HEC 2013

PARTIE I Quelques propriétés de suites matricielles

Q1 a) La matrice A est symétrique à coefficients réels donc <u>A est diagonalisable.</u>

b) Posons $V' = AV = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_p \end{pmatrix}$.

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $v'_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \times 1 = \sum_{j=1}^{p} 1 \times 1 = p$. Ainsi $V' = pV$. <u>$AV = pV$.</u>

$V \neq 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$ donc <u>p est valeur propre de A</u> et V est un vecteur propre associé.

c) Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$ notons $C_j(A)$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

$\forall j \in [\![1,p]\!]$, $C_j(A) = V$. Alors $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(C_1(A), C_2(A), \dots, C_p(A)) = \dim \operatorname{Vect}(V) \overset{V \neq 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}}{=} 1$.

$\operatorname{rg} A = 1 < p$. A n'est pas inversible donc <u>0 est valeur propre de A</u>.

$\dim SEP(A,0) = p - \operatorname{rg}(A - 0 I_p) = p - \operatorname{rg} A = p - 1$.

<u>La dimension du sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0 est $p-1$.</u>

d) Posons $A^2 = (a_{i,j}^{(2)})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$.

$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $a_{i,j}^{(2)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\, a_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} 1 = p = p \times 1 = p\, a_{i,j}$.

Donc <u>$A^2 = pA$.</u>

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = p^{k-1} A$.

- La propriété est vraie pour $k = 1$ car $A^1 = A = p^0 A = p^{1-1} A$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément k de $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $k+1$.

$A^{k+1} = A A^k \underset{\text{hypothèse de récurrence}}{=} A(p^{k-1} A) = p^{k-1} A^2 = p^{k-1} p A = p^k A = p^{(k+1)-1} A$. Ceci achève la récurrence.

<u>$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = p^{k-1} A$.</u>

Soit $x\in\mathbb{R}$. $T_{A,0}(x)=\sum_{k=0}^{0}\frac{1}{k!}(xA)^k=I_p\in Vect(I_p,A)$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $T_{A,n}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(xA)^k=I_p+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}x^kA^k=I_p+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}x^kp^{k-1}A$.

$T_{A,n}(x)=I_p+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}p^{k-1}\right)A\in Vect(I_p,A)$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ T_{A,n}(x)\in Vect(I_p,A)$.

e) Soit $x\in\mathbb{R}$ et soit $n\in\mathbb{N}^*$

$T_{A,n}(x)=I_p+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}p^{k-1}\right)A=I_p+\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(px)^k}{k!}\right)A$

$T_{A,n}(x)=I_p+\frac{1}{p}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(px)^k}{k!}-1\right]A$.

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{p}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(px)^k}{k!}-1\right]=\frac{1}{p}(e^{px}-1)$.

ceci suffit pour dire que la suite $(T_{A,n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $T_A(x)$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par $T_A(x)=I_p+\frac{e^{px}-1}{p}A$ et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}$.

f) $T_A(0)=I_p+\frac{e^{p\times 0}-1}{p}A=I_p$. $T_A(0)=I_p$.

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$T_A(x)T_A(y)=\left(I_p+\frac{e^{px}-1}{p}A\right)\left(I_p+\frac{e^{py}-1}{p}A\right)=I_p^2+\left(\frac{e^{px}-1+e^{py}-1}{p}\right)A+\frac{(e^{px}-1)(e^{py}-1)}{p^2}A^2$

Rappelons que $A^2=pA$ donc $\frac{1}{p^2}A^2=\frac{1}{p}A$. De plus $I_p^2=I_p$!!

donc $T_A(x)T_A(y)=I_p+\frac{1}{p}\left[e^{px}+e^{py}-2+(e^{px}-1)(e^{py}-1)\right]A$.

$T_A(x)T_A(y)=I_p+\frac{1}{p}\left[e^{px}+e^{py}-2+e^{p(x+y)}-e^{px}-e^{py}+1\right]A=I_p+\frac{1}{p}\left(e^{p(x+y)}-1\right)A$.

donc $T_A(x)T_A(y)=T_A(x+y)$ et ceci pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ I_p=T_A(0)=T_A(x+(-x))=T_A(x)T_A(-x)$.

Donc pour tout réel x, $T_A(x)$ est inversible et $(T_A(x))^{-1}=T_A(-x)$.

(Q2) a) Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N},\ \gamma_{k+1} \leq p^k \gamma_1^{k+1}$

- $\gamma_{0+1} = \gamma_1 = p^0 \gamma_1 \overset{!}{\leq} p^0 \gamma_1 = p^0 \gamma_1^{0+1}$. La propriété est vraie pour $k=0$.
- Supposons la propriété vraie pour $k-1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour k.

L'hypothèse de récurrence indique que $\gamma_k \leq p^{k-1} \gamma_1^k$.

$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ a_{i,j}^{(k+1)} \underset{A^{k+1}=AA^k}{=} \sum_{r=1}^{p} a_{i,r} a_{r,j}^{(k)}$.

$0 \leq |a_{i,r}| \leq \gamma_1$ & $0 \leq |a_{r,j}^{(k)}| \leq \gamma_k$.

$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ |a_{i,j}^{(k+1)}| = \left|\sum_{r=1}^{p} a_{i,r} a_{r,j}^{(k)}\right| \leq \sum_{r=1}^{p} |a_{i,r}||a_{r,j}^{(k)}| \leq \sum_{r=1}^{p} \gamma_1 \gamma_k$.

$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ |a_{i,j}^{(k+1)}| \leq \sum_{r=1}^{p} \gamma_1 p^{k-1} \gamma_1^k = p\gamma_1 p^{k-1}\gamma_1^k = p^k \gamma_1^{k+1}$.

$\gamma_1 \geq 0$ et $\gamma_k \leq p^{k-1}\gamma_1^k$

Alors $\gamma_{k+1} = \max\limits_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} |a_{i,j}^{(k+1)}| \leq p^k \gamma_1^{k+1}$. Ceci achève la récurrence.

<u>$\forall k \in \mathbb{N},\ \gamma_{k+1} \leq p^k \gamma_1^{k+1}$.</u>

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. $0 \leq \left|\frac{\gamma_k}{k!} x^k\right| = \frac{\gamma_k}{k!} |x|^k \leq \frac{p^k \gamma_1^{k+1}}{k!} |x|^k = \gamma_1 \frac{(p\gamma_1|x|)^k}{k!}$.

De plus la série de terme général $\frac{(p\gamma_1|x|)^k}{k!}$ converge. Donc la série de terme général $\gamma_1 \frac{(p\gamma_1|x|)^k}{k!}$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général $\left|\frac{\gamma_k}{k!} x^k\right|$.

Alors la série de terme général $\frac{\gamma_k}{k!} x^k$ est absolument convergente donc convergente.

<u>Pour tout x dans $\mathbb{R}$, la série $\sum_{k\geq 0} \frac{\gamma_k}{k!} x^k$ converge.</u>

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$.

$\forall k \in \mathbb{N},\ \left|\frac{a_{i,j}^{(k)}}{k!} x^k\right| = \frac{|a_{i,j}^{(k)}||x|^k}{k!} \leq \frac{\gamma_k |x|^k}{k!} = \left|\frac{\gamma_k x^k}{k!}\right|$.

La convergence de la série de terme général $\left|\dfrac{r^k x^k}{k!}\right|$ et les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $\left|\dfrac{a_{i,j}^{(k)} x^k}{k!}\right|$ est convergente.

Alors la série de terme général $\dfrac{a_{i,j}^{(k)} x^k}{k!}$ est absolument convergente donc convergente.

Pour tout x dans $\mathbb{R}$ et pour tout (i,j) dans $[\![1,p]\!]^2$, la série $\sum\limits_{k\geq 0} \dfrac{a_{i,j}^{(k)}}{k!} x^k$ converge.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N},\quad T_{A,n}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}(xA)^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} x^k A^k = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} x^k a_{i,j}^{(k)}\right)_{1\leq i,j\leq p}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ T_{A,n}(x) = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_{i,j}^{(k)}}{k!} x^k\right)_{1\leq i,j\leq p}$

Pour tout (i,j) dans $[\![1,p]\!]^2$ la série $\sum\limits_{k\geq 0} \dfrac{a_{i,j}^{(k)}}{k!} x^k$ est convergente.

Donc pour tout (i,j) dans $[\![1,p]\!]^2$, la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_{i,j}^{(k)}}{k!} x^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Cela signifie alors que la suite $(T_{A,n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de $M_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice $T_A(x)$ de $M_p(\mathbb{R})$ et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}$.

$p=1,\ a_{1,1}=a,\ \forall k\in\mathbb{N},\ a_{1,1}^{(k)} = a^k$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k!} x^k = e^{ax}$.

Alors $T_A(x)$ est la matrice de $M_1(\mathbb{R})$ égale à (e^{ax}). (▲)

Q3 a) Posons $D = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_p)$. Alors $\forall k\in\mathbb{N},\ D^k = \mathrm{Diag}(d_1^k, d_2^k, \dots, d_p^k)$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$T_{D,n}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}(xD)^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} D^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \mathrm{Diag}(d_1^k, d_2^k, \dots, d_p^k)$.

$T_{D,n}(x) = \mathrm{Diag}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(d_1 x)^k}{k!}, \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(d_2 x)^k}{k!}, \dots, \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(d_p x)^k}{k!}\right)$.

