Les sujets suivants, posés aux candidats des options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L, constituent un échantillon des sujets proposés lors des épreuves orales du concours 2013.

1. SUJETS DE L'OPTION SCIENTIFIQUE

Exercice principal S46

1. Question de cours : Énoncer le théorème de la bijection.

2.a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{8}}\,\mathrm{d}t$ et en donner la valeur.

b) Établir l'inégalité stricte : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{8}}\,\mathrm{d}t > 1$.

3. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence d'un unique réel u_n vérifiant $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{u_n} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{8}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}$.

4.a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les inégalités : $\left(u_n - \dfrac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{u_n^2}{8}} \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \left(u_n - \dfrac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{8n^2}}$.

b) En déduire que u_n est équivalent à $\dfrac{2}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

5. Trouver un équivalent de la différence $\left(u_n - \dfrac{2}{n}\right)$, quand n tend vers $+\infty$, de la forme $\dfrac{\alpha}{n^\beta}$ où α et β sont des réels, indépendants de n, à déterminer.

Exercice sans préparation S46

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives, admettant une densité f et vérifiant la propriété suivante : la variable aléatoire $X + \dfrac{1}{X}$ possède une espérance mathématique.

1. Établir l'inégalité : $E\left(X + \dfrac{1}{X}\right) \geqslant 2$.

2. Montrer que l'inégalité précédente n'est jamais une égalité, mais que $E\left(X + \dfrac{1}{X}\right)$ peut prendre des valeurs arbitrairement proches de 2.

Exercice principal S 46

Q1 I est un intervalle non vide et non réduit à un point. f est une application continue et strictement monotone sur I. Alors :

1) $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2) f définit une bijection de I sur $f(I)$.

3) f^{-1} est une bijection de $f(I)$ sur I, continue et strictement monotone "de même sens" que f.

Q2 a) Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,2} e^{-\frac{t^2}{2(2)^2}}$. f est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres 0 et $(2)^2$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ existe et vaut 1. Comme f est paire $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ existe et vaut $\frac{1}{2}$.

Alors $\frac{1}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2(2)^2}} dt$. Ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2(2)^2}} dt$ existe et vaut $\sqrt{2\pi}$.

donc $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{8}} dt$ existe et vaut $\sqrt{2\pi}$

b) $\varphi : x \mapsto e^x$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi''(x) = e^x > 0$.

Ainsi φ est convexe sur $\mathbb{R}$. Alors toutes les tangentes à la courbe représentative C_φ de φ sont en dessous de C_φ. En particulier la tangente au point d'abscisse 0 est en dessous de C_φ.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant (x-0)e^0 + e^0 = x+1$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x+1$.

Ainsi $\forall t \in [1,+\infty[$, $e^{-t^2/8} \geqslant -\frac{t^2}{8} + 1$.

Alors $\forall A \in [1,+\infty[$, $\int_1^A e^{-t^2/8} dt \geqslant \int_1^A \left(-\frac{t^2}{8}+1\right) dt = \left[-\frac{t^3}{24}\right]_1^A + A - 1 = -\frac{A^3}{24} + \frac{1}{24} + A - 1$

$\forall A \in [1,+\infty[$, $\int_1^A e^{-t^2/8} dt \geqslant -\frac{A^3}{24} + A - \frac{23}{24}$.

Donc $\forall A \in [1,+\infty[$, $\int_1^{+\infty} e^{-t^2/8} dt \geqslant \int_1^A e^{-t^2/8} dt \geqslant -\frac{A^3}{24} + A - \frac{23}{24}$.

$\forall A \in [1,+\infty[$, $\int_1^{+\infty} e^{-t^2/8} dt \geqslant -\frac{A^3}{24} + A - \frac{23}{24}$.

Posons $\forall A \in [1,+\infty[$, $\ell(A) = -\frac{A^3}{24} + A - \frac{23}{24}$. ℓ est dérivable sur $[1,+\infty[$.

$\forall A \in [1,+\infty[$, $\int_1^{+\infty} e^{-t^2/8} dt \geqslant \ell(A)$.

$\forall A \in [1,+\infty[,\ \ell'(A) = -\frac{A^2}{8} + 1 = \frac{8-A^2}{8} = \frac{(2\sqrt{2}-A)(2\sqrt{2}+A)}{8}$

Ainsi $\forall A \in [1, 2\sqrt{2}[,\ \ell'(A) > 0$; $\ell'(2\sqrt{2}) = 0$; $\forall A \in]2\sqrt{2}, +\infty[,\ \ell'(A) < 0$.

