Code épreuve : 280

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2013

Conception : H.E.C.

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES

Mardi 30 avril 2013, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

Dans tout le problème, pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$:

- on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels et $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$;
- la matrice transposée d'une matrice A de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est notée ${}^tA$;
- on note I_p la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et pour toute matrice A, même nulle, de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on pose par convention : $A^0 = I_p$;
- la matrice inverse d'une matrice inversible A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est notée A^{-1}.

Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $M_n = \big(m_{i,j}(n)\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$.

On dit que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $M = \big(m_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, si pour tout couple $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} m_{i,j}(n) = m_{i,j}$. On note alors : $M = \lim\limits_{n\to+\infty} M_n$.

On admet sans démonstration que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ qui convergent respectivement vers les matrices A et B, et si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_{q,s}(\mathbb{R})$ $(s \geqslant 1)$ qui converge vers $C \in \mathcal{M}_{q,s}(\mathbb{R})$, alors la suite $(A_n + B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $A + B$, la suite $(A_nC_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers AC, et pour tout réel α, la suite $(\alpha A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers αA.

Le problème étudie quelques aspects mathématiques du contrôle de systèmes linéaires.

Partie I. Quelques propriétés de suites matricielles

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on pose pour tout x réel et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T_{A,n}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(xA)^k$.

1. *Exemple.* Dans cette question, $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ est la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ a_{i,j} = 1\,.$$

Tournez la page S.V.P.

a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.

b) Soit V la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Calculer le produit AV et en déduire une valeur propre de A.

c) Montrer que 0 est une valeur propre de A et trouver la dimension du sous-espace propre associé.

d) Exprimer A^2 en fonction de A.
Montrer que pour tout x réel et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{A,n}(x)$ appartient à $\mathrm{Vect}(I_p, A)$.

e) En déduire que pour tout x réel, la suite de matrices $\big(T_{A,n}(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice $T_A(x)$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par : $T_A(x) = I_p + \dfrac{e^{px}-1}{p}A$.

f) Calculer $T_A(0)$. Exprimer pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, le produit $T_A(x)T_A(y)$ en fonction de $T_A(x+y)$.
En déduire que pour tout x réel, la matrice $T_A(x)$ est inversible et déterminer son inverse.

2. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$: $A^k = \big(a_{i,j}^{(k)}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ et $\mu_k = \max\limits_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} \big|a_{i,j}^{(k)}\big|$.

a) À l'aide de l'identité $A^{k+1} = A\,A^k$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\mu_{k+1} \leqslant p^k \mu_1^{k+1}$.

b) En déduire que pour tout x réel, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{\mu_k}{k!} x^k$ est convergente.

c) Montrer que pour tout réel x et pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{a_{i,j}^{(k)}}{k!} x^k$ est convergente.

d) Montrer que pour tout x réel, la suite $\big(T_{A,n}(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice $T_A(x)$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
Que vaut $T_A(x)$ lorsque $p = 1$ et que l'unique coefficient de A est un réel a ?

3. Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

a) Vérifier que pour tout x réel et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice $T_{D,n}(x)$ est diagonale.

b) En déduire que pour tout x réel, la matrice $T_D(x)$ est diagonale et donner l'expression de ses coefficients diagonaux en fonction de ceux de D.

c) On pose pour tout $r \in \mathbb{N}^*$: $D_r = r\left(T_D\left(\dfrac{1}{r}\right) - I_p\right)$. Montrer que la suite $(D_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$ converge vers D.

4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, P une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $A' = P^{-1}AP$.

a) Établir pour tout x réel, l'égalité : $T_{A'}(x) = P^{-1}T_A(x)P$.

b) On suppose que A est diagonalisable. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{r\to+\infty} r^{n+1}\left(T_A\left(\frac{1}{r}\right) - T_{A,n}\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \frac{1}{(n+1)!}A^{n+1}. \quad (*)$$

(On pourra traiter dans un premier temps le cas où A est diagonale)

On admet dans la suite du problème que la relation $(*)$ reste valable pour toute matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Partie II. Polynômes annulateurs et matrices de Kalman

Soit E un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E et φ un élément de $\mathcal{L}(E)$. On note id_E l'endomorphisme identité de E.

