurrence.

Pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, $f_r$ est $k$ fois dérivable sur $]-\infty, 1[$ donc $f_r$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$. Nous pouvons alors appliquer à $f_r$ la formule de Taylor avec reste intégral, à l'ordre $n$ "sur $[0, x]$" ($x \in ]0, 1[$).

Alors $f_r(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f_r^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f_r^{(n+1)}(t)\,dt$.

$$f_r(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{r^{\langle k \rangle}(1-0)^{-r-k}}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} r^{\langle n+1 \rangle}(1-t)^{-r-(n+1)}\,dt.$$

$$f_r(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{r^{\langle k \rangle}}{k!} x^k + \frac{r^{\langle n+1 \rangle}}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}}\,dt.$$

Ainsi $(1-x)^{-r} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{r^{\langle k \rangle}}{k!} x^k + \frac{r^{\langle n+1 \rangle}}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}}\,dt$.

donc $(1-x)^{-r} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{r^{\langle k \rangle}}{k!} x^k + R_n$ et ceci pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$.

e] Soit $t \in [0,x]$. $x-t \geqslant 0$ et $\frac{1}{1-t} \geqslant 0$ donc $\frac{x-t}{1-t} \geqslant 0$.

$$x - \frac{x-t}{1-t} = \frac{x-xt-x+t}{1-t} = \frac{t(1-x)}{1-t} \geqslant 0 \quad \text{donc} \quad x - \frac{x-t}{1-t} \geqslant 0 \,;\ \frac{x-t}{1-t} \leqslant x.$$

$t \geqslant 0$, $1-x \geqslant 0$, $\frac{1}{1-t} \geqslant 0$

$\forall t \in [0,x]$, $0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0,x]$, $0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x$ donc $\forall t \in [0,x]$, $0 \leqslant \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \leqslant x^n$.

$\forall t \in [0,x]$, $1-t \geqslant 1-x > 0$ et $r+1 > 0$.

$\forall t \in [0,x]$, $(1-t)^{r+1} \geqslant (1-x)^{r+1} > 0$. $\forall t \in [0,x]$, $0 \leqslant \frac{1}{(1-t)^{r+1}} \leqslant \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

Alors $\forall t \in [0,x]$, $0 \leqslant \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}} \leqslant \frac{x^n}{(1-x)^{r+1}}$ et $x \geqslant 0$.

$$\text{donc } 0 \leqslant \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}}\, dt \leqslant \int_0^x \frac{x^n}{(1-x)^{r+1}}\, dt = \frac{x^n}{(1-x)^{r+1}} \underbrace{\int_0^x 1\, dt}_{x} = \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{r+1}}.$$

de plus $\frac{r\langle n+1\rangle}{n!} \geqslant 0$ car $r > 0$.

$$\text{Par conséquent } 0 \leqslant \frac{r\langle n+1\rangle}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}}\, dt \leqslant \frac{r\langle n+1\rangle\, x^{n+1}}{n!\,(1-x)^{r+1}}.$$

Alors $0 \leqslant R_n \leqslant u_n$ et ceci pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$.

f] $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant R_n \leqslant u_n$ et $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$. Alors par encadrement il vient

$\lim_{n \to +\infty} R_n = 0$.

$$\text{donc } \lim_{n \to +\infty} \left( (1-x)^{-r} - \sum_{k=0}^{n} \frac{r\langle k\rangle}{k!} x^k \right) = 0 \,;\ \lim_{n \to +\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{r\langle k\rangle}{k!} x^k \right) = (1-x)^{-r}.$$

Alors 1) La série de terme général $\frac{r\langle n\rangle}{n!} x^n$ converge.

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r\langle n\rangle}{n!} x^n = (1-x)^{-r} = \frac{1}{(1-x)^r}$ pour tout $r \in ]0,+\infty[$ et pour tout $x \in ]0,1[$.

<u>Remarque</u>.. La formule précédente vaut encore pour $r \in [0,+\infty[$ et $x \in [0,1[$

<u>Exercice</u>.. le démontrer.

Q4 Soit $r$ et $p$ deux réels tels que $0<p<1$ et $r>0$. $1-p \in ]0,1[$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^{<k>}}{k!}(1-p)^k = \frac{1}{(1-(1-p))^r} = \frac{1}{p^r}.$$

donc $$\underline{\underline{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^{<k>}}{k!} p^r (1-p)^k = 1.}}$$

<u>Remarque</u>.. Posons $\forall k \in \mathbb{N}$, $L_{r,p}(k) = \frac{r^{<k>}}{k!} p^r (1-p)^k$.