Alors ℓ est strictement croissante sur $[1, 2\sqrt{2}]$ et strictement décroissante sur $[2\sqrt{2}, +\infty[$.

ℓ possède un maximum sur $[1,+\infty[$ atteint en le seul point $2\sqrt{2}$.

Ainsi $\int_1^{+\infty} e^{-t^2/8} dt \geqslant \ell(2\sqrt{2}) = -\frac{(2\sqrt{2})^3}{24} + 2\sqrt{2} - \frac{23}{24} = 2\sqrt{2} - \frac{31}{24}$.

Notons que $2\sqrt{2} \simeq 2{,}83$ et $\frac{31}{24} \simeq 1{,}29$. Il semble donc que $2\sqrt{2} - \frac{31}{24} > 1$.

Notons le. $2\sqrt{2} - \frac{31}{24} > 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} > \frac{31}{24} + 1 = \frac{55}{24} \Leftrightarrow 48\sqrt{2} > 55 \Leftrightarrow 2(48)^2 > (55)^2$

$2\sqrt{2} - \frac{31}{24} > 1 \Leftrightarrow 4608 > 3025$.

Ainsi $\int_1^{+\infty} e^{-t^2/8} dt \geqslant 2\sqrt{2} - \frac{31}{24} > 1$. $\underline{\underline{\int_1^{+\infty} e^{-t^2/8} dt > 1.}}$

Q3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall x \in [\frac{1}{n}, +\infty[,\ g_n(x) = \int_{1/n}^{x} e^{-t^2/8} dt$.

g_n est dérivable sur $[\frac{1}{n}, +\infty[$ et $\forall x \in [\frac{1}{n}, +\infty[,\ g_n'(x) = e^{-x^2/8} > 0$.

Notons que $\int_{1/n}^{+\infty} e^{-t^2/8} dt$ converge. Ainsi $\lim_{x \to +\infty} g_n(x) = L_n$ avec $L_n = \int_{1/n}^{+\infty} e^{-t^2/8} dt$.

1) g_n est continue sur l'intervalle $[\frac{1}{n}, +\infty[$.

2) g_n est strictement croissante sur $[\frac{1}{n}, +\infty[$

3) $g_n(\frac{1}{n}) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} g_n(x) = L_n$.

Alors g_n définit une bijection de $[\frac{1}{n}, +\infty[$ sur $[0, L_n[$.

$L_n = \int_{1/n}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{8}} dt \underset{1 \geqslant \frac{1}{n} \text{ et } \forall t \in \mathbb{R},\ e^{-t^2/8} \geqslant 0}{\geqslant} \int_1^{+\infty} e^{-t^2/8} dt > 1$. Ainsi $L_n > 1$. Alors $\frac{1}{n} \in [0, L_n[$

Par conséquent $\exists!\ u_n \in [\frac{1}{n}, +\infty[,\ g_n(u_n) = \frac{1}{n}$.

$\exists!\ u_n \in [\frac{1}{n}, +\infty[,\ \int_{1/n}^{u_n} e^{-t^2/8} dt = \frac{1}{n}$.

Notons que $\forall x \in]-\infty, \frac{1}{n}[,\ \int_{1/n}^{x} e^{-t^2/8} dt < 0$ car $t \mapsto e^{-t^2/8}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc $\forall x \in]-\infty, \frac{1}{n}[,\ \int_{1/n}^{x} e^{-t^2/8} dt \neq \frac{1}{n}$.

Finalement, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $\int_{1/n}^{u_n} e^{-t^2/8}dt = \frac{1}{n}$.

Remarque.. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n \in [\frac{1}{n}, +\infty[$. Mieux $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n \in]\frac{1}{n}, +\infty[$.

Q4) a) soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\frac{1}{n} < u_n$ et $\forall t\in[\frac{1}{n}, u_n]$, $e^{-\frac{u_n^2}{8}} \leq e^{-\frac{t^2}{8}} \leq e^{-\frac{(1/n)^2}{8}}$.

En intégrant il vient : $\int_{1/n}^{u_n} e^{-u_n^2/8}du \leq \int_{1/n}^{u_n} e^{-t^2/8}dt \leq \int_{1/n}^{u_n} e^{-\frac{1}{8n^2}}dt$ car $\frac{1}{n} < u_n$.

Alors $(u_n - \frac{1}{n})\, e^{-\frac{u_n^2}{8}} \leq \frac{1}{n} \leq (u_n - \frac{1}{n})\, e^{-\frac{1}{8n^2}}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\int_{\frac{1}{n+1}}^{u_{n+1}} e^{-t^2/8}dt = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = \int_{\frac{1}{n}}^{u_n} e^{-t^2/8}dt \leq \int_{\frac{1}{n+1}}^{u_n} e^{-t^2/8}dt$.