5.a) Rappeler la dimension de $\mathcal{L}(E)$ et justifier l'existence d'une suite finie $(z_k)_{1\leqslant k\leqslant p^2}$ de nombres complexes tels que le polynôme $\prod\limits_{k=1}^{p^2}(X - z_k)$ de $\mathbb{C}[X]$ soit un polynôme annulateur de φ.

b) En considérant, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, les endomorphismes $(\varphi - z_k\,\mathrm{id}_E)$, montrer que φ possède au moins une valeur propre.

6. On suppose l'existence d'un entier k vérifiant $1 \leqslant k < p$ et d'un sous-espace vectoriel F de dimension k stable par φ. Soit H un supplémentaire de F dans E et π le projecteur de E sur H parallèlement à F.

   a) Montrer qu'il existe un vecteur non nul $v \in H$ et un nombre complexe λ vérifiant la relation : $\pi \circ \varphi(v) = \lambda v$.

   b) Montrer que la somme des deux sous-espaces vectoriels F et $\mathrm{Vect}(v)$ est directe et stable par φ.

7. À l'aide des questions précédentes, établir par récurrence sur p l'existence d'une base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_p)$ de E telle que pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\varphi(v_k) \in \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$.

8. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$. On pose pour tout $k \in [\![1,p]\!]$: $F_k = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$.

   a) Montrer que pour tout $k \in [\![2,p]\!]$, on a : $(\varphi - m_{k,k}\,\mathrm{id}_E)(F_k) \subset F_{k-1}$.

   b) En déduire que le polynôme $\prod_{k=1}^{p} (X - m_{k,k})$ de $\mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de la matrice M.

9. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. En utilisant la question 8.b, montrer que A admet un polynôme annulateur appartenant à $\mathbb{R}[X]$ et de degré p.

10. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et B une matrice-colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

    Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{G}_q$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ engendré par $B, AB, A^2B, \ldots, A^{q-1}B$ et K_q la matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ dont les colonnes successives sont $B, AB, A^2B, \ldots, A^{q-1}B$.

    La matrice K_q est appelée matrice de Kalman d'ordre q associée au couple (A, B).

    a) Montrer que pour tout entier $q > p$, on a : $\mathcal{G}_q = \mathcal{G}_p$.

    b) Justifier l'existence d'un sous-espace vectoriel $\mathcal{S}$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété suivante : pour qu'une matrice G de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ appartienne à $\mathcal{G}_p$, il faut et il suffit que pour tout élément S de $\mathcal{S}$, on ait : ${}^tSG = 0$.

    c) En déduire que si une suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{G}_p$ est convergente, sa limite G appartient à $\mathcal{G}_p$.

    d) À l'aide des résultats précédents, montrer que pour tout x réel, la matrice-colonne $T_A(x)B$ appartient à $\mathcal{G}_p$, où $T_A(x)$ a été définie dans la question 2.d.

Partie III. Contrôle de systèmes linéaires

On conserve dans cette partie les définitions et notations de la question 10. Dans les questions 12, 13 et 14, on note p un entier supérieur ou égal à 2. Les questions 13 et 14 sont indépendantes des questions 11 et 12.

On note $\mathcal{C}^0$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

11. *Exemple :* $p = 1$. Soit (a, b) un couple de réels.

    a) Soit $u \in \mathcal{C}^0$. On cherche une fonction f définie et dérivable sur $[0, 1]$, de dérivée f', vérifiant $f(0) = 0$ et telle que pour tout $t \in [0, 1]$, $f'(t) = af(t) + b\,u(t)$.