(▲) Résultat qui conduit à noter e^{xA} la matrice $T_A(x)$, dans la littérature classique...

Pour tout réel x et pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $T_{D,n}(x)$ est une matrice diagonale.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{D,n}(x) = \mathrm{Diag}\left(\sum_{\ell=0}^{n} \frac{(d_1 x)^\ell}{\ell!}, \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(d_2 x)^\ell}{\ell!}, \dots, \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(d_p x)^\ell}{\ell!}\right)$

Or $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(d_i x)^\ell}{\ell!} = e^{d_i x}$.

ceci suffit alors pour dire que $(T_{D,n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(e^{d_1 x}, e^{d_2 x}, \dots, e^{d_p x})$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Si D est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_p)$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, pour tout x dans $\mathbb{R}$ la suite $(T_{D,n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(e^{d_1 x}, e^{d_2 x}, \dots, e^{d_p x})$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ donc $T_D(x)$ $\mathrm{Diag}(e^{d_1 x}, e^{d_2 x}, \dots, e^{d_n x})$.

c) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. $D_r = r\left(T_D\left(\frac{1}{r}\right) - I_p\right) = r\left(\mathrm{Diag}\left(e^{\frac{d_1}{r}}, e^{\frac{d_2}{r}}, \dots, e^{\frac{d_p}{r}}\right) - I_p\right)$.

$D_r = \mathrm{Diag}\left(r\left(e^{\frac{d_1}{r}} - 1\right), r\left(e^{\frac{d_2}{r}} - 1\right), \dots, r\left(e^{\frac{d_p}{r}} - 1\right)\right)$.

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $r\left(e^{\frac{d_i}{r}} - 1\right) \underset{r \mapsto +\infty}{\sim} r\frac{d_i}{r} = d_i$ car $\lim\limits_{r\mapsto+\infty} \frac{d_i}{r} = 0$.

donc $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\lim\limits_{r\mapsto+\infty}\left(r\left(e^{\frac{d_i}{r}} - 1\right)\right) = d_i$. ceci suffit pour dire que la suite $(D_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$ converge vers D ou la suite $\left(r\left(T_D\left(\frac{1}{r}\right) - I_p\right)\right)_{r\in\mathbb{N}^*}$ converge vers D.

Q4 a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{A',n}(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!}(xA')^\ell = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} x^\ell (P^{-1}AP)^\ell = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{x^\ell}{\ell!} P^{-1}A^\ell P = P^{-1}\left(\sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!}(xA)^\ell\right)P$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{A',n}(x) = P^{-1} T_{n,A}(x) P$.

la suite $(T_{n,A}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T_{A,x}$ et la suite constante et égale à P converge vers P. donc la suite $(T_{n,A}(x)P)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T_A(x)P$.

Comme la suite constante égale à P^{-1} converge vers P^{-1}, la suite $(P^{-1}T_{A,n}(x)P)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $P^{-1}T_A(x)P$. Or cette suite est égale à la suite $(T_{A',n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $T_{A'}(x)$.

Ainsi $T_{A'}(x) = P^{-1}T_A(x)P$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ T_{A'}(x) = P^{-1}T_A(x)P$.

b) A est diagonalisable donc il existe une matrice inversible Q de $M_p(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}AQ$ soit une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_p)$.

Etape 1 $\boxed{\text{Montrer que } \forall n\in\mathbb{N},\ \lim\limits_{r\to+\infty} r^{n+1}\left(T_D\left(\frac{1}{r}\right) - T_{D,n}\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}}$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\forall r\in\mathbb{N}^*,\ r^{n+1}\left(T_D\left(\tfrac{1}{r}\right) - T_{D,n}\left(\tfrac{1}{r}\right)\right) \overset{\text{vu dans Q3}}{=} r^{n+1}\left(\mathrm{Diag}\left(e^{\frac{d_1}{r}}, e^{\frac{d_2}{r}}, \dots, e^{\frac{d_p}{r}}\right) - \mathrm{Diag}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{d_1}{r}\right)^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{d_p}{r}\right)^k}{k!}\right)\right)$$

$\boxed{▲}$

$$\forall r\in\mathbb{N}^*,\ r^{n+1}\left(T_D\left(\tfrac{1}{r}\right) - T_{D,n}\left(\tfrac{1}{r}\right)\right) = \mathrm{Diag}\left(r^{n+1}\left(e^{d_1/r} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(d_1/r)^k}{k!}\right), \dots, r^{n+1}\left(e^{d_p/r} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(d_p/r)^k}{k!}\right)\right).$$

Notons que $\frac{1}{(n+1)!}D^{n+1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{d_1^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{d_2^{n+1}}{(n+1)!}, \dots, \frac{d_p^{n+1}}{(n+1)!}\right)$.

Il convient donc de montrer que $\forall i\in[\![1,p]\!],\ \lim\limits_{r\to+\infty}\left(r^{n+1}\left(e^{\frac{d_i}{r}} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(d_i/r)^k}{k!}\right)\right) = \frac{d_i^{n+1}}{(n+1)!}$.

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

Montrons que $\lim\limits_{r\to+\infty}\left(r^{n+1}\left(e^{\alpha/r} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha/r)^k}{k!}\right)\right) = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}$ ou encore que

$\lim\limits_{r\to+\infty}\left(r^{n+1}\left(e^{\alpha/r} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha/r)^k}{k!}\right) - \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}\right) = 0$ ou encore que

$$\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} = r^{n+1}\frac{(\alpha/r)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\lim_{r\to+\infty}\left(r^{n+1}\left(e^{\alpha/r} - \sum_{k=0}^{n+1}\frac{(\alpha/r)^k}{k!}\right)\right) = 0.$$

Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi(x) = e^x$. φ est de classe C^{n+2} sur $\mathbb{R}$ et $\forall k\in[\![0,n+2]\!],\ \varphi^{(k)} = \varphi$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliqué à l'ordre $n+1$ à ψ donne :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \left|\psi(x)-\sum_{\ell=0}^{n+1}\frac{x^\ell}{\ell!}\psi^{(\ell)}(0)\right|\leq\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}\max_{u\in\overset{\leftrightarrow}{[0,x]}}|\psi^{(n+2)}(u)|.$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \left|e^x-\sum_{\ell=0}^{n+1}\frac{x^\ell}{\ell!}\right|\leq\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}\max_{u\in\overset{\leftrightarrow}{[0,x]}}e^u=\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}e^{\max(x,0)}\leq\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}e^{|x|}.$$

Alors $\forall r\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\left|e^{\frac{\alpha}{r}}-\sum_{\ell=0}^{n+1}\frac{(\alpha/r)^\ell}{\ell!}\right|\leq\frac{|\alpha/r|^{n+2}}{(n+2)!}e^{|\alpha/r|}$.

$$\forall r\in\mathbb{N}^*,\quad \left|r^{n+1}\left(e^{\frac{\alpha}{r}}-\sum_{\ell=0}^{n+1}\frac{(\alpha/r)^\ell}{\ell!}\right)\right|=r^{n+1}\left|e^{\alpha/r}-\sum_{\ell=0}^{n+1}\frac{(\alpha/r)^\ell}{\ell!}\right|\leq r^{n+1}\frac{|\alpha/r|^{n+2}}{(n+2)!}e^{|\alpha/r|}$$

$$\forall r\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq\left|r^{n+1}\left(e^{\frac{\alpha}{r}}-\sum_{\ell=0}^{n+1}\frac{(\alpha/r)^\ell}{\ell!}\right)\right|\leq\frac{1}{r}\,\frac{|\alpha|^{n+2}}{(n+2)!}e^{|\alpha|/r}.$$

or $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\left(\frac{1}{r}\,\frac{|\alpha|^{n+2}}{(n+2)!}e^{|\alpha|/r}\right)=0\times\frac{|\alpha|^{n+2}}{(n+2)!}\times1=0$.

donc par encadrement $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\left(r^{n+1}\left(e^{\frac{\alpha}{r}}-\sum_{\ell=0}^{n+1}\frac{(\alpha/r)^\ell}{\ell!}\right)\right)=0$.

Alors $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\left[r^{n+1}\left(e^{\frac{\alpha}{r}}-\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(\alpha/r)^\ell}{\ell!}\right)-r^{n+1}\times\frac{(\alpha/r)^{n+1}}{(n+1)!}\right]=0$.

donc $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\left[r^{n+1}\left(e^{\alpha/r}-\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(\alpha/r)^\ell}{\ell!}\right)-\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}\right]=0$

Ainsi $\displaystyle\underline{\underline{\lim_{r\to+\infty}\left(r^{n+1}\left(e^{\alpha/r}-\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(\alpha/r)^\ell}{\ell!}\right)\right)=\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}}}$ et ceci pour tout réel α.

Alors $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\left(r^{n+1}\left(e^{d_i/r}-\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(d_i/r)^\ell}{\ell!}\right)\right)=\frac{d_i^{n+1}}{(n+1)!}$.

$\boxed{\blacktriangle}$ permet alors de dire que la suite $\left(r^{n+1}\left(T_D\left(\frac{1}{r}\right)-T_{D,n}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right)_{r\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice diagonale de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ égale à $\mathrm{Diag}\left(\frac{d_1^{n+1}}{(n+1)!},\frac{d_2^{n+1}}{(n+1)!},\dots,\frac{d_p^{n+1}}{(n+1)!}\right)$ qui n'est autre que la matrice $\frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}$.