$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$ et $\forall t\in\mathbb{R}, e^{-t^2/8} \geq 0$

donc $\int_{\frac{1}{n+1}}^{u_{n+1}} e^{-t^2/8}dt \leq \int_{\frac{1}{n+1}}^{u_n} e^{-t^2/8}dt$.

Ainsi $0 \leq \int_{\frac{1}{n+1}}^{u_n} e^{-t^2/8}dt - \int_{\frac{1}{n+1}}^{u_{n+1}} e^{-t^2/8}dt = \int_{u_{n+1}}^{u_n} e^{-t^2/8}dt$.

Or si $u_{n+1} > u_n$: $\int_{u_{n+1}}^{u_n} e^{-t^2/8}dt < 0$. Donc $u_{n+1} \leq u_n$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \leq u_n$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0.

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Posons $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans les inégalités de 4 a) il vient :

$(L-0)\, e^{-\frac{L^2}{8}} \leq 0 \leq (L-0)\, e^{-0}$. Alors $L \leq 0$ et $L \geq 0$. $L = 0$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} e^{\frac{u_n^2}{8}}$ et $\frac{1}{n} e^{+\frac{1}{8n^2}} \leq u_n - \frac{1}{n}$ d'après Q4 a)

donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} e^{\frac{1}{8n^2}} + \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n} e^{\frac{u_n^2}{8}} + \frac{1}{n}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $e^{\frac{1}{8n^2}} + 1 \leq n u_n \leq e^{\frac{u_n^2}{8}} + 1$. de plus $\lim_{n\to+\infty} (e^{\frac{1}{8n^2}} + 1) = \lim_{n\to+\infty} (e^{\frac{u_n^2}{8}} + 1) = 2$.

Par encadrement il vient $\lim_{n\to+\infty} (n u_n) = 2$. Alors $n u_n \underset{+\infty}{\sim} 2$ car $2 \neq 0$. Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

Q5 Posons $\forall x \in [0,+\infty[$, $F(x) = \int_0^x e^{-t^2/8}\,dt$. $F(0)=0$.

F est dérivable sur $[0,+\infty[$; $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F'(x) = e^{-x^2/8}$ et $F'(0) = $.

F' est dérivable sur $[0,+\infty[$; $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F''(x) = -\frac{x}{4} e^{-x^2/8}$ et $F''(0)=0$.

F'' est dérivable sur $[0,+\infty[$; $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F'''(x) = -\frac{1}{4} e^{-x^2/8} + \left(-\frac{x}{4}\right)\left(-\frac{x}{4}\right) e^{-x^2/8}$ et $F'''(0) = -\frac{1}{4}$.

Alors F admet un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0.

$F(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{4}\frac{x^3}{3!} + o(x^3)$; $F(x) = x - \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$

$F(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} u_n - \frac{1}{24}u_n^3 + o(u_n^3)$ et $F\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{24}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. $-F\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{-1}{n} + \frac{1}{24}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$!

Alors $\frac{1}{n} = \int_{1/n}^{u_n} e^{-t^2/8}\,dt = F(u_n) - F(1/n) \underset{n\to+\infty}{=} u_n - \frac{1}{24}u_n^3 + o(u_n^3) - \frac{1}{n} + \frac{1}{24}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

Ainsi $u_n - \frac{2}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{24}\left(u_n^3 - \frac{1}{n^3}\right) - o(u_n^3) - o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$n^3\left(u_n - \frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{24}\left(n^3 u_n^3 - 1\right) - n^3 o(u_n^3) - n^3 o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

$n^3 u_n^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3\left(\frac{2}{n}\right)^3$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^3 u_n^3\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^3\left(\frac{2}{n}\right)^3\right) = 8$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{24}\left(n^3u_n^3 - 1\right)\right) = \frac{1}{24}(8-1)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{24}\left(n^3u_n^3-1\right)\right) = \frac{7}{24}$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^3 o(u_n^3)\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^3 o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 0$

$u_n^3 \sim \frac{8}{n^3}$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^3\left(u_n - \frac{2}{n}\right)\right) = \frac{7}{24}$ et $\frac{7}{24} \neq 0$.

Alors $n^3\left(u_n - \frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{7}{24}$.

Donc $\underline{\underline{u_n - \frac{2}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{7}{24} \times \frac{1}{n^3}}}$. (notons que $\alpha = \frac{7}{24}$ et $\beta = 3 \ldots$).

Si vous trouvez des erreurs importantes me le dire.