    Calculer la dérivée de la fonction $h : t \mapsto h(t) = f(t)\,\mathrm{e}^{-at}$, et en déduire que f est donnée par :

    $$\forall t \in [0,1],\ f(t) = b \int_0^t u(x)\,\mathrm{e}^{a(t-x)}\,\mathrm{d}x\,. \quad (**)$$

    b) On dit que le couple (a, b) est *contrôlable*, si pour tout réel y (appelé *cible*), il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^0$ (appelée *contrôle*) telle que toute fonction f définie et dérivable sur $[0, 1]$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(t) = af(t) + b\,u(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$, atteint la cible en 1, c'est-à-dire vérifie $f(1) = y$.

    Donner l'expression de la fonction f définie par $(**)$ lorsque la fonction u est constante sur $[0, 1]$.

    En déduire que le couple (a, b) est contrôlable si et seulement si $b \neq 0$.

12. Pour tout $x \in [0, 1]$, on pose : $W(x) = T_A(1-x)B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $W(x) = \big(W_k(x)\big)_{1\leqslant k\leqslant p}$, où pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $W_k(x)$ est le coefficient de la k-ième ligne de $W(x)$.

    On admet que pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, la fonction $x \mapsto W_k(x)$ appartient à $\mathcal{C}^0$ et on définit alors, pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^0$, la matrice-colonne $\int_0^1 u(x)W(x)\,\mathrm{d}x$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ par :

    $$\int_0^1 u(x)W(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int_0^1 u(x)W_k(x)\,\mathrm{d}x\right)_{1\leqslant k\leqslant p}.$$

Par analogie avec la question 11.b, on dit que le couple (A, B) est *contrôlable*, si pour toute matrice-colonne $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ (*cible*), il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^0$ (*contrôle*) vérifiant l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 u(x)W(x)\,\mathrm{d}x = Y$.

a) Soit $u \in \mathcal{C}^0$. Justifier que pour tout $x \in [0,1]$, $u(x)W(x)$ appartient à $\mathcal{G}_p$.

En déduire que $\displaystyle\int_0^1 u(x)W(x)\,\mathrm{d}x$ appartient à $\mathcal{G}_p$.

b) Soit Z un élément non nul de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^0$, on ait : $\displaystyle\int_0^1 u(x)\,{}^tZ\,W(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a : ${}^tZ\,W(x) = 0$.

c) En déduire, à l'aide de la relation $(*)$ (question 4.b), que pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on a : ${}^tZA^{k-1}B = 0$.

d) Déduire des résultats précédents que le couple (A, B) est contrôlable, si et seulement si la matrice de Kalman K_p est inversible.

Dans les questions 13 et 14, on suppose que K_p est inversible et on cherche à optimiser le contrôle s d'un système linéaire discret en minimisant une fonction de coût quadratique J.

13. Soit q un entier vérifiant $q \geqslant p$. Pour tout q-uplet $s = (s_1, s_2, \ldots, s_q)$ de $\mathbb{R}^q$, appelé *contrôle discret*, on définit la suite finie $\left(X_{s,k}\right)_{0\leqslant k\leqslant q}$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ par :

$$\begin{cases} X_{s,0} = 0 \ \text{(matrice-colonne nulle)} \\ \forall k \in [\![1,q]\!],\ X_{s,k} = A\,X_{s,k-1} + s_k\,B \end{cases}$$

a) Calculer $X_{s,q}$ et trouver une matrice-colonne $C_s \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ telle que : $X_{s,q} = K_q\,C_s$.

b) Établir pour toute matrice-colonne $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ (*cible*), l'existence d'un contrôle discret s tel que $X_{s,q} = Y$.

14. On cherche ici à déterminer un *contrôle discret optimal* permettant d'atteindre une cible $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Soit J la fonction de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $J(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{q} s_k^2$.

a) On admet sans démonstration que la matrice $K_q\,{}^tK_q$ est inversible.
Montrer que le problème de minimisation de J sous la contrainte $X_{s,q} = Y$ admet un unique point critique s^* donné par : $C_{s^*} = {}^tK_q\left(K_q\,{}^tK_q\right)^{-1}Y$.

b) Montrer que s^* réalise un minimum global de J sous la contrainte $X_{s,q} = Y$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 13 1223 – D'après documents fournis