Ainsi $\left(r^{n+1}\left(T_D(\frac{1}{r})-T_{D,n}(\frac{1}{r})\right)\right)_{r\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}$.

Etape 2 On montre le résultat.

Rappelons que $\mathcal{P}^{-1}A\mathcal{P}=D$. Ce que nous avons vu dans a) permet de dire que

$\forall r\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}^{-1}T_A(\frac{1}{r})\mathcal{P}=T_D(\frac{1}{r})$ et $\mathcal{P}^{-1}T_{A,n}(\frac{1}{r})\mathcal{P}=T_{D,n}(\frac{1}{r})$.

donc $\forall r\in\mathbb{N}^*$, $T_A(\frac{1}{r})=\mathcal{P}T_D(\frac{1}{r})\mathcal{P}^{-1}$ et $T_{A,n}(\frac{1}{r})=\mathcal{P}T_{D,n}(\frac{1}{r})\mathcal{P}^{-1}$.

Alors $\forall r\in\mathbb{N}^*$, $r^{n+1}\left(T_A(\frac{1}{r})-T_{A,n}(\frac{1}{r})\right)=r^{n+1}\left(\mathcal{P}T_D(\frac{1}{r})\mathcal{P}^{-1}-\mathcal{P}T_{D,n}(\frac{1}{r})\mathcal{P}^{-1}\right)$.

$\forall r\in\mathbb{N}^*$, $r^{n+1}\left(T_A(\frac{1}{r})-T_{A,n}(\frac{1}{r})\right)=\mathcal{P}\left(r^{n+1}\left(T_D(\frac{1}{r})-T_{D,n}(\frac{1}{r})\right)\right)\mathcal{P}^{-1}$.

Or la suite $\left(r^{n+1}\left(T_D(\frac{1}{r})-T_{D,n}(\frac{1}{r})\right)\right)_{r\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}$, la suite constante égale à $\mathcal{P}$ converge vers $\mathcal{P}$ et la suite constante égale à $\mathcal{P}^{-1}$ converge vers $\mathcal{P}^{-1}$.

Alors la suite $\left(\mathcal{P}\left(r^{n+1}\left(T_D(\frac{1}{r})-T_{D,n}(\frac{1}{r})\right)\right)\mathcal{P}^{-1}\right)_{r\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\mathcal{P}\left(\frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}\right)\mathcal{P}^{-1}$.

Donc la suite $\left(r^{n+1}\left(T_A(\frac{1}{r})-T_{A,n}(\frac{1}{r})\right)\right)_{r\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{(n+1)!}\mathcal{P}D^{n+1}\mathcal{P}^{-1}$.

Or $\frac{1}{(n+1)!}\mathcal{P}D^{n+1}\mathcal{P}^{-1}=\frac{1}{(n+1)!}(\mathcal{P}D\mathcal{P}^{-1})^{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}A^{n+1}$.

Finalement, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la suite $\left(r^{n+1}\left(T_A(\frac{1}{r})-T_{A,n}(\frac{1}{r})\right)\right)_{r\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{(n+1)!}A^{n+1}$.

PARTIE II Polynômes annulateurs et matrices de Kalman

Q5 a) $\mathcal{L}(E)$ est isomorphe à $M_p(\mathbb{C})$ donc $\underline{\dim \mathcal{L}(E) = p^2}$.

$(Id_E, \varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{p^2+1})$ est une famille de $\mathcal{L}(E)$ de cardinal p^2+1. C'est donc une famille liée de $\mathcal{L}(E)$ car $\dim \mathcal{L}(E) = p^2$.

Alors $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p^2}) \in \mathbb{C}^{p^2+1}$, $\sum_{k=0}^{p^2} \alpha_k \varphi^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p^2}) \neq 0_{\mathbb{C}^{p^2+1}}$

Posons $Q = \sum_{k=0}^{p^2} \alpha_k X^k$. $Q \in \mathbb{C}[X]$, $Q \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$ et $Q(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Supposons Q constant. Alors $Q = \alpha_0$. Donc $0_{\mathcal{L}(E)} = Q(\varphi) = \alpha_0 Id_E$ et $Id_E \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ car $\dim E = p \geqslant 1$. Donc $Q = \alpha_0 = 0$. $Q = 0_{\mathbb{C}[X]}$. Ceci n'est pas possible.

Alors Q n'est pas constant. Soit r le degré de Q. $1 \leqslant r \leqslant p^2$.

Posons $\hat{Q} = X^{p^2-r} Q$ (petit artifice pour palier une maladresse des concepteurs...)

Alors $\hat{Q} \in \mathbb{C}[X]$, $\deg \hat{Q} = p^2$ et $\hat{Q}(\varphi) = \varphi^{p^2-r} \circ Q(\varphi) = \varphi^{p^2-r} \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\hat{Q} \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg \hat{Q} = p^2 \geqslant 1$. Alors $\hat{Q}$ est scindé.

Donc $\exists c \in \mathbb{C}^*$, $\exists (z_1, z_2, \dots, z_{p^2}) \in \mathbb{C}^{p^2+1}$, $\hat{Q} = c \prod_{k=1}^{p^2} (X - z_k)$. Posons $\tilde{Q} = \prod_{k=1}^{p^2} (X - z_k)$.

$0_{\mathcal{L}(E)} = \hat{Q}(\varphi) = c\, \tilde{Q}(\varphi)$ et $c \neq 0$ alors $\tilde{Q}(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Donc $\prod_{k=1}^{p^2} (X - z_k)$ est un polynôme annulateur de φ.

<u>Il existe une suite finie $(z_k)_{1 \leqslant k \leqslant p^2}$ de nombres complexes tels que le polynôme $\prod_{k=1}^{p^2} (X - z_k)$ de $\mathbb{C}[X]$ soit un polynôme annulateur de φ.</u>

<u>b)</u> Posons $\forall k \in [\![1, p^2]\!]$, $\psi_k = \varphi - z_k Id_E$. $\forall k \in [\![1, p^2]\!]$, $\psi_k \in \mathcal{L}(E)$.

$\psi_1 \circ \psi_2 \circ \dots \circ \psi_{p^2} = \tilde{Q}(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $0_{\mathcal{L}(E)}$ n'est pas injectif ($\dim E \geqslant 1$).

Or la composée d'endomorphismes injectifs est un endomorphisme injectif.

Donc il existe un élément k_0 de $[\![1, p^2]\!]$ tel que ψ_{k_0} ne soit pas injectif.

Alors $\varphi - \mathfrak{z}_{x_0} Id_E$ n'est pas injectif donc $\mathfrak{z}_{x_0}$ est une valeur propre de φ.

φ possède au moins une valeur propre.

$\pi \circ \varphi \in \mathcal{L}(E)$.

Q6 a) Posons $\forall u \in H$, $f(u) = \pi(\varphi(u))$ (f n'est pas $\pi \circ \varphi$!!)

$\forall u \in H$, $\pi(\varphi(u)) \in H$ donc f est une application de H dans H.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (u_1, u_2) \in H^2$, $f(\lambda u_1 + u_2) = \pi(\varphi(\lambda u_1 + u_2)) \underset{\varphi \text{ est linéaire}}{=} \pi(\lambda\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) \underset{\pi \text{ est linéaire}}{=} \lambda \pi(\varphi(u_1)) + \pi(\varphi(u_2)) = \lambda f(u_1) + f(u_2)$.

Ainsi f est linéaire.

Finalement f est un endomorphisme de H. Or $\dim H = \dim E - \dim F = p - k > 0$.

D'après Q5 (!) f possède au moins une valeur propre.

Ainsi il existe un vecteur non nul v de H et un nombre complexe λ vérifiant la relation

$f(v) = \lambda v$ ou $\pi(\varphi(v)) = \lambda v$ ou $(\pi \circ \varphi)(v) = \lambda v$.

b) $F \cap Vect(v) \subset F \cap H = \{0_E\}$. Comme $0_E \in F \cap Vect(v)$: $F \cap Vect(v) = \{0_E\}$.

la somme de F et $Vect(v)$ est directe.

Soit $u \in F + Vect(v)$. $\exists (u_1, u_2) \in F \times Vect(v)$, $u = u_1 + u_2$.

F est stable par φ donc $\varphi(u_1) \in F$. $u_2 \in Vect(v)$ donc $\varphi(u_2) \in \varphi(Vect(v))$.

Or $\varphi(Vect(v)) = Vect(\varphi(v)) = Vect(\lambda v) \subset Vect(v)$. Ainsi $\varphi(u_2) \in Vect(v)$.

Alors $\varphi(u) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) \in F + Vect(v)$.

Par conséquent $F + Vect(v)$ est stable par φ.

Q7 La logique du texte veut sans doute que l'on montre par récurrence sur k

que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ il existe une famille libre $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ de E

telle que $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $\varphi(v_i) \in Vect(v_1, v_2, \dots, v_i)$.

- φ possède au moins une valeur propre λ. Soit v un vecteur propre associé.

$v \neq 0_E$ et $\varphi(v) = \lambda v \in Vect(v)$. Donc (v) est libre et $\varphi(v) \in Vect(v)$.

Ainsi la propriété est vraie pour $k = 1$.

- Supposons que la propriété est vraie pour un élément k de $[\![1, p-1]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

L'hypothèse de récurrence indique qu'il existe une famille libre $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ de E telle que $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $\varphi(v_i) \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_i)$.

Posons $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_k)$. $\dim F = k$ et $1 \leq k < p$. D'après ce qui précède on peut trouver un vecteur v_{k+1} de E tel que $F_k + \mathrm{Vect}(v_{k+1})$ soit une somme directe stable par φ.

$(v_1, v_2, \dots, v_k)$ est une base de F_k, v_{k+1} est une base de $\mathrm{Vect}(v_{k+1})$ et, F et $\mathrm{Vect}(v_{k+1})$ sont en somme directe. Alors $(v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1})$ est une base de $F + \mathrm{Vect}(v_{k+1})$. Alors 1) $\underline{(v_1, v_2, \dots, v_{k+1}) \text{ est une famille libre de } E}$;

2) $F + \mathrm{Vect}(v_{k+1}) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_{k+1})$.

$v_{k+1} \in F + \mathrm{Vect}(v_{k+1})$ et $F + \mathrm{Vect}(v_{k+1})$ est stable par φ donc $\varphi(v_{k+1}) \in F + \mathrm{Vect}(v_{k+1})$.

Donc $\varphi(v_{k+1}) \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_{k+1})$.

Or par hypothèse de récurrence : $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $\varphi(v_i) \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_i)$.

Donc $\underline{\forall i \in [\![1, k+1]\!],\ \varphi(v_i) \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_i)}$ ce qui achève la récurrence.

En particulier la propriété est vraie pour $k = p$. Donc on peut trouver une famille libre $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ de E telle que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\varphi(v_i) \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_i)$ ou $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\varphi(v_k) \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_k)$!

$\mathcal{B}$ est une famille libre de E dont le cardinal coïncide avec la dimension de E. Alors $\mathcal{B}$ est une base de E.

$\underline{\text{Il existe une base } \mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_p) \text{ de } E \text{ telle que } \forall k \in [\![1, p]\!],\ \varphi(v_k) \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_k).}$

<u>Remarque</u>. <u>La matrice M de φ dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure.</u>

Donc tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle "possède une matrice" triangulaire supérieure. Ce qui donne aussi le résultat classique suivant : toute matrice de $M_p(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Q8 Posons $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\varphi_k = \varphi - m_{k,k} Id_E$. Rappelons que M est triangulaire supérieure.

a) Soit $k \in [\![2,p]\!]$. Soit $i \in [\![1,k]\!]$.

1er cas : $i<k$: $\varphi_k(e_i) = \varphi(e_i) - m_{k,k} e_i$, $\varphi(e_i) \in Vect(e_1, e_2, \dots, e_i)$ et $m_{k,k} e_i \in Vect(e_1, e_2, \dots, e_i)$.

Alors $\varphi_k(e_i) \in Vect(e_1, e_2, \dots, e_i) = F_i$. Or $F_i \subset F_{k-1}$ car $i<k$.

Donc $\varphi_k(e_i) \in F_{k-1}$.

2ème cas : $i=k$: $\varphi_k(e_i) = \varphi(e_i) - m_{k,k} e_i = \varphi(e_k) - m_{k,k} e_k \overset{\text{M est triangulaire supérieure}}{=} \sum_{j=1}^{k} m_{j,k} e_j - m_{k,k} e_k = \sum_{j=1}^{k-1} m_{j,k} e_j$.

Donc $\varphi_k(e_i) \in Vect(e_1, e_2, \dots, e_{k-1})$; $\varphi_k(e_i) \in F_{k-1}$.

Ainsi $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $\varphi_k(e_i) \in F_{k-1}$.

Alors $\varphi_k(F_k) = \varphi_k(Vect(e_1, e_2, \dots, e_k)) = Vect(\varphi_k(e_1), \varphi_k(e_2), \dots, \varphi_k(e_k)) \subset F_{k-1}$

Donc $(\varphi - m_{k,k} Id_E)(F_k) \subset F_{k-1}$ et ceci pour tout $k \in [\![2,p]\!]$.

b) Montrons par une récurrence "descendante" que :

$\forall k \in [\![2,p]\!]$, $(\varphi_k \circ \varphi_{k+1} \circ \dots \circ \varphi_p)(E) \subset F_{k-1}$.

- $\varphi_p(E) = \varphi_p(F_p) = (\varphi - m_{p,p} Id_E)(F_p) \subset F_{p-1}$. La propriété est vraie pour p.
- Supposons la propriété vraie pour $k \in [\![3,p]\!]$ et montrons-la pour $k-1$.

  L'hypothèse de récurrence donne : $(\varphi_k \circ \varphi_{k+1} \circ \dots \circ \varphi_p)(E) \subset F_{k-1}$.

  Alors $(\varphi_{k-1} \circ \varphi_k \circ \dots \circ \varphi_p)(E) \subset \varphi_{k-1}(F_{k-1}) = (\varphi - m_{k-1,k-1} Id_E)(F_{k-1}) \underset{k-1 \in [\![2,p]\!]}{\subset} F_{(k-1)-1}$.

  Ainsi $(\varphi_{k-1} \circ \varphi_k \circ \dots \circ \varphi_p)(E) \subset F_{(k-1)-1}$. Ceci achève la récurrence.

La propriété est en particulier vraie pour $k=2$.

Donc $(\varphi_2 \circ \varphi_3 \circ \dots \circ \varphi_p)(E) \subset F_{2-1} = F_1$.

Alors $(\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_p)(E) \subset \varphi_1(F_1) = \varphi_1(Vect(v_1)) = Vect(\varphi_1(v_1))$.

Or $\varphi_1(v_1) = (\varphi - m_{1,1} Id_E)(v_1) = \varphi(v_1) - m_{1,1} v_1 = m_{1,1} v_1 - m_{1,1} v_1 = 0_E$

Donc $(\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_p)(E) \subset \{0_E\}$. Alors $(\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_p)(E) = \{0_E\}$!

Alors $\mathrm{Im}(\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_p) = \{0_E\}$. $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Donc $(\varphi - m_{1,1}\,\mathrm{Id}_E) \circ (\varphi - m_{2,2}\,\mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (\varphi - m_{p,p}\,\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Le polynôme $\prod_{k=1}^{p} (X - m_{k,k})$ de $\mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de φ de degré p.

Donc le polynôme $\prod_{k=1}^{p} (X - m_{k,k})$ de $\mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de la matrice M.

Ainsi M possède un polynôme annulateur de degré p.

Q9 Soit A une matrice de $M_p(\mathbb{R})$. Soit φ_A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ dont la matrice dans la base canonique est A. D'après ce qui précède il existe un polynôme annulateur S de φ_A appartenant à $\mathbb{C}[X]$ et de degré p.

Alors $S \in \mathbb{C}[X]$, $\deg S = p$ et $S(A) = 0_{M_n(\mathbb{C})}$.

$\exists (s_0, s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{C}^p$, $S = \sum_{k=0}^{p} s_k X^k$ et $s_p \neq 0$. $\sum_{k=0}^{p} s_k A^k = 0_{M_n(\mathbb{C})}$.

Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$ notons $\hat{s}_k$ la partie réelle de s_k et $\check{s}_k$ sa partie imaginaire.

$0_{M_n(\mathbb{C})} = \sum_{k=0}^{p} s_k A^k = \sum_{k=0}^{p} (\hat{s}_k + i\check{s}_k) A^k = \sum_{k=0}^{p} \hat{s}_k A^k + i \sum_{k=0}^{p} \check{s}_k A^k$.

Or $\sum_{k=0}^{p} \hat{s}_k A^k \in M_p(\mathbb{R})$ et $\sum_{k=0}^{p} \check{s}_k A^k \in M_p(\mathbb{R})$. Il n'est pas difficile de voir qu'alors $\sum_{k=0}^{p} \hat{s}_k A^k = \sum_{k=0}^{p} \check{s}_k A^k = 0_{M_n(\mathbb{R})}$. $\hat{S} = \sum_{k=0}^{p} \hat{s}_k X^k$ et $\check{S} = \sum_{k=0}^{p} \check{s}_k X^k$ sont donc deux polynômes annulateurs de A appartenant à $\mathbb{R}[X]$.

$s_p = \hat{s}_p + i\check{s}_p$, $s_p \neq 0$, $\hat{s}_p \in \mathbb{R}$ et $\check{s}_p \in \mathbb{R}$. Alors $\hat{s}_p \neq 0$ ou $\check{s}_p \neq 0$... ou les deux !

Donc $\deg \hat{S} = p$ ou $\deg \check{S} = p$ ... ou les deux.

Ainsi A admet un polynôme annulateur appartenant à $\mathbb{R}[X]$ et de degré p.

Q10 a) Rappelons que A possède un polynôme annulateur T appartenant à $\mathbb{R}[X]$ et de degré p, $\exists (t_0, t_1, \ldots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$, $T = \sum_{k=0}^{p} t_k X^k$ et $t_p \neq 0$.

$0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = T(A) = \sum_{k=0}^{p} t_k A^k = t_p A^p + \sum_{k=0}^{p-1} t_k A^k$; $A^p = \sum_{k=0}^{p-1} \left(-\frac{t_k}{t_p}\right) A^k$.
$t_p \neq 0$

donc $A^p \in \mathrm{Vect}(A^0, A, \dots, A^{p-1})$.

Montrons par récurrence que $\forall k \in [\![p, +\infty[\![$, $A^k \in \mathrm{Vect}(A^0, A, \dots, A^{p-1})$.

- Nous venons de voir que la propriété est vraie pour $k = p$.
- Supposons la propriété vraie pour k dans $[\![p, +\infty[\![$ et montrons la pour $k+1$.

L'hypothèse de récurrence indique que A^k est combinaison linéaire de $A^0, A, \dots, A^{p-1}$

Alors A^{k+1} qui est égal à AA^k est combinaison linéaire de $A, A^2, \dots, A^p$. Or A^p est combinaison linéaire de $A^0, A, \dots, A^{p-1}$ donc A^{k+1} est combinaison linéaire de $A^0, A, \dots, A^{p-1}$.

Donc $A^{k+1} \in \mathrm{Vect}(A, A^0, \dots, A^{p-1})$. Ceci achève la récurrence.

Ainsi $\underline{\underline{\forall k \in [\![p, +\infty[\![, A^k \in \mathrm{Vect}(A^0, A, \dots, A^{p-1})}}$. Mieux : $\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N}, A^k \in \mathrm{Vect}(A^0, A, \dots, A^{p-1})}}$

Soit q un entier strictement supérieur à p.

- $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $A^k B \in \mathrm{Vect}(B, AB, \dots, A^{q-1}B) = \mathcal{G}_q$.

Alors $\mathcal{G}_p = \mathrm{Vect}(B, AB, \dots, A^{p-1}B) \subset \mathcal{G}_q$. $\underline{\mathcal{G}_p \subset \mathcal{G}_q}$.

- Montrons que $\mathcal{G}_q \subset \mathcal{G}_p$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est combinaison linéaire de $A^0, A, \dots, A^{p-1}$.

donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k B$ est combinaison linéaire de $A^0 B, AB, \dots, A^{p-1}B$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k B \in \mathrm{Vect}(A^0 B, AB, \dots, A^{p-1}B) = \mathrm{Vect}(B, AB, \dots, A^{p-1}B) = \mathcal{G}_p$.

En particulier $\forall k \in [\![0, q-1]\!]$, $A^k B \in \mathcal{G}_p$. Alors $\mathcal{G}_q = \mathrm{Vect}(B, AB, \dots, A^{q-1}B) \subset \mathcal{G}_p$.

donc $\underline{\mathcal{G}_q \subset \mathcal{G}_p}$.

Finalement $\underline{\underline{\forall q \in \mathbb{N}, q > p \Rightarrow \mathcal{G}_q = \mathcal{G}_p}}$.

D] Notons $\mathcal{S}$ l'orthogonal de $\mathcal{G}_p$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}^\perp = \mathcal{G}_p^{\perp\perp} = \mathcal{G}_p$.

Soit $G \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

$G \in \mathcal{G}_p \Leftrightarrow G \in \mathcal{S}^\perp \Leftrightarrow \forall S \in \mathcal{S}, \langle S, G \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall S \in \mathcal{S}, {}^tS G = 0$.

Réponse : un sous-espace vectoriel $\mathcal{S}$ de $M_{p,1}(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété suivante : pour qu'une matrice G de $M_{p,1}(\mathbb{R})$ appartienne à $\mathcal{G}_p$, il faut et il suffit que pour tout élément S de $\mathcal{S}$, ${}^tS\,G = 0$.

c) Soit $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{G}_p$ qui est convergente. Notons G sa limite.

Soit $S \in \mathcal{S}$. ${}^tS\,G_n = 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

La suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers G et la suite constante égale à ${}^tS$ converge vers ${}^tS$.

Alors d'après ce qui est admis la suite $({}^tS\,G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ${}^tS\,G$.

Or $\forall n\in\mathbb{N}$, ${}^tS\,G_n = 0$ donc ${}^tS\,G = 0$.

$\forall S\in\mathcal{S}$, ${}^tS\,G = 0$. $G \in \mathcal{G}_p$.

Si $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de matrices de $\mathcal{G}_p$, sa limite G appartient à $\mathcal{G}_p$.

Remarque.. Pour les initiés $\mathcal{G}_p$ est un fermé de $M_{p,1}(\mathbb{R})$.

d) Soit $x\in\mathbb{R}$. $(T_{A,n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T_A(x)$ et la suite constante égale à B converge vers B. Alors la suite $(T_{A,n}(x)B)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T_A(x)B$.

$$\forall n\in [\![p, +\infty [\![,\ T_{A,n}(x)B = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k A^k B \in \mathcal{G}_{n+1} \underset{\uparrow}{=} \mathcal{G}_p$$

$$\forall n\in [\![0, p-1]\!]\ T_{A,n}(x)B = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k A^k B \in \mathcal{G}_{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ n+1\leq p}}{\subset} \mathcal{G}_p .$$

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}$, $T_{A,n}(x)B \in \mathcal{G}_p$.

Donc $(T_{A,n}(x)B)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{G}_p$ qui converge vers $T_A(x)B$.

Alors c) indique que $T_A(x)B \in \mathcal{G}_p$.

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $T_A(x)B$ appartient à $\mathcal{G}_p$.

PARTIE III Controle de système linéaire

(Q1) Soyons un peu plus clair que l'énoncé et montrons par analyse / synthèse qu'il existe une unique application f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $[0,1]$, qui vérifie :
$f(0)=0$ et $\forall t\in[0,1],\ f'(t)=af(t)+bu(t)$.

Analyse / Unicité. Supposons qu'une telle fonction f existe. Posons $\forall t\in[0,1],\ h(t)=f(t)e^{-at}$.
h est dérivable sur $[0,1]$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $[0,1]$ et $\forall t\in[0,1],\ f(t)=h(t)e^{at}$.
$\forall t\in[0,1],\ ah(t)e^{at}+bu(t)=af(t)+bu(t)=f'(t)=h'(t)e^{at}+h(t)ae^{at}$.
Alors $\forall t\in[0,1],\ bu(t)=h'(t)e^{at}$. $\forall t\in[0,1],\ h'(t)=bu(t)e^{-at}$.
Notons encore que $h(0)=f(0)e^{-a\times 0}=0\times 1=0$.
Alors $\forall t\in[0,1],\ h(t)=h(t)-h(0)=\int_0^t h'(u)du=\int_0^t bu(u)e^{-au}du=b\int_0^t u(u)e^{-au}du$.
$\forall t\in[0,1],\ f(t)=e^{at}h(t)=e^{at}b\int_0^t u(u)e^{-au}du$. $\forall t\in[0,1],\ f(t)=b\int_0^t u(u)e^{a(t-u)}du$
D'où l'unicité de f.

Synthèse / Existence. Posons $\forall t\in[0,1],\ f(t)=b\int_0^t u(u)e^{a(t-u)}du$.

$\forall t\in[0,1],\ f(t)=be^{at}\int_0^t u(u)e^{-au}du$.

$t\mapsto\int_0^t u(u)e^{-au}du$ est dérivable sur $[0,1]$ car c'est la primitive sur l'intervalle $[0,1]$ de la fonction continue $t\mapsto u(t)e^{-at}$, qui prend la valeur 0 en 0.
Comme $t\mapsto be^{at}$ est dérivable sur $[0,1]$, par produit f est dérivable sur $[0,1]$.

$f(0)=be^{a0}\int_0^0 u(u)e^{-au}du=b\times 1\times 0=0$; $f(0)=0$.

$\forall t\in[0,1],\ f'(t)=ba\,e^{at}\int_0^t u(u)e^{-au}du+be^{at}u(t)e^{-at}=af(t)+bu(t)$.
Ainsi f est solution.

Ceci achève de montrer qu'il existe une unique application f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0)=0$ et $\forall t\in[0,1],\ f'(t)=af(t)+bu(t)$.

$\forall t\in[0,1],\ f(t)=be^{at}\int_0^t u(u)e^{-au}du$.

b] Soit $c \in \mathbb{R}$. Soit u la fonction de $\mathcal{C}^0$ définie par $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = c$.

Soit f la fonction qui est définie par $(**)$.

$\forall t \in [0,1]$, $f(t) = b\int_0^t u(x) e^{a(t-x)} dx = bce^{at}\int_0^t e^{-ax} dx$.

<u>1er cas</u>.. $a=0$. $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = bc \times 1 \times \int_0^t 1 dx = bct$.

<u>2ème cas</u>.. $a \neq 0$ $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = bce^{at}\left[\frac{e^{-ax}}{-a}\right]_0^t = bc\, e^{at}\left(\frac{1-e^{-at}}{a}\right) = \frac{bc}{a}\,(e^{at}-1)$.

<u>si $a=0$, $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = bct$. si $a \neq 0$ $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = \frac{bc}{a}(e^{at}-1)$.</u>

Montrons que le couple (a,b) est contrôlable si et seulement si $b \neq 0$

<u>1er cas</u>.. $b \neq 0$. Soit $y \in \mathbb{R}$.

a] $a \neq 0$ Posons $c = \dfrac{ay}{b(e^a-1)}$ et $\forall t \in [0,1]$, $u(t) = c$.

Alors $u \in \mathcal{C}^0$. Soit f la fonction définie par $(**)$.

$\forall t \in [0,1]$, $f(t) = \frac{bc}{a}(e^{at}-1)$. $f(1) = \frac{bc}{a}(e^a-1) = \frac{b}{a}(e^a-1)c = \frac{b}{a}(e^a-1) \times \frac{ay}{b(e^a-1)} = y$.

Donc $f(1) = y$.

b] $a=0$ Posons $c = \frac{y}{b}$ et $\forall t \in [0,1]$, $u(t) = c$.