- $\mathbb{N}$ est dénombrable
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $L_{r,p}(k) \geqslant 0$
- $\sum_{k=0}^{+\infty} L_{r,p}(k) = 1$.

ceci suffit pour dire que $L_{r,p}$ est la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.

Q5 a) Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $P_n(t) = \prod_{k=1}^{n}(t-k+1)$. $X_n = P_n \circ X$.

Le théorème de transfert indique que pour montrer que $X_n$ possède une espérance il suffit de montrer que la série de terme général $P_n(k)P(X=k)$ est absolument convergente. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$P_n(k)P(X=k) = \prod_{i=1}^{n}(k-i+1)\, P(X=k)$. $\prod_{i=1}^{n}(k-i+1) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$.

Si $k \in [\![0,n-1]\!]$, $k(k-1)\cdots(k-n+1) = 0$ car l'un des facteurs de ce produit est nul.

Supposons que $k \in [\![n,+\infty[\![$. $P_n(k) = k(k-1)\cdots(k-n+1) = \frac{k!}{(k-n)!}$.

donc $P_n(k)P(X=k) = \frac{k!}{(k-n)!} \times \frac{r^{<k>}}{k!} p^r (1-p)^k = \frac{r^{<k>}}{(k-n)!} p^r (1-p)^k$.

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_n(k)\,P(X=k) = \begin{cases} \dfrac{r^{\langle k\rangle}}{(k-n)!}\, p^r (1-p)^k & \text{si } k \in [\![n,+\infty[\![ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Observons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_n(k)\,P(X=k) \geq 0$. Alors pour montrer l'existence de l'espérance de $X_n$ il ne reste plus qu'à montrer la convergence de la série de terme général $P_n(k)\,P(X=k)$.

Soit $k \in [\![n,+\infty[\![$, $r^{\langle k\rangle} = \prod_{i=1}^{k} (r+i-1)$.

Supposons que $k \geq n+1$.

$$r^{\langle k\rangle} = \left(\prod_{i=1}^{n} (r+i-1)\right)\left(\prod_{i=n+1}^{k} (r+i-1)\right) \underset{j=i-n}{=} r^{\langle n\rangle} \prod_{j=1}^{k-n} (r+j+n-1).$$

$$r^{\langle k\rangle} = r^{\langle n\rangle} \prod_{j=1}^{k-n} (r+n+j-1) = r^{\langle n\rangle}\,(r+n)^{\langle k-n\rangle}.$$

Si $k=n$ : $r^{\langle k\rangle} = r^{\langle n\rangle} = r^{\langle n\rangle} \times 1 = r^{\langle n\rangle}(r+n)^{\langle 0\rangle} = r^{\langle n\rangle}(r+n)^{\langle k-n\rangle}$.

Donc $\underline{\forall k \in [\![n,+\infty[\![,\ r^{\langle k\rangle} = r^{\langle n\rangle}(r+n)^{\langle k-n\rangle}}$.

Alors $\forall k \in [\![n,+\infty[\![$, $P_n(k)\,P(X=k) = \dfrac{r^{\langle n\rangle}(r+n)^{\langle k-n\rangle}}{(k-n)!}\, p^r (1-p)^k$.

$$\underline{\forall k \in [\![n,+\infty[\![,\ P_n(k)\,P(X=k) = r^{\langle n\rangle}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n \times \frac{(r+n)^{\langle k-n\rangle}}{(k-n)!}\, p^{r+n} (1-p)^{k-n}}.$$

$r+n>0$ et $p \in ]0,1[$ donc la série de terme général $\dfrac{(r+n)^{\langle k\rangle}}{k!}\, p^{r+n}(1-p)^k$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(r+n)^{\langle k\rangle}}{k!}\, p^{r+n}(1-p)^k = 1$ (Q4).