Alors $u \in \mathcal{C}^0$. Soit f la fonction définie par $(**)$.

$\forall t \in [0,1]$, $f(t) = bct$. $f(1) = bc = b\frac{y}{b} = y$. $f(1) = y$.

Dans les deux cas, pour tout réel y il existe un élément u de $\mathcal{C}^0$ telle que l'unique application f de $[0,1]$, dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall t \in [0,1]$, $f'(t) = af(t) + b\,u(t)$, vérifie $f(1) = y$.

Donc <u>(a,b) est contrôlable</u>.

<u>2ème cas</u>.. $b=0$. Posons $y = 17$! Soit u un élément quelconque de $\mathcal{C}^0$ et f la fonction définie par $(**)$. $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = 0$ car $b=0$ donc $f(1) \neq y$.

ceci suffit pour dire que (a,h) n'est pas contrôlable.

Finalement (a,h) est contrôlable si et seulement si $b \neq 0$.

(Q12) a) Nous avons vu dans Q10 d) que $\forall\, z \in [0,1]$, $T_A(z)B \in \mathcal{G}_p$.

$\forall x \in [0,1]$, $1-x \in [0,1]$ donc $\forall x \in [0,1]$, $T_A(1-x)B \in \mathcal{G}_p$.

$\forall x \in [0,1]$, $W(x) \in \mathcal{G}_p$ et $u(x) \in \mathbb{R}$. Comme $\mathcal{G}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$:

$\forall x \in [0,1]$, $u(x)W(x) \in \mathcal{G}_p$.

Alors pour tout $x \in [0,1]$, $\exists\, (\alpha_0(x), \alpha_1(x), \dots, \alpha_{p-1}(x)) \in \mathbb{R}^p$, $u(x)W(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i(x) A^i B$.

Pour tout k dans $[\![1,p]\!]$, notons $\beta_k(i)$ la $k^{\text{ième}}$ composante de A^iB et ceci pour tout i dans $[\![0,p-1]\!]$.

Ainsi $\forall x \in [0,1]$, $u(x)W_k(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i(x)\beta_k(i)$ et ceci pour tout k dans $[\![1,p]\!]$.

Alors $\int_0^1 u(x)W_k(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1} \beta_k(i) \int_0^1 \alpha_i(x)\,dx$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$

Posons $\forall i \in [\![1,p-1]\!]$, $\gamma_i = \int_0^1 \alpha_i(x)dx$. Alors $\int_0^1 u(x)W_k(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i\, \beta_k(i)$, pour tout k dans $[\![1,p]\!]$.

Ce qui permet de dire que $\int_0^1 u(x)W(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i A^iB$.

Par conséquent $\int_0^1 u(x)W(x)\,dx \in \mathcal{G}_p$.

b) Soit $Z = (z_k)_{1\leq k\leq p}$ un élément de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. $\forall x \in [0,1]$, ${}^tZ\,W(x) = \langle Z, W(x)\rangle = \sum_{k=1}^{p} z_k W_k(x)$.

Posons $\forall x \in [0,1]$, $u(x) = \sum_{k=1}^{p} z_k W_k(x)$. Comme $W_1, W_2, \dots, W_p$ sont continues sur $[0,1]$, u est continue sur $[0,1]$. Alors $u \in \mathcal{C}^0$. Donc $\int_0^1 u(x)\,{}^tZ\,W(x) = 0$. Or $\forall x \in [0,1]$, ${}^tZ\,W(x) = u(x)$

donc $\int_0^1 (u(x))^2\,dx = 0$. Comme u^2 est continue et positive sur $[0,1]$, $\forall x \in [0,1]$, $u^2(x) = 0$.

Alors $\forall x \in [0,1]$, $u(x) = 0$ donc $\forall x \in [0,1]$, ${}^tZ\,W(x) = 0$

c) $\forall x \in [0,1]$, $T_A(1-x)B = W(x)$. $\forall x \in [0,1]$, ${}^tZ\,T_A(1-x)B = {}^tZ\,W(x) = 0$.

Comme $x \mapsto 1-x$ définit une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$: $\underline{\underline{\forall x \in [0,1],\ {}^tZ\,T_A(x)B = 0}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après * la suite $\left(r^{n+1}\left(T_A(\frac{1}{r}) - T_{A,n}(\frac{1}{r})\right)\right)_{r\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{(n+1)!}A^{n+1}$.

Or la suite constante égale à ${}^tZ$ (resp. B) converge vers ${}^tZ$ (resp. B).

Alors la suite $\left({}^tZ\left[r^{n+1}\left(T_A(\frac{1}{r}) - T_{A,n}(\frac{1}{r})\right)\right]\right)_{r\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ${}^tZ\left(\frac{1}{(n+1)!}A^{n+1}\right)$ et

la suite $\underline{\underline{\text{(de réels)}}}$ $\left({}^tZ\left[r^{n+1}\left(T_A(\frac{1}{r}) - T_{A,n}(\frac{1}{r})\right)\right]B\right)_{r\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ${}^tZ\left(\frac{1}{(n+1)!}A^{n+1}\right)B$.

Posons $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $d_r = {}^tZ\left[r^{n+1}\left(T_A(\frac{1}{r}) - T_{A,n}(\frac{1}{r})\right)\right]B$. $(d_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels convergente. Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

$d_r = r^{n+1}\left[{}^tZ\,T_A(\frac{1}{r})B - {}^tZ\,T_{A,n}(\frac{1}{r})B\right]$. Or $\frac{1}{r} \in [0,1]$ donc ${}^tZ\,T_A(\frac{1}{r})B = 0$.

Alors $d_r = -r^{n+1}\,{}^tZ\,T_{A,n}(\frac{1}{r})B = -r^{n+1}\,{}^tZ\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(\frac{1}{r}A)^k\right)B$.

$d_r = -\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{r^{n+1}}{r^k}\,{}^tZA^kB = -\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}\,{}^tZA^kB\right)r^{n+1-k}$.

Supposons que $I = \{k \in [\![0,n]\!] \mid {}^tZA^kB \neq 0\} \neq \emptyset$. Soit k_0 le plus petit élément de I. $d_r = -\sum_{k=k_0}^{n}\left(\frac{1}{k!}\,{}^tZA^kB\right)r^{n+1-k}$.

$\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{1}{r^{k-k_0}} = 0$ si $k > k_0$

$\frac{d_r}{r^{n+1-k_0}} = -\sum_{k=k_0}^{n}\left(\frac{1}{k!}\,{}^tZA^kB\right)\frac{1}{r^{k-k_0}}$; $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{d_r}{r^{n+1-k_0}} = \frac{1}{k_0!}\,{}^tZA^{k_0}B$ et

$\underbrace{\frac{1}{k_0!}\,{}^tZA^{k_0}B \neq 0}_{k_0\in I}$. Ainsi $\frac{d_r}{r^{n+1-k_0}} \underset{r\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k_0!}\,{}^tZA^{k_0}B$; $d_r \underset{r\to+\infty}{\sim} -\left(\frac{1}{k_0!}\,{}^tZA^{k_0}B\right)r^{n+1-k_0}$

Or $\lim\limits_{r\to+\infty} r^{n+1-k_0} = +\infty$ car $k_0 \leq n$.

Alors $\lim\limits_{r\to+\infty} d_r = \begin{cases} +\infty \text{ si } \frac{1}{k_0!}\,{}^tZA^{k_0}B < 0 \\ -\infty \text{ si } \frac{1}{k_0!}\,{}^tZA^{k_0}B > 0 \end{cases}$ donc la suite $(d_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$ diverge !!

comme la suite $(d_r)_{r\in\mathbb{N}}$ converge $I=\{k\in[\![0,n]\!] \mid {}^tZA^kB\neq 0\}$ est vide.

Ainsi $\forall k\in[\![0,n]\!]$, ${}^tZA^kB=0$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Par conséquent $\forall k\in\underline{\underline{\mathbb{N}}}$, ${}^tZA^kB=0$.

Alors $\underline{\underline{\forall k\in[\![1,p]\!],\ {}^tZA^{k-1}B=0}}$.

d) Montrons que (A,B) est contrôlable si et seulement si la matrice de Kalman K_p est inversible.

* Supposons que K_p n'est pas inversible. Alors la famille constituée par ses colonnes est une famille liée de cardinal p dans $M_{p,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension p. Alors cette famille n'est pas une famille génératrice de $M_{p,1}(\mathbb{R})$ (si elle l'était ce serait une base de $M_{p,1}(\mathbb{R})$ donc une famille libre).
Alors il existe un élément Y de $M_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y\notin \mathrm{Vect}(B,AB,\dots,A^{p-1}B)$.
Donc $Y\notin \mathcal{G}_p$. Or $\forall u\in\mathcal{E}^0$, $\int_0^1 u(x)W(x)\,dx\in\mathcal{G}_p$ d'après Q12 a).
Alors $\forall u\in\mathcal{E}^0$, $\int_0^1 u(v)W(v)\,dv\neq Y$.

Par conséquent $\underline{(A,B)\text{ n'est pas contrôlable}}$.

* Supposons que (A,B) n'est pas contrôlable. Montrons alors que K_p n'est pas inversible.

(A,B) n'est pas contrôlable. Alors il existe un élément Y de $M_p(\mathbb{R})$ tel que pour tout u appartenant à $\mathcal{E}^0$, $\int_0^1 u(x)W(x)\,dx\neq Y$.

Posons $F=\{\int_0^1 u(x)W(x)\,dx\ ;\ u\in\mathcal{E}^0\}$. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $M_{p,1}(\mathbb{R})$. Notons avant cela que $\underline{Y\notin F}$.

- $F\subset M_{p,1}(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{E}^0$ n'est pas vide donc F n'est pas vide.
- Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit U_1 et U_2 deux éléments de F. Il existe deux éléments u_1 et u_2 de $\mathcal{E}^0$ tels que : $U_1=\int_0^1 u_1(x)W(x)\,dx$ et $U_2=\int_0^1 u_2(x)W(x)\,dx$.

$\lambda u_1+u_2 \in \mathcal{C}^0$ et $\lambda U_1+U_2 = \lambda\int_0^1 u_1(x)W(x)dx + \int_0^1 u_2(x)W(x)dx = \int_0^1 (\lambda u_1+u_2)(x)W(x)dx$.

Alors $\lambda U_1+U_2 \in F$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (U_1,U_2) \in F^2, \lambda U_1+U_2 \in F$.

ceci achève de montrer que <u>F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.</u>

$\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) = F \oplus F^\perp$ ($\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique ...).

Si $F^\perp = \{0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}\}$: $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) = F$ donc $Y \in F$!!

Alors $F^\perp \neq \{0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}\}$. Donc il existe un élément non nul Z de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ orthogonal à F. Alors $\forall u \in \mathcal{C}^0$, ${}^tZ \int_0^1 u(x)W(x)dx = \langle Z, \int_0^1 u(x)W(x)dx\rangle = 0$.

Posons $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix}$ ... ou $Z = (z_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$. Rappelons que $\int_0^1 u(x)W(x)dx = \left(\int_0^1 u(x)W_k(x)dx\right)_{1\leqslant k\leqslant p}$

pour tout $u \in \mathcal{C}^0$.

Alors $\forall u \in \mathcal{C}^0$, $0 = \langle Z, \int_0^1 u(x)W(x)dx\rangle = \sum_{k=1}^p z_k \int_0^1 u(x)W_k(x)dx = \int_0^1 \left(u(x)\sum_{k=1}^p z_k W_k(x)\right)dx$.

Donc $\forall u \in \mathcal{C}^0$, $0 = \int_0^1 u(x)\langle Z, W(x)\rangle dx = \int_0^1 u(x)\,{}^tZ\,W(x)dx$.

Alors, d'après Q12 c) $\forall k \in [\![1,p]\!]$, ${}^tZ A^{k-1}B = 0$.

$\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\langle Z, A^{k-1}B\rangle = 0$. Ainsi Z est orthogonal à $A^0B, A^1B, \dots, A^{p-1}B$ donc

$Z \in (\mathrm{Vect}(A^0B, A^1B, \dots, A^{p-1}B))^\perp = \mathcal{G}_p^\perp$ et $Z \neq \{0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}\}$. $\mathcal{G}_p^\perp \neq \{0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}\}$.

Alors $\dim \mathcal{G}_p^\perp \geqslant 1$ donc $\dim \mathcal{G}_p = \dim \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) - \dim \mathcal{G}_p^\perp = p - \dim \mathcal{G}_p^\perp < p$.

$\mathcal{G}_p = \mathrm{Vect}(A^0B, A^1B, \dots, A^{p-1}B)$ et $\dim \mathcal{G}_p < p$.

Rappelons que $(A^0B, A^1B, \dots, A^{p-1}B)$ est la famille des colonnes de K_p. Alors $\mathrm{rg}\, K_p < p$.

Comme $K_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, K_p n'est pas inversible.

Finalement K_p n'est pas inversible si et seulement si (A,B) n'est pas contrôlable.

ceci permet de dire que <u>(A,B) est contrôlable si et seulement si la matrice de Kalman K_p est inversible.</u>

Q13 a) $X_{D,0}=0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$. $X_{D,1}=AX_{D,0}+d_1B=d_1B$.

$X_{D,2}=AX_{D,1}+d_2B=A(d_1B)+d_2B=d_1AB+d_2B=d_2B+d_1AB$.

$X_{D,3}=AX_{D,2}+d_3B=A(d_2B+d_1AB)+d_3B=d_3B+d_2AB+d_1A^2B$ ...

Montrons par récurrence que $\forall k\in[\![1,q]\!]$, $X_{D,k}=\sum_{i=0}^{k-1} d_{k-i}A^iB$.

- $X_{D,1}=d_1B$ et $\sum_{i=0}^{1-1} d_{1-i}A^iB=d_1A^0B=d_1B$. La propriété est vraie pour $k=1$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément k de $[\![1,q-1]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

$$X_{D,k+1}=AX_{D,k}+d_{k+1}B \underset{\text{hypothèse de récurrence}}{=} A\Big(\sum_{i=0}^{k-1}d_{k-i}A^iB\Big)+d_{k+1}B=\sum_{i=0}^{k-1}d_{k-i}A^{i+1}B+d_{k+1}B.$$

$$X_{D,k+1}\underset{i\leftarrow i-1}{=}\sum_{i=1}^{k}d_{k-(i-1)}A^iB+d_{k+1}B=\sum_{i=1}^{k}d_{k+1-i}A^iB+d_{k+1}B=\sum_{\underline{\underline{i=0}}}^{(k+1)-1}d_{k+1-i}A^iB.$$

Ceci achève la récurrence.

$$\forall k\in[\![1,q]\!],\quad X_{D,k}=\sum_{i=0}^{k-1}d_{k-i}A^iB.$$

Soit $(E_1,E_2,\dots,E_q)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout $j\in[\![1,q]\!]$, K_qE_j est la $j^{\text{ième}}$ colonne de K_q c'est donc $A^{j-1}B$.

Alors $X_{D,q}=\sum_{i=0}^{q-1}d_{q-i}A^iB \underset{j=i+1}{=} \sum_{j=1}^{q}d_{q-(j-1)}A^{j-1}B=\sum_{j=1}^{q}d_{q-(j-1)}K_qE_j$.

$$X_{D,q}=K_q\Big(\sum_{j=1}^{q}d_{q-(j-1)}E_j\Big)=K_q\begin{pmatrix}d_q\\ d_{q-1}\\ \vdots\\ d_1\end{pmatrix}$$

Si $C_D=\begin{pmatrix}d_q\\ d_{q-1}\\ \vdots\\ d_1\end{pmatrix}=(d_{q+1-k})_{1\leqslant k\leqslant q}$ alors $X_{D,q}=K_qC_D$.

Remarque : Cette notation C_D est gênante car l'équation $X\in\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ et $X_{D,q}=K_qX$ n'a pas qu'une solution. Dans la suite il faudra comprendre que si $D=(d_1,d_2,\dots,d_q)$, $C_D=\begin{pmatrix}d_q\\ d_{q-1}\\ \vdots\\ d_1\end{pmatrix}$.

b) K_p est inversible donc la famille $(B, AB, \dots, A^{p-1}B)$ de ses colonnes est une famille de rang p.

Alors $\dim \mathcal{G}_p = \dim \mathrm{Vect}(B, AB, \dots, A^{p-1}B) = p$, $\mathcal{G}_p \subset \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\dim \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) = p$.

donc $\mathcal{G}_p = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Alors $\mathcal{G}_q = \mathcal{G}_p = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

donc $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(B, AB, \dots, A^{q-1}B)$.

Soit Y une matrice de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. $\exists (t_0, t_1, \dots, t_{q-1}) \in \mathbb{R}^q$, $Y = \sum_{k=0}^{q-1} t_k A^k B$.

Alors $Y = K_q \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{q-1} \end{pmatrix}$. Posons $\forall k \in [\![1, q]\!]$, $s'_k = t_{q-k}$ et $s' = (s'_1, s'_2, \dots, s'_q)$. $s' \in \mathbb{R}^q$.

considérons la suite finie $(X_{s',k})_{0 \leq k \leq q}$ définie par $\begin{cases} X_{s',0} = 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \\ \forall k \in [\![1, q]\!],\ X_{s',k} = A X_{s',k-1} + s'_k B \end{cases}$.

Alors $X_{s',q} = K_q \begin{pmatrix} s'_q \\ s'_{q-1} \\ \vdots \\ s'_1 \end{pmatrix}$ comme nous l'avons vu dans a).

donc $X_{s',q} = K_q \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{q-1} \end{pmatrix} = Y$.

donc pour toute matrice Y de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ il existe un contrôle discret s' tel que $X_{s',q} = Y$.

Q14 $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ ⚠ Ici je ne ferai aucune identification et je m'efforcerai d'être le plus fidèle possible à la partie du cours concernant l'optimisation sous contrainte ... ce qui peut engendrer une certaine lourdeur !!

- $\mathbb{R}^q$ est un ouvert
- J est une application de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^q$ car elle est polynomiale.
- Analysons la contrainte pour coller au cours.

Posons $\mathcal{B} = \{s \in \mathbb{R}^q \mid X_{s,q} = Y\}$.

$\mathcal{B} = \{ s = (s_1, s_2, \dots, s_q) \in \mathbb{R}^q \mid Y = K_q \begin{pmatrix} s_q \\ s_{q-1} \\ \vdots \\ s_1 \end{pmatrix} \}$ ... ou $\mathcal{B} = \{s \in \mathbb{R}^q \mid Y = K_q C_s\}$

Posons $K_q = (\alpha_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$.

Soit $s=(s_1,s_2,\dots,s_q)$ un élément de $\mathbb{R}^q$

$$s\in\mathcal{C} \iff Y = K_q \begin{pmatrix} s_q\\ s_{q-1}\\ \vdots \\ s_1\end{pmatrix} \iff \forall i\in[\![1,p]\!],\ y_i=\sum_{j=1}^{q} \alpha_{i,j}\, s_{q-j+1}$$

$$\downarrow j \leftarrow q-j+1$$

$$s\in\mathcal{C}\iff \forall i \in [\![1,p]\!],\ y_i = \sum_{j=1}^{q} \alpha_{i,q-j+1}\, s_j .$$

Posons $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $\forall s=(s_1,s_2,\dots,s_q)\in\mathbb{R}^q$, $g_i(s)=\sum_{j=1}^{q} \alpha_{i,q-j+1}\,s_j$.

Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, g_i est "clairement" une forme linéaire sur $\mathbb{R}^q$.

De plus $\mathcal{C}=\{s\in\mathbb{R}^q \mid \forall i\in[\![1,p]\!],\ g_i(s)=y_i\}$.

Nous sommes bien dans le cadre de "recherche d'extremum sous contrainte d'égalités linéaires".

Posons $\mathcal{H} = \mathrm{Ker}\, g_1 \cap \mathrm{Ker}\, g_2\cap\dots\cap \mathrm{Ker}\, g_p$.

Rappelons que $\mathcal{H}^\perp = \mathrm{Vect}(\nabla g_1(s), \nabla g_2(s),\dots,\nabla g_p(s))$ où s est un élément quelconque de $\mathbb{R}^q$.

$\forall i\in[\![1,p]\!]$, $\forall s=(s_1,s_2,\dots,s_q)\in\mathbb{R}^q$, $g_i(s)=\sum_{j=1}^{q}\alpha_{i,q-j+1}\,s_j$.

Alors $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $\forall k\in[\![1,q]\!]$, $\forall s\in\mathbb{R}^q$, $\frac{\partial g_i}{\partial s_k}(s)=\alpha_{i,q-k+1}$.

Donc $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $\forall s\in\mathbb{R}^q$, $\nabla g_i(s) = (\alpha_{i,q},\alpha_{i,q-1},\dots,\alpha_{i,1})$.

Soit $s=(s_1,s_2,\dots,s_q)$ un élément de $\mathbb{R}^q$. Posons $T=\begin{pmatrix}s_q\\ s_{q-1}\\ \vdots\\ s_1\end{pmatrix}$. Posons aussi $T=\begin{pmatrix}t_1\\ t_2\\ \vdots \\ t_q\end{pmatrix}$. Alors $\forall k\in[\![1,q]\!]$, $t_k = s_{q-k+1}$. Notation à retenir ! Notons que dans l'esprit du texte $T=C_s$!

s est un point critique de J dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$ si et seulement si $s\in\mathcal{C}$ et $\nabla J(s)\in\mathcal{H}^\perp$ (ou $s\in\mathcal{C}$ et $\nabla J(s)\in \mathrm{Vect}(\nabla g_1(s), \nabla g_2(s),\dots,\nabla g_p(s))$!)

Notons que $\forall \hat s=(\hat s_1,\hat s_2,\dots,\hat s_q)\in\mathbb{R}^q$, $J(\hat s)=\sum_{j=1}^{q} \hat s_j^2$.

Donc $\forall \hat s=(\hat s_1,\hat s_2,\dots,\hat s_q)\in\mathbb{R}^q$, $\nabla J(\hat s) = (2\hat s_1, 2\hat s_2,\dots,2\hat s_q)=2\hat s$.

Alors s est un point critique de J dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$ $\iff \begin{cases} s\in\mathcal{C}\\ 2s\in\mathrm{Vect}(\nabla g_1(s),\nabla g_2(s),\dots,\nabla g_p(s)).\end{cases}$

(S)

Notons (S) le système précédent.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} Y = K_q \begin{pmatrix} \delta_q \\ \delta_{q-1} \\ \vdots \\ \delta_1 \end{pmatrix} = K_q T \\ \text{et} \\ \exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p, \quad 2\delta = \beta_1 \nabla g_1(\delta) + \beta_2 \nabla g_2(\delta) + \dots + \beta_p \nabla g_p(\delta). \end{cases}$$

Rappelons que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\nabla g_i(\delta) = (\alpha_{i,q}, \alpha_{i,q-1}, \dots, \alpha_{i,1})$.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} Y = K_q T \text{ et } \exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p \text{ tel que} \\ (2\delta_1, 2\delta_2, \dots, 2\delta_q) = \beta_1 (\alpha_{1,q}, \alpha_{1,q-1}, \dots, \alpha_{1,1}) + \beta_2 (\alpha_{2,q}, \alpha_{2,q-1}, \dots, \alpha_{2,1}) + \dots + \beta_p (\alpha_{p,q}, \alpha_{p,q-1}, \dots, \alpha_{p,1}) \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} Y = K_q T \text{ et } \exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p \text{ tel que} \\ 2\delta_1 = \beta_1 \alpha_{1,q} + \beta_2 \alpha_{2,q} + \dots + \beta_p \alpha_{p,q} = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \alpha_{i,q} \\ 2\delta_2 = \beta_1 \alpha_{1,q-1} + \beta_2 \alpha_{2,q-1} + \dots + \beta_p \alpha_{p,q-1} = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \alpha_{i,q-1} \\ \vdots \\ 2\delta_q = \beta_1 \alpha_{1,1} + \beta_2 \alpha_{2,1} + \dots + \beta_p \alpha_{p,1} = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \alpha_{i,1} \end{cases}$$

$(S) \Leftrightarrow Y = K_q T$ et $\exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\forall j \in [\![1, q]\!]$, $2 t_{q-j+1} = 2\delta_j = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \alpha_{i,q-j+1}$.

$(S) \Leftrightarrow Y = K_q T$ et $\exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\forall j \in [\![1, q]\!]$, $2 t_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{i,j} \beta_i$] à bien comprendre

$(S) \Leftrightarrow Y = K_q T$ et $\exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $2T = {}^t K_q \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}$.

$(S) \Leftrightarrow \exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p$, $2T = {}^t K_q \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}$ et $Y = K_q \left(\frac{1}{2} {}^t K_q \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \right)$.

$(S) \Leftrightarrow \exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p$, $2T = {}^t K_q \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}$ et $2Y = K_q {}^t K_q \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}$.

Rappelons que le texte indique que $K_q {}^t K_q$ est inversible. Alors :

$(S) \Leftrightarrow \exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p$, $2T = {}^t K_q \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} = (K_q {}^t K_q)^{-1} (2Y)$.

$(S) \overset{\text{à vérifier}}{\Leftrightarrow} 2T = {}^t K_q (K_q {}^t K_q)^{-1} (2Y) \Leftrightarrow T = {}^t K_q (K_q {}^t K_q)^{-1} Y$.

$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \delta_q \\ \delta_{q-1} \\ \vdots \\ \delta_1 \end{pmatrix} = {}^t K_q (K_q {}^t K_q)^{-1} Y \Leftrightarrow C_\delta = {}^t K_q (K_q {}^t K_q)^{-1} Y$.

Ainsi J admet un point critique et un seul dans l'optimisation sous la contrainte $X_{s,q}=Y$.

Ce point critique est le point $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_q^*)$ de $\mathbb{R}^q$ tel que $\begin{pmatrix} s_q^* \\ s_{q-1}^* \\ \vdots \\ s_1^* \end{pmatrix} = {}^tK_q(K_q{}^tK_q)^{-1}Y$

ou tel que $C_{s^*} = {}^tK_q(K_q{}^tK_q)^{-1}Y$.

b) Ici nous noterons $\langle \cdot,\cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^q$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.

$\forall s \in \mathbb{R}^q,\ J(s) = \|s\|^2$.

Soit $s \in \mathcal{B}$. Posons $h = s - s^*$.

$J(s) - J(s^*) = \|s\|^2 - \|s^*\|^2 = \|s^* + h\|^2 - \|s^*\|^2 = \|s^*\|^2 + 2\langle s^*, h\rangle + \|h\|^2 - \|s^*\|^2$

$J(s) - J(s^*) = \|h\|^2 + 2\langle s^*, h\rangle$.

$\forall i \in [\![1,p]\!],\ g_i(h) = g_i(s - s^*) = g_i(s) - g_i(s^*) \overset{s\in\mathcal{B}\text{ et } s^*\in\mathcal{B}}{=} y_i - y_i = 0$. $\forall i \in [\![1,p]\!],\ h \in \operatorname{Ker} g_i$.

Alors $h \in \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} g_i$ donc $h \in \mathcal{B}$.

s^* est le point critique de J dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{B}$.

Alors $2s^* = \nabla J(s^*) \in \mathcal{B}^\perp$. Donc $s^* \in \mathcal{B}^\perp$. Alors $\langle s^*, h\rangle = 0$.

Ainsi $J(s) - J(s^*) = \|h\|^2 + 2\langle s^*, h\rangle = \|h\|^2 \geq 0$; $J(s) \geq J(s^*)$

$\forall s \in \mathcal{B},\ J(s) \geq J(s^*)$.

Donc J admet un minimum global sous la contrainte $\mathcal{B}$ réalisé en s^*.

Donc s^* réalise le minimum global de J sous la contrainte $X_{s,q} = Y$.