Alors la série de terme général $\dfrac{(r+n)^{\langle k-n\rangle}}{(k-n)!}\, p^{r+n}(1-p)^{k-n}$ converge et

$$\underline{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(r+n)^{\langle k-n\rangle}}{(k-n)!}\, p^{r+n}(1-p)^{k-n} = 1}.$$

Par conséquent la série de terme général $P_n(k)\,P(X=k)$ converge et $\sum_{k=n}^{+\infty} P_n(k)\,P(X=k) = r^{\langle n\rangle}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n$

mieux encore :

1/ la série de terme général $P_n(k)\,P(X=k)$ converge absolument (car nous avons vu que $\forall k\in\mathbb{N},\ P_n(k)\,P(X=k)\geq 0$).

2/ $\sum_{k=0}^{+\infty} P_n(k)\,P(X=k) = \sum_{k=n}^{+\infty} P_n(k)\,P(X=k) = r^{\langle n\rangle}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n$.

Le théorème de transfert montre alors que $X_n = P_n \circ X$ possède une espérance qui vaut $r^{\langle n\rangle}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n$.

b) Posons $P_0 = 1$ et reposons $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in\mathbb{R},\ P_n(t) = \prod_{k=1}^{n}(t-k+1)$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille d'éléments non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$ de degrés échelonnés.

$(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est donc une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ dont le cardinal coïncide avec la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$. $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Alors $\exists(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)\in\mathbb{R}^{n+1},\ \forall t\in\mathbb{R},\ t^n = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k P_k$.

$X^n = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k P_k\circ X = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k X_k$. Pour tout $k$ dans $[\![1,n]\!]$, $X_k$ possède une espérance et la variable certaine égale à $\alpha_0$ possède également une espérance. Ainsi $X^n$ est combinaison linéaire de $n+1$ variables aléatoires qui possèdent une espérance. Donc $X^n$ possède une espérance. Cela suffit pour dire que $X$ possède un moment d'ordre $n$ et ceci pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$ et même pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$.

X admet des moments de tous ordres.

Ainsi $X$ possède une espérance et une variance.

$X_1 = X - 1 + 1 = X$. Alors $E(X) = E(X_1) = r^{\langle 1\rangle}\left(\frac{1-p}{p}\right)^1$. $E(X) = r\,\frac{1-p}{p}$.

$X_2 = X(X-1)$. Alors $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X(X-1)+X) - (E(X))^2 = E(X_2) + E(X) - (E(X))^2$.

$V(X) = r^{\langle 2\rangle}\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + r\,\frac{1-p}{p} - \left(r\,\frac{1-p}{p}\right)^2 = r(r+1)\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + r\,\frac{1-p}{p} - \left(r\,\frac{1-p}{p}\right)^2 = r\,\frac{1-p}{p}\left[(r+1)\frac{1-p}{p} + 1 - r\,\frac{1-p}{p}\right]$

$V(X) = r\,\frac{1-p}{p}\left[r\,\frac{1-p}{p} + \frac{1-p}{p} + 1 - r\,\frac{1-p}{p}\right] = r\,\frac{1-p}{p} \times \frac{1}{p} = r\,\frac{1-p}{p^2}$. $V(X) = r\,\frac{1-p}{p^2}$.

Q6 $Z(\Omega) = \mathbb{N}$. $(\{X=k\})_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. Soit $n \in \mathbb{N}$.

La formule des probabilités totales donne : $P(Z=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{X+Y=n\} \cap \{X=k\})$.

$$P(Z=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{X=k\} \cap \{Y=n-k\}) \underset{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\,P(Y=n-k) \underset{Y(\Omega)=\mathbb{N}}{=} \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\,P(Y=n-k).$$

$$P(Z=n) \underset{\substack{X \hookrightarrow BN(r,p) \\ Y \hookrightarrow BN(s,p)}}{=} \sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{r^{\langle k\rangle}}{k!}\,p^r\,(1-p)^k\right)\left(\frac{s^{\langle n-k\rangle}}{(n-k)!}\,p^s\,(1-p)^{n-k}\right)\right] = p^{r+s}\,(1-p)^n\,\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k\rangle}.$$

$$P(Z=n) = p^{r+s}\,(1-p)^n\,\frac{1}{n!}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k\rangle}}_{(r+s)^{\langle n\rangle} \text{ d'après Q2 c)}}$$

donc $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Z=n) = \frac{(r+s)^{\langle n\rangle}}{n!}\,p^{r+s}\,(1-p)^n$.

Ainsi $Z$ suit la loi $BN(r+s, p